

УДК 539.3: 539.4

**І.П. Шацький<sup>1</sup>, А.М. Кундрат<sup>2</sup>, М.М. Кундрат<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України<sup>2</sup>Національний університет водного господарства та природокористування  
**МОДЕЛЬ КОМПОЗИТУ ЗІ ЗВ'ЯЗАНОЮ СТРІЧКОВОЮ АРМАТУРОЮ**

*Досліджується напружено-деформований стан пружного масиву з системами жорстких стрічкових включень за умов поздовжнього зсуву. Проаналізовано вплив взаємозв'язаності та кількості включень на прикладах їх колінеарного та паралельного розташування. Обчислено стрибки напружень та коефіцієнти інтенсивності напружень в околі вершин включень, подано графіки переміщень композиту.*

*Ключові слова:* пружне тіло, поздовжній зсув, жорстке включення, стрибок напружень, коефіцієнт інтенсивності.

Рис. 12. Форм. 8. Літ. 7.

**И.П. Шацкий, А.Н. Кундрат, Н.М. Кундрат**  
**МОДЕЛЬ КОМПОЗИТА СО СВЯЗАННОЙ ЛЕНТОЧНОЙ АРМАТУРОЙ**

*Исследуется напряженно-деформированное состояние упругого массива с системами жестких ленточных включений в условиях продольного сдвига. Проанализировано влияние взаимосвязанности и количества включений на примере их коллинеарного и параллельного расположения. Вычислены скачки напряжений и коэффициенты интенсивности напряжений в окрестностях вершин включений, представлены графики перемещений композита.*

*Ключевые слова:* упругое тело, продольный сдвиг, жесткое включение, скачок напряжений, коэффициент интенсивности.

**I.P. Shatskyi, A.M. Kundrat, M.M. Kundrat**  
**MODEL OF COMPOSITE WITH THE CONNECTION OF RIBBON-LIKE ARMATURE**

*Stressed-strained state of elastic body with the systems rigid ribbon-like inclusions subjected to the longitudinal shear is investigated. Influence of connection between inclusions and their quantity on stress-deformed state elastic space has been analyzed on the example collinear and parallel inclusions. Jump of stress and stress intensity factors in the inclusions tips are calculated, diagrams of displacement of composite are shown.*

*Key words:* elastic body, longitudinal shear, rigid inclusion, jump of stress, intensity factor.

**Вступ.** Вирішення задач підвищення надійності, довговічності та зносостійкості елементів конструкцій уже довгий час відіграють важливу роль у багатьох галузях виробництва. Адже саме підвищення працездатності складових елементів дає можливість скоротити витрати матеріалів, підвищити продуктивність, чим сприяє збереженню трудових та матеріальних ресурсів. Найбільш поширеними конструкційними матеріалами продовжують залишатися композиційні, зокрема армовані, оскільки їх використання забезпечує значний ресурс роботи при помірних економічних затратах. У зв'язку з цим постають задачі вивчення напруженого стану тіл з чужорідними включеннями [1, 2], для яких антиплоска деформація масиву є найбільш зручною моделлю. Додатково для підвищення жорсткісних характеристик елементи арматури можуть зв'язуватись в єдиний каркас, що зумовлює потребу у нових постановках задач механіки композитів.

Систематичні дослідження тіл із зв'язаними жорсткими включеннями в загальній постановці розпочато в роботах [3–6], де на прикладах колінеарного та паралельного розташування стрічок за навантаження однорідним полем напружень на безмежності [3, 4] та за витягування погонними силами, прикладеними безпосередньо до включень [5], досліджено вплив зв'язаності. Для діади довільно розташованих стрічок виявлено найбільш небезпечну орієнтація однорідного зсуву [6]. Аналіз результатів цих робіт свідчить про значне покращення фізико-механічних властивостей конструкцій, зокрема підвищення їх жорсткості в результаті зв'язаності навіть окремих армувальних елементів. Але з іншого боку це призводить до збільшення концентрації напружень в масиві, а відтак, до можливого передчасного руйнування.

Мета цього повідомлення – продемонструвати ефекти зв'язаності стрічкової арматури на задачах поздовжнього зсуву пружного тіла з множиною взаємонерухомих жорстких включень.

**Постановка та інтегральні рівняння задачі.** Розглянемо ізотропне тіло  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , армоване системою паралельних безмежно тонких тунельних включень, протяжних вздовж осі  $z$ . Попереччя включень у площині  $xy$  – це відрізки  $L_k$  з розмірами  $2l_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ). Приймаємо, що включення є абсолютно жорсткими та перебувають в ідеально механічному контакті з матрицею.

Досліджуємо збурення напружено-деформованого стану композиції, викликане однорідним полем напружень зсуву на безмежності.

Крайова задача антиплоскої деформації для масиву із взаємонерухомими недеформівними включеннями має вигляд [3]:

$$\mu \nabla^2 w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \bigcup_{k=1}^N L_k; \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad (x, y) \in L_k, \quad k = \overline{1, N}; \quad (2)$$

$$\mu \frac{\partial w}{\partial x} = \tau_1^\infty, \quad \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \tau_2^\infty, \quad (x, y) \rightarrow \infty; \quad (3)$$

з додатковими умовами відсутності взаємних переміщень та глобальної рівноваги системи зв'язаних між собою у єдиний каркас включень відповідно:

$$w_j - w_k = 0, \quad (x, y) \in L_j, L_k, \quad j \neq k; \quad \sum_{k=1}^N \int_{L_k} [\tau_{nz}]_k(s) ds = 0. \quad (4)$$

У разі незв'язаних включень замість умов (4) приймають:

$$\int_{L_k} [\tau_{nz}]_k(s) ds = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Тут  $w = w(x, y)$  –  $z$ -компонента вектора переміщення,  $\mu$  – модуль зсуву матеріалу матриці,  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  – оператор Лапласа,  $[\tau_{nz}]$  – стрибки напружень на включеннях,  $n, s$  – нормаль та дотична до контуру.

Для розв'язання задачі використаємо фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа (1): вираз переміщення через невідомі стрибки напружень подамо у вигляді

$$w(x, y) = w^0(x, y) + \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{i=1}^N \int_{L_i} \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} [\tau_{nz}]_i(s) ds, \quad (\xi, \eta) \in L_i, \quad (6)$$

де  $w^0(x, y) = (\tau_1^\infty/\mu)x + (\tau_2^\infty/\mu)y$  – відома функція основного стану для суцільного тіла без включень (визначена з точністю до сталої). Другий доданок у формулі (6) описує збурення, яке внесене системою включень.

Дослідимо системи прямолінійних включень, паралельних до осі абсцис. Тоді з урахуванням умов (2) (3) отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь задачі стосовно невідомих стрибків напружень:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{-l_i}^{l_i} \frac{x_i^0 - x_k^0 + \xi - x_k}{(x_i^0 - x_k^0 + \xi - x_k)^2 + (y_i^0 - y_k^0)^2} [\tau_{yz}]_i(\xi) d\xi = \tau_1^\infty, \quad x_k \in L_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (7)$$

де  $x_k^0, y_k^0$  – координати центру  $k$ -ого включення.

Для зв'язаних включень систему інтегральних рівнянь слід розв'язати за додаткових умов (4), які у термінах функцій стрибків матимуть вигляд

$$w^0(x_k^0, y_k^0) - w^0(x_1^0, y_1^0) + \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{i=1}^N \int_{-l_i}^{l_i} \ln \sqrt{\frac{(x_i^0 + \xi - x_k^0)^2 + (y_i^0 - y_k^0)^2}{(x_i^0 + \xi - x_1^0)^2 + (y_i^0 - y_1^0)^2}} [\tau_{yz}]_i(\xi) d\xi = 0, \quad k = \overline{2, N};$$

$$\sum_{i=1}^N \int_{-l_i}^{l_i} [\tau_{yz}]_i(\xi) d\xi = 0. \quad (8)$$

Числові розв'язки інтегральних рівнянь (7) з відповідними додатковими умовами будували методом механічних квадратів [7]. За знайденими функціями стрибка обчислювали коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) в околі вершин включень

$$k_{3k}^\pm = \pm \frac{1}{2\sqrt{l_k}} \lim_{x \rightarrow \pm l_k} \sqrt{l_k^2 - x^2} [\tau_{yz}]_k(x)$$

та пружні переміщення композиції відносно початку координат:  $\tilde{w}(x, y) = w(x, y) - w(0, 0)$ .

Розглянемо окремі випадки розташування включень з однаковими розмірами  $2l_k = 2l$ .

**Система колінеарних включень.** Розглядали систему п'яти колінеарних включень,

розміщених по осі абсцис на віддалі  $d$  один від одного з геометричними центрами  $(x_k, 0)$ ,  $x_k^0 = (k - 3)d$ ,  $k = \overline{1, 5}$  (рис. 1,  $N = 5$ ). Взаємне розташування включень описували безрозмірним параметром  $\lambda = 2l/d$ . Результати розрахунків порівнювали з отриманими для двох та для одного включень [2, 4] відповідно до схеми на рис. 1 ( $N = 2$ ,  $N = 1$ ).

Розподіл функцій стрибків напружень по півширині центрального  $x \in (0, l)$  та справа від нього розташованих включень для фіксованої віддалі між ними ( $\lambda = 2l/d = 0,5$ ) подано на рис. 2. Рис. 3 демонструє залежності знерозміреного КІН від параметра зближення включень, а рис. 4 – графіки знерозміреного переміщення точок пружного масиву для близько розташованих ( $\lambda = 0,9$ ) колінеарних включень.

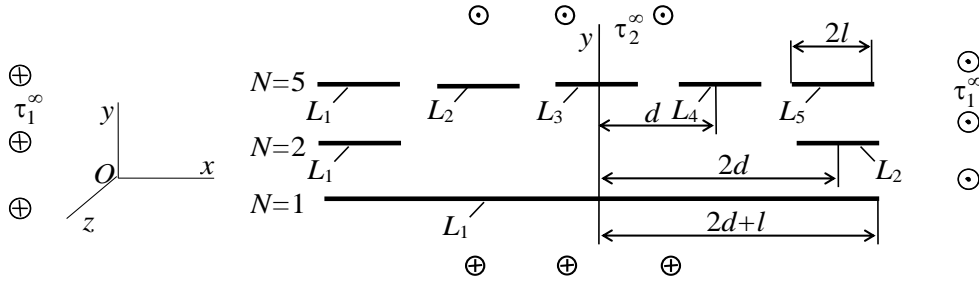


Рис. 1. Схема розташування колінеарних включень

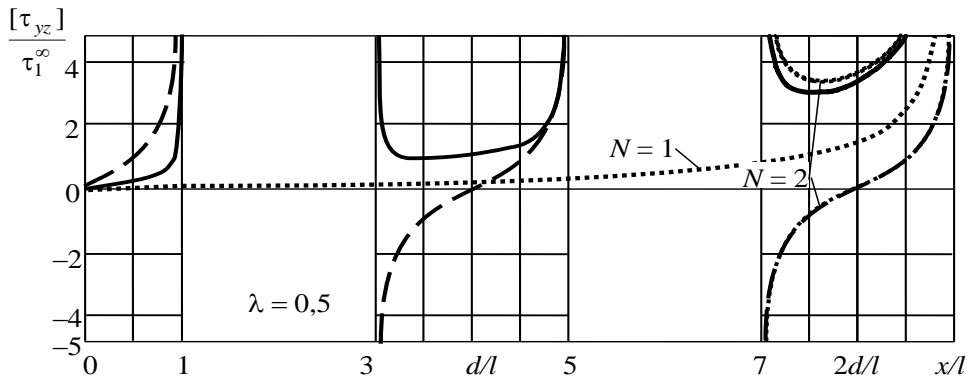


Рис. 2. Стрибки напружень: суцільні лінії – зв'язана, а штрихові – незв'язана система з п'яти включень ( $N = 5$ ), пунктирні – одне включення ( $N = 1$ ) та система з двох включень ( $N = 2$ )

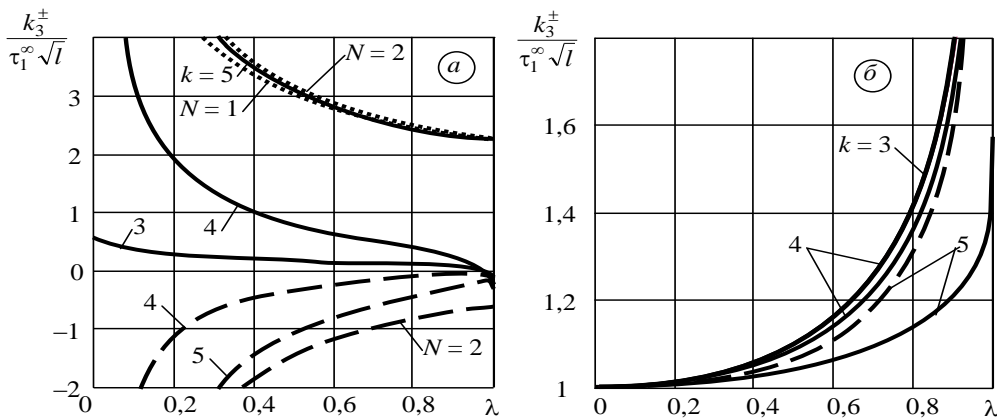


Рис. 3. Коефіцієнти інтенсивності напружень: а – зв'язані, б – незв'язані стрічки; суцільні лінії – праві, а штрихові – ліві вершини включень при  $N = 5$ , пунктирні –  $N = 1$  та  $N = 2$

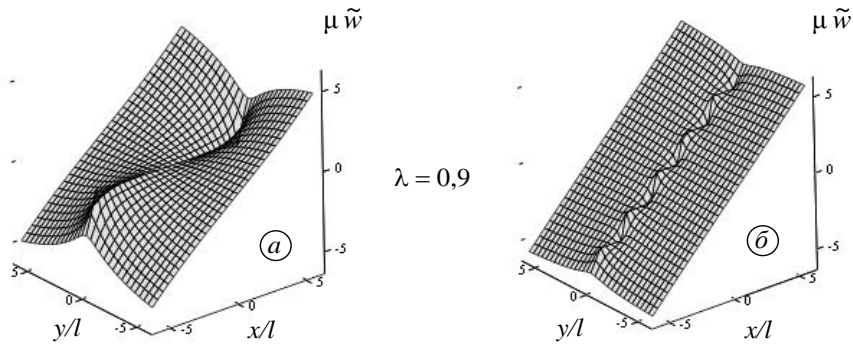


Рис. 4. Переміщення точок пружного масиву: а – зв'язані, б – незв'язані стрічки

Для зв'язаних включень виявили такі закономірності: небезпечнішими концентраторами є вершини включень, які далі розташовані від центра; при віддаленні стрічок концентрація напружень підвищується ( $|k_3^\pm|$  – спадна функція параметра  $\lambda$  така, що  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} k_3^\pm = \pm\infty$ ); при зближенні стрічок концентрація напружень поблизу внутрішніх вершин практично зникає, а у крайній правій вершині прямує до сталої величини, характерної для вп'ятеро ширшого іпоодинокого включення ( $k_3^+ \rightarrow \tau_1^\infty \sqrt{5l}$ ). Для незв'язаних включень спостерігаємо протилежні тенденції: завжди небезпечними є ближчі до початку координат вершини; при віддаленні включень концентрація напружень зменшується, а при зближенні – зростає.

**Система паралельних включень.** Нехай п'ять включень з центрами  $(0, y_k^0)$ ,  $y_k^0 = (k-3)d$ ,  $k = \overline{1, 5}$ , розташовані паралельно до осі абсцис (рис. 5). Розглядали зсув простору паралельно до площини  $yz$  однорідним полем напружень  $\tau_1^\infty \neq 0, \tau_2^\infty = 0$  (рис. 5). В цьому разі зв'язаність стрічок вочевидь не впливає на розв'язок задачі [3, 6]. Внаслідок симетрії досліджували розподіл стрибків напружень по ширині трьох верхніх включень (рис. 6).

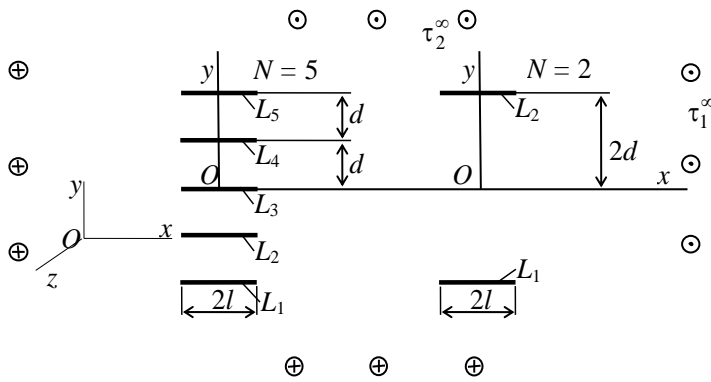


Рис. 5. Схема задачі для паралельних стрічок

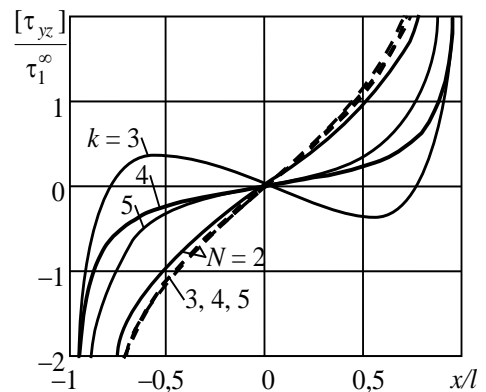


Рис. 6. Стрибки напружень:  $\lambda = 0,5$  – пунктир,  $\lambda = 5$  – суцільні лінії

Для далеко розташованих включень стрибок напружень змінює знак лише в геометричному центрі кожного, а для близько розмішених на центральному включенні відбувається зміна знаку ще у двох точках, симетричних відносно середини.

Зі збільшенням відстані між включеннями КІН зростає (рис. 7) і в системі з п'яти включень у вершинах крайніх стрічок порівняно з внутрішніми є завжди більшим. У системі з двох стрічок ( $N=2$ ) інтенсивність напружень у вершинах більша проти максимальних в системі п'яти, наявність додаткової арматури в цьому разі розвантажує композицію.

На рис. 8 подано відносні переміщення матриці за фіксованої віддалі між стрічками ( $d = 4l$ ).

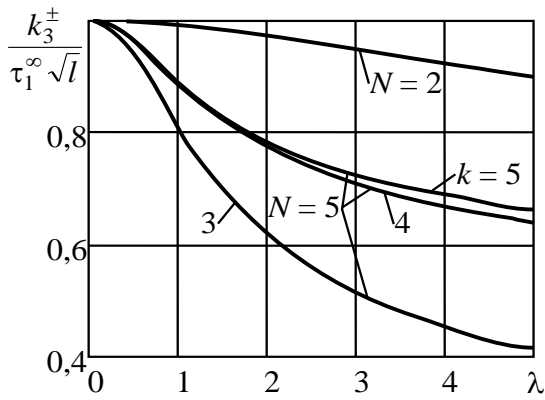


Рис. 7. Коефіцієнти інтенсивності напружень

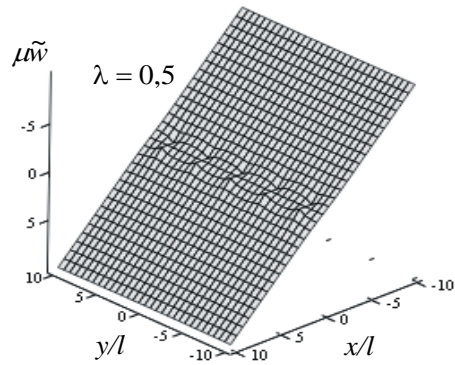


Рис. 8. Переміщення точок пружного масиву

За зсуву масиву паралельно до площини  $xz$  ( $\tau_1^\infty = 0, \tau_2^\infty \neq 0$ ), отримуємо систему однорідних інтегральних рівнянь з неоднорідними додатковими умовами для нерухомих включень. Стрибки напружень на трьох верхніх включеннях показано на рис. 9.

Зі збільшенням взаємної відстані між зв'язаними включеннями КІН зростає (рис. 10) і у вершинах крайніх включень порівняно з внутрішніми завжди більший.

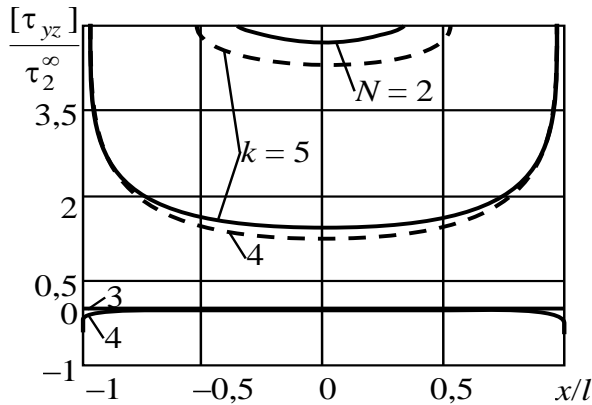


Рис. 9. Стрижки напружень:  $\lambda = 0,5$  – пунктир,  $\lambda = 5$  – суцільні лінії

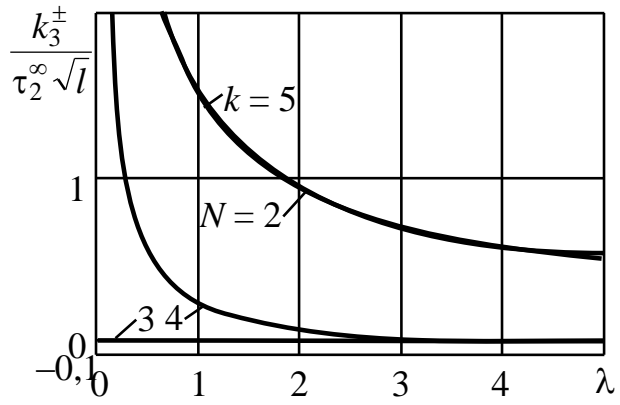


Рис. 10. Коефіцієнти інтенсивності напружень

На рис. 11 подано значення головних вектор реактивних напружень на кожному з включень. Найбільше навантаження в системі з п'яти стрічок сприймає крайня ( $k=5$ ), центральна стрічка закономірно не навантажена.

Рис. 12 ілюструє відносні переміщення точок пружного масиву на площині  $xu$  при  $\lambda = 0,5$ . Тут спостерігаємо збурення однорідної картини деформування, набагато помітніші, ніж на рис. 8.

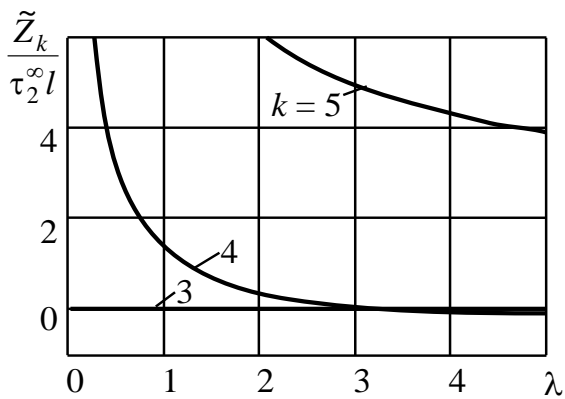


Рис. 11. Головний вектор напружень

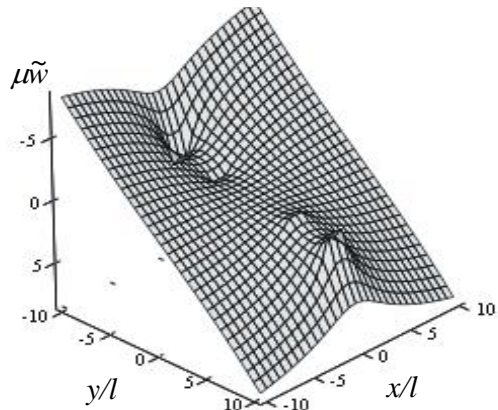


Рис. 12. Переміщення точок матриці

Для незв'язаних включень задача про збурення має очікуваний тривіальний розв'язок  $[\tau_{yz}]_k = 0$ ,  $k = \overline{1, 5}$ , а самі включення отримують переміщення:  $w(x, y_k^0) = (\tau^\infty / \mu)(k - 3)d$ ,  $x \in (-l, l)$ ,  $k = \overline{1, 5}$ .

**Висновки.** Композиційний матеріал зі зв'язаною стрічковою арматурою змодельовано пружним середовищем з системою взаємонерухомих жорстких тунельних включень. Сформульовано крайову задачу антиплоскої деформації ізотропного тіла з системами недеформованих включень. Побудовано та проаналізовано числові розв'язки для п'яти колінеарних та паралельних стрічкових включень за умов однорідного зсуву на безмежності.

Встановлено, що напружено-деформований стан композиції із взаємозв'язаною стрічковою арматури має суттєві відмінності порівняно з випадком розмежованого армування. Проведені дослідження дають змогу передбачати та оптимізувати міцнісні та деформативні характеристики композицій із взаємонерухомими армувальними елементами.

#### Список використаних джерел:

1. Бережницький Л. Т. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле / Л. Т. Бережницький, В. В. Панасюк, Н. Г. Стащук. – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.
2. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
3. Шацький І. П. Антиплоска деформація пружного простору зі зв'язаними жорсткими стрічковими включеннями / І. П. Шацький, А. М. Кундрат // Доп. НАН України. – 2004. – № 11. – С. 55–60.
4. Шацький І. П. Поздовжній зсув масиву з взаємонерухомими жорсткими колінеарними включеннями / І. П. Шацький, А. М. Кундрат // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – Т. 40, № 3. – С. 69–73.
5. Шацький І. Антиплоска задача про витягування системи стрічкових включень із пружної матриці / І. Шацький, А. Кундрат // Машинознавство. – 2004. – № 7. – С. 21–23.
6. Шацький І. П. Влияние связанности ленточной арматуры на концентрацию напряжений продольного сдвига / И. П. Шацкий, А. Н. Кундрат // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2006. – Т. 2, № 2. – С. 273–280.
7. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.

Стаття надійшла до редакції 20.04.2016.