УДК 539.3

В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко, А.В. Маткова
Луцький національний технічний університет

ДО ПРОБЛЕМИ УТОЧНЕНОГО РОЗРАХУНКУ ЗГИНУ ПЛИТ НА ЖОРСТКИХ ТА ПРУЖНИХ ОСНОВАХ

Розглядається згин трансверсально-ізотропних плит, центральна область яких контактує з пружною основою Вінклера або жорстким фундаментом. Визначаються контактні переміщення і напруження на поверхні розділу з урахуванням деформації поперечного зсуву та обтиснення.

Ключові слова: *трансвенсально-ізотропна плита, пружна основа, контактні напруження, деформації поперечного зсуву та обтиснення.*

В.И. Швабюк, С.В. Ротко, А.В. Маткова

К ПРОБЛЕМЕ УТОЧНЕННОГО РАСЧЕТА ИЗГИБА ПЛИТ НА ЖЕСТКИХ И УПРУГИХ ОСНОВАНИЯХ

Рассматривается изгиб трансверсально-изотропных плит, центральная область которых контактирует с упругим основанием Винклера или жестким фундаментом. Определяются контактные перемещения и напряжения на поверхности раздела с учетом деформации поперечного сдвига и обжатия.

Ключевые слова: *трансвенсально-изотропна плита, упругая основа, контактные напряжения, деформации поперечного сдвига и обжатия.*

V.I. Shvabyuk, S.V. Rotko, A.V. Matkova

TO THE PROBLEM OF AN IMPROVED CALCULATION OF BENDING OF PLATES ON RIGID AND ELASTIC FOUNDATIONS

The bending problem of plates on an elastic base in the classical Kirchhoff's formulation of the theory of thin plates and specified theories of the Timoshenko type, which take into account only the effects of transverse shear, does not give qualitatively correct results for the values of displacements and contact pressures in cases with significant transverse anisotropy of the plate or for certain relations of the elasticity moduli of slabs and base.

This especially applies to the contact problems of plates with elastic bases of different types, if the load on the front surface of the plate is the result of a hard stamp, that fits into the plate. In addition to identifying all other stress-deformation characteristics, a difficult problem occurs connected with finding the contact pressure that arises between the stamp and the plate. This problem becomes more complicated if the plate or the shell are anisotropic. Therefore, such cases require the use of equations of the specified theory that take into account the deformation of transversale compression.

This research examines the bending of transversaly isotropic plates, the central region of which contacts with an elastic base of Winkler or with a rigid foundation. Therefore such plates can be plates of road or airfield pavements with edges lifted to a certain height and under the influence of distributed load.

The formulas, which allow to find the size of the contact area and contact pressure of the elastic base and an absolutely rigid foundation on the plate. There were found the displacements and the tension in that part of the plate which is not in contact with the elastic or rigid bases. The contact displacements and the tension on the division surface can be found with taking into account the strains of transversale shear and compression.

Key words: *transversale isotropic plate, elastic foundation, the contact stresses, deformations transversale shear and displacement.*

Постановка проблеми. Проблема згину плит на пружній основі у класичній постановці теорії тонких пластин Кірхгофа, а також і уточнених теорій типу С. Тимошенка, які враховують тільки ефекти поперечного зсуву, не дає якісно правильних результатів для величин контактних переміщень і тисків у випадках значної поперечної анізотропії плити або відношень модулів пружності плит та основи (E / E_0). Особливо це стосується проблеми контакту плит із пружними основами різних типів, якщо навантаження на лицевій поверхні плити є результатом дії жорсткого штампа, що втискується в плиту. Тому, в додаток до визначення всіх інших напружено-деформаційних характеристик, виникає складна задача знаходження контактного тиску, що виникає між штампом і плитою. Задача ще більше ускладнюється, якщо плита чи оболонка є анізотропними. Такі випадки уже вимагають застосування рівнянь уточнених теорій, що враховують деформації поперечного обтиснення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задачі уточненого розрахунку згину ізотропних і трансверсально - ізотропних плит на пружних або жорстких основах під дією розподіленого або зосередженого навантаження розглянуті в багатьох роботах [1-5], де враховувався вплив поперечного зсуву на величини максимальних напружень і переміщень у плитах, де контактний тиск і уявна реакція на межі контакту мають дорівнювати нулю.

Згин товстих ізотропних плит на пружних багатошарових основах досить детально розглядався у фундаментальній роботі В.З. Власова та М.М. Леонтьєва [6], де крім статичних розглядалися і динамічні задачі. Подібні задачі, але вже для анізотропних плит із урахуванням деформацій поперечного зсуву та обтиснення, розглядалися у низці робіт В.Г. Піскунова та В.К. Присяжнюка [7,8].

Ще одним ефективним методом розрахунку контактних задач для плит, навантажених жорсткими штампами, є метод інтегральних перетворень. За допомогою цього методу авторами [9] здійснено практичний розрахунок плит на пружних і жорстких основах, які можуть використовуватись для покриття аеродромних смуг та автомобільних доріг. Розв'язано низку задач про контактну взаємодію штампів із плитами, що лежать повністю або частково на жорстких або пружних фундаментах.

Завдяки розробленим підходам контактні задачі для оболонок, пластин і балок, без підвищення порядку рівнянь (відносно зсувних некласичних моделей), стали математично коректнішими, а їх розв’язки (якісно та кількісно) ближчими до відповідних задач теорії пружності та придатнішими для здійснення адекватних інженерних розрахунків.

У даній роботі розглядається згин трансверсально-ізотропних плит, центральна область яких контактує з пружною основою Вінклера або жорстким фундаментом. Такими плитами можуть бути плити дорожнього або аеродромного покриттів під дією розподіленого навантаження, із піднятими на певну висоту краями. Визначаються контактні переміщення і напруження на поверхні розділу з урахуванням деформації поперечного зсуву та обтиснення.

1. Циліндричний згин транстропної плити, частково опертої на пружну основу

Розглянемо циліндричний згин трансверсально-ізотропної плити, довжиною $2l$ під дією власної ваги $q = 2P/2l$ та розподілених сил P_1, прикладених до правого та лівого країв, що піднімають їх. Середня частина плити $(x \le a)$ лежить на пружній основі Вінклера та знаходиться під дією власної ваги q і контактного тиску $p(x)$. Приймемо, що поверхня розділу плити і пружної основи є ідеально гладкою, тому дотичні напруження τ_{xz}, τ_{yz} на цій поверхні вважатимуться відсутніми. Таким чином граничні умови на зовнішніх поверхнях плити записуються в наступному вигляді:

$$\sigma_z = q^+(x) = -p(x) \text{ для } (z = h;\ x \le a); \tag{1}$$

$$\sigma_z = 0 \text{ для } (z = h;\ x > a);\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ для } z = \pm h,$$

де $p(x)$ – невідомий контактний тиск, який виникає між нижньою поверхнею плити і пружною основою в області її контакту $(x \le a)$; $2h$ – товщина плити.

Будемо виходити зі співвідношень узагальненої моделі трансверсально-ізотропних плит, які стосовно до даного класу задач можна записати у вигляді [8,9]:

а) розрахункових рівнянь згину:

$$D\frac{d^4\widehat{w}}{dx^4} = (1-\varepsilon_1\frac{d^2}{dx^2})q_2;\quad D\frac{d^2w_\tau}{dx^2}_{\tau} = -\frac{5}{4}\varepsilon_\tau q_2, \tag{2}$$

де

$$\varepsilon_1 = \frac{h^2}{10(1-\nu)}\left(8\frac{G}{G'} - 3\nu''\right),\ \varepsilon_\tau = \frac{4h^2G}{5(1-\nu)G'},\ D = \frac{2}{3}\frac{Eh^3}{\left(1-\nu^2\right)},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{0.1h^4}{2(1-\nu^2)}(1-\nu''G'/2G)\cdot\frac{E}{E'},\ \ \widehat{w} = w + \frac{\varepsilon_2}{D}q_2;\quad q_2 = \left(q^+ + q^-\right) = q - p\,.$$

б) виразів для напружень і переміщень:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{2h} + \frac{M_x}{I}z + \frac{z}{3I\left(1-\nu\right)}\left(z^2 - 0.6h^2\right)\left(\frac{G}{G'} - \nu''\right)\left(q_2 - 0.5q_2''h^2\frac{G'}{E'}\right); \tag{3}$$

$$\sigma_z = q_1 + \frac{1}{4}\left(3\frac{z}{h} - \frac{z^3}{h^3}\right)\cdot q_2;\ q_1 = \frac{1}{2}\left(q^+ - q^-\right);$$

$$U(x,z)=u(x)-z\left(\frac{dw}{dx}-\frac{dw_\tau}{dx}\left(1-(1-\alpha)\frac{z^2}{3h^2}\right)\right)+\frac{(1-\alpha)}{8E'h}\frac{dq_2}{dx}z^3;$$

$$W(x,z)=w(x)+2\alpha_0 z\cdot\frac{q_1}{E'}+A'\cdot\frac{d^2w}{dx^2}\cdot\frac{z^2}{2}+\frac{\alpha_0 q_2 h}{8E'}\cdot B(z).$$

Тут $B(z)=6A_2\frac{z^2}{h^2}-A_3\frac{z^4}{h^4}$; $I=\frac{2}{3}h^3$; $A'=\frac{\nu''}{1-\nu}$; $\alpha_0=0.5-\nu'A'$, $\tilde{w}=w+1.5\varepsilon_2 q_2 h/\tilde{E}$,

$A_2=1+\frac{A'E'}{2\alpha_0 G'}$; $A_3=A_2-\frac{\nu''A'E'}{4\alpha_0 G}$. $Q_x=K'\frac{dw_\tau}{dx}$; $N_x=\int_{-h}^{h}\sigma_x dz=2\tilde{E}h\frac{du}{dx}+2A'hq_1$;

$M_x=\int_{-h}^{h}z\sigma_x dz=-D\frac{d^2\tilde{w}}{dx^2}-\varepsilon_1 h^2 q_2$ – поперечна та поздовжня сили, згинальний момент у плиті;

$q^-=q$ – власна вага плити; u – тангенціальне переміщення серединної поверхні плити. Вираз для вертикального переміщення в області контакту плити з основою $(x\le a)$ має вигляд

$$W(x,h)=w(x)+0.5A'\cdot\frac{d^2w}{dx^2}h^2+\frac{2\alpha_0 hq_1}{E'}+\alpha_0 q_2 h(6A_2-A_3)/8E'. \quad (4)$$

Поза областю контакту $(x>a)$ нижньої поверхні плити та поверхні розділу вертикальне переміщення плити записується у вигляді

$$W(x,h)=w(x)+0.5A'\cdot\frac{d^2w}{dx^2}h^2-\frac{\alpha_0 hq}{E'}+\alpha_0 qh(6A_2-A_3)/8E'. \quad (5)$$

Між вертикальним переміщенням нижньої поверхні плити та тиском на поверхні розділу існує зв’язок у формі

$$q^+(x)=-p(x)=-kW(x,h) \text{ для } (x\le a);$$

$$q^+(x)=0 \text{ для } (x>a), \quad (6)$$

де k – коєфіцієнт постелі основи у випадку, коли плита знаходиться на пружній основі Вінклера.

Виходячи з умов (4), (6) , знаходимо вираз для контактного тиску на нижню грань плити:

$$A_0^+ p(x)=k[w(x)+0.5A'h^2w'']-kA_0^- q, \quad (7)$$

де $A_0^+=1+k(8+B(h))\frac{\alpha_0 h}{8E'}$; $A_0^-=(8-B(h))\frac{\alpha_0 h}{8E'}$; $B(h)=6A_2-A_3$.

Замінивши у першому рівнянні (2) складову навантаження q^+ на вираз (6), одержимо наступне розрахункове рівняння

$$D'w^{VI}+D_0 w^{IV}-k\left(\varepsilon_1-0,5A'h^2\right)w^{II}+kw=\left(A_0^++A_0^-\right)q, \quad (8)$$

де $D'=-0,5kA'\varepsilon_2 h^2$; $D_0=DA_0^+-k\left(\varepsilon_2+0,5A'\varepsilon_1 h^2\right)$.

Нехтуючи у рівнянні (8) коефіцієнтом біля старшої похідної ($D' \approx 0$), одержимо розрахункове диференціальне рівняння четвертого порядку для визначення переміщення середньої лінії плити w:

$$w^{IV}-2g^2w^{II}+\lambda^4 w=\left(A_0^++A_0^-\right)q/D_0, \quad (9)$$

де $\lambda^4=k/D_0$; $g^2=\frac{0,4}{1-\nu}\left(\tilde{G}-\nu''\right)h^2\lambda^4$; $\tilde{G}=G/G'$.

Розв’язком рівняння (9), за умови, що $g^2<\lambda^2$, буде вираз

$$w(x) = A_1K_1(x) + A_2K_2(x) + A_3K_3(x) + A_4K_4(x) + w^*. \tag{10}$$

Тут $w^* = \left(A_0^+ + A_0^-\right)q / k$ – частковий розв'язок рівняння (9); A_i,(i=1÷4) – невідомі коефіцієнти, які знаходяться з граничних умов на кінцях плити та умов рівноваги; $K_i(x)$ – фундаментальні функції Крилова:

$K_1(x) = ch\alpha x \cdot \cos\beta x$; $K_2(x) = sh\alpha x \cdot \sin\beta x$; $K_3(x) = sh\alpha x \cdot \cos\beta x$;

$$K_4(x) = ch\alpha x \cdot \sin\beta x;\ \alpha = \sqrt{(\lambda^2 + g^2)/2};\ \beta = \sqrt{(\lambda^2 - g^2)/2}. \tag{11}$$

З умови симетричності задачі два з чотирьох невідомих коефіцієнтів A_i дорівнюють нулю ($A_3 = A_4 = 0$). Інші два коефіцієнти (A_1, A_2) та величина області контакту $2a$ знаходяться з умов, що невідомий контактний тиск $p(x)$ на межі області контакту $x = \pm a$ дорівнює нулю, а всередині області має задовольнити умову рівності нулю суми проекцій всіх сил на вісь Oz та умові рівності нулю суми моментів проекцій всіх сил відносно початку системи координат $(x = 0)$:

$$p(\pm a) = 0;\ \int_{-a}^{a} p(x)dx = 2ql - 2P_1;\ \int_0^a xp(x)dx = \frac{1}{2}ql^2 - P_1 l. \tag{12}$$

Підставивши в умови (12) замість величини $p(x)$ вираз (7) та задовольнивши їх, знаходимо трансцендентне рівняння для визначення величини області контакту $2a$, а також залежності для сталих A_1, A_2:

$$(1 - K_1)\tilde{K}_1 + K_2\tilde{K}_2 + \left(K_3\tilde{K}_3 + K_4\tilde{K}_4\right)(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{1}{2}l^2(\alpha^2 + \beta^2)^2\left(\frac{1}{3} - \theta^2\right),$$

$$A_1 = qA_0^+ \frac{(\nu_0\alpha - \tilde{g}\beta)K_3 + (\nu_0\beta + \tilde{g}\alpha)K_4 + l(\frac{2}{3} - \theta)(\alpha^2 + \beta^2)(\nu_0K_1 + \tilde{g}K_2)}{[(\alpha R_1 + \beta R_2)K_3 + (\beta R_1 - \alpha R_2)](\nu_0K_1 + \tilde{g}K_2)},$$

$$A_2 = -\omega A_1 - qA_0^+(\nu_0K_1 + \tilde{g}K_2)^{-1};\ R_1 = (\tilde{g} - \nu_0\omega),\ R_2 = (\omega\tilde{g} + \nu_0), \tag{13}$$

де $\omega = (\tilde{g}K_1 - \nu_0K_2)/(\nu_0K_1 + \tilde{g}K_2)$; $\tilde{g} = 1 + 0.5A'h^2g^2$; $\tilde{K}_1 = \tilde{R}_1g^2 + 2\alpha\beta\tilde{R}_2$;

$\tilde{K}_2 = \tilde{R}_2g^2 - 2\alpha\beta\tilde{R}_1$; $\tilde{K}_3 = a\alpha\tilde{R}_1 + a\beta\tilde{R}_2$; $\tilde{K}_4 = a\beta\tilde{R}_1 - a\alpha\tilde{R}_2$; $\nu_0 = A'h^2\alpha\beta$;

$\tilde{R}_1 = A_1R_1 / A_0^+ - \nu_0(\tilde{g}K_2 + \nu_0K_1)^{-1}$; $\tilde{R}_2 = A_1R_2 / A_0^+ + \tilde{g}(\tilde{g}K_2 + \nu_0K_1)^{-1}$;

величини K_i, $(i = 1,2,3,4)$ є відповідними значеннями функцій Крилова в перерізі плити $x = a$.

Останні залежності (13) дозволяють знайти величину області контакту та контактний тиск пружної основи на плиту, а також переміщення та напруження у тій частині плити, котра не контактує з пружною основою.

2. Випадок плоского деформованого стану для абсолютно жорсткої основи

Розглянемо випадок, коли основа, на яку частково опирається пластина, є абсолютно жорсткою. Для такої основи умови (4.6) спрощуються до вигляду

$$W(x,h) = 0 \text{ для } (x \le a) \text{ та } q^+(x) = 0 \text{ для } (x > a). \tag{14}$$

Тоді в умовах (7), (13) необхідно покласти параметр $k = 1$, де коефіцієнти: $D_0 = DA_0^+ - \left(\varepsilon_2 + 0,5A'\varepsilon_1h^2\right)$; $A_0^+ = \left(8 + B(h)\right)\dfrac{\alpha_0 h}{8E'}$, а вираз (4.7) для контактного тиску жорсткої основи на пластину у вигляді

$$A_0^+ p(x) = w(x) + 0.5A'h^2w'' - A_0^-q. \tag{15}$$

Розрахункове рівняння для визначення переміщень серединної поверхні плити, що частково лежить на абсолютно жорсткій основі, буде мати вигляд

$$w(x) = A_1 K_1(x) + A_2 K_2(x) + w^*, \tag{16}$$

де $w^* = \left(A_0^+ + A_0^-\right) q$ – частковий розв'язок рівняння (9), із урахуванням впливу абсолютно жорсткого фундаменту.

Трансцендентне рівняння для визначення величини області контакту $2a$, а також залежності для сталих A_1, A_2 залишаються у вигляді (13), із урахуванням попередніх зауважень для параметрів k, D_0 та A_0^+. Вираз для напруження нижньої поверхні плити записується у вигляді :

$$\sigma_x = \frac{3M_x}{2h^2} + \frac{1}{5(1-\nu)}\left(\frac{G}{G'} - \nu''\right)\left(q_2 - 0.5 q_2'' h^2 \frac{G'}{E'}\right). \tag{17}$$

У формулі (17) друга частина є уточненням, що, додатково до моделей згину пластин типу Тимошенка та Кірхгофа-Лява, враховує нелінійність зміни напружень та вплив поперечної анізотропії пластин. За формулами (15), (16) можна знайти також зміну величини області контакту та максимального контактного тиску в зоні області контакту для транстропного матеріалу.

Висновки. Отримано залежності, які дозволяють знайти величину області контакту і контактний тиск пружної основи та абсолютно жорсткого фундаменту на плиту. Знайдено переміщення та напруження у тій частині плити, котра не контактує з пружною чи жорсткою основами. Контактні переміщення і напруження на поверхні розділу знаходяться із урахуванням деформацій поперечного зсуву та обтиснення.

Список використаних джерел:

1. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
2. Essenburg F., Gulati S. T. On the contact of two axisymmetric plates. — Paper of Essenburg F., Gulati S. T. On the contact of two axisymmetric plates. —Paper of ASME,1965, N APMW-26 / Русский перевод; Эссенбург Ф., Гулати С.Т. О контакте двух осесимметричных пластинок. // Прикладная механика. – Серия Е. – 1966. – №2 – ИЛ. – С. 91–97.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М.. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983.-488 с.
4. Пистер К., Вестман Р. Изгиб пластинок на упругом основании //Труды Амер. Общ-ва инж. механиков. Сер.Е. Прикл. механика. 1962. №2.– С.165-171.
5. Хрджиянц И.Ф., И.Н. Векуа Плита на упругом основании // Расчет оболочек и пластин. Ростов -на-Дону, Изд-во РТУ, 1982.– С.50-58.
6. Власов В.З. Балки, пластины и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Госфизматлит, 1960. – 491 с.
7. Піскунов В.Г., Присяжнюк В.К., Марчук О.В. Задача контакту прямокутної плити жорсткого дорожнього одягу з напівпростором //Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. -К.:Будівельник, 1965. В.36. – С.7-12.
8. Піскунов В.Г., Шваб'юк В.І. Контактна задача для трансверсально-ізотропної плити на пружному півпросторі // Вісник Українського транспортного університету. – Київ: РВВ УТУ. 1999. Вип.3. – С.218–223
9. Швабюк В.И., Высоцкий Т.Н. Изгиб трансверсально-изотроп-ных плит на упругом основании. // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Львов.: Вища школа. 1983. № 173. – С.120-122.
10. Шваб'юк В.І. Згин круглої транстропної плити, частково опертої на пружну основу / В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко, О.В. Гуда // Міжвузівський збірник "Наукові нотатки". – Луцьк, 2011. – Вип. №31. – С. 421–425.

Стаття надійшла до редакції 25.04.2016.