УДК: 678.05+678.02

Є.В. Штефан, С.І. Блаженко, С.П. Ястреба
Національний університет харчових технологій

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПРУЖНО – В'ЯЗКО - ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ДИСПЕРСНИХ МАТЕРІАЛІВ

Розроблено методику отримання визначальних співвідношень, що описують процеси пружно – в'язко - пластичного деформування дисперсних матеріалів. Отримані рівняння мають вигляд, який дозволяє ефективно їх використовувати при створенні цифрових моделей на основі існуючих пакетів прикладних програм для скінчено-елементного аналізу рівноважних процесів деформування компактних матеріалів.

Ключові слова: *визначальні співвідношення, дисперсні матеріали, пружно – в'язко – пластичність.*

Е.В. Штефан, С.И. Блаженко, С.П. Ястреба

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УПРУГО – ВЯЗКО - ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДИСПЕРСНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Разработана методика получения определяющих соотношений для описания процессов упруго-вязко-пластического деформирования дисперсных материалов. Полученные уравнения имеют вид, который позволяет эффективно их использовать при создании цифровых моделей на основе существующих пакетов прикладных программ для конечно-элементного анализа равновесных процессов деформирования компактных материалов.

Ключевые слова*: определяющие соотношения, дисперсные материалы, упруго-вязко-пластичность.*

E. Shtefan, S. Blagenko, S. Yastreba

MATHEMATICAL SIMULATION OF ELASTIC-VISCOUS - PLASTIC DISPERSE MATERIALS DEFORMATION PROCESS

The creation methodology of constitutive equation for elastic - viscous - plastic dispersible materials deformation processes is worked out. The proposed equations is suitable for their effective practical using for digital models creation that based on existent software for the finite –element analysis of equilibrium processes of deformation of compact materials.

Keywords*: constitutive equation, dispersible materials, elastic – viscous - plasticity*

Постановка проблеми дослідження обумовлена необхідністю дослідження нерівноважних процесів деформування дисперсних матеріалів (ДМ). Використання методів математичного моделювання як інструментального ядра у сучасних технологіях проектування процесів та обладнання по обробленню ДМ неможливо без врахування структурно-механічних особливостей цих матеріалів і, в першу чергу, таких реологічних властивостей твердої фази, як пружність, пластичність, в'язкість та ін. Значною проблемою при отриманні адекватних результатів чисельного моделювання нерівноважних процесів деформування у технологіях механічного оброблення ДМ є відсутність визначальних співвідношень, що дозволяють враховувати структурно-механічні та реологічні параметри пружно – в'язко - пластичного пористого тіла. Крім того, для забезпечення ефективного практичного використання цих співвідношень доцільно отримувати їх у формі аналогічній відповідним рівнянням реологічної моделі пружно-пластичного компактного тіла.

Аналіз останніх досліджень і публікацій по даній проблемі свідчить, що на сьогоднішній день розроблено математичні моделі оброблення ДМ в галузі механіки ґрунтів, порошкової металургії та харчової промисловості [1-3]. Застосування таких моделей для аналізу процесів пресування, подрібнення, змішування ДМ з твердою фазою, механічна поведінка якої відповідає пружно – в'язко – пластичному режиму її деформування обмежується відсутністю адекватних та зручних для практичного використання визначальних співвідношень.

Постановка завдань. Для створення інструментальної системи призначеної для численного аналізу нарівноважних процесів деформування дисперсних матеріалів необхідно розвинути математичне крайової задачі механіки дисперсних середовищ у режимі пружно – в'язко – пластичного деформування твердої фази. Тому, **метою роботи** є розроблення методів отримання визначальних співвідношень, що описують процеси пружно – в'язко - пластичного деформування ДМ і можуть використовуватися паралельно з визначальними співвідношеннями рівноважної (пружно-пластичної) реологічної моделі у межах спільного програмного забезпечення при проведенні обчислювальних експериментів.

Основні результати дослідження.

Розглядаючи конкретну переробну технологію, приймаємо концепцію подання сировинних дисперсних мас як двохфазних сумішей пористої або зернистої твердої деформованої структури з рідиною чи газом, яку надалі будемо розглядати у вигляді моделі суцільного текучого середовища з приписуваними їй фізичними властивостями, які феноменологічно відображають молекулярну структуру середовища і внутрішні рухи речовини, що відбуваються в ній. Для описання механічної поведінки таких матеріалів необхідно використовувати поняття напружень, деформацій, щільності, а також швидкості зміни цих параметрів. Ці тензорні та скалярні характеристики мають локальну природу і визначаються за допомогою операцій граничного переходу, коли елементи простору (об'єми і поверхні) стягуються до точок (матеріальних). У традиційних моделях континуума точки ототожнюють з частками середовища (нескінченно малий об’єм матеріального континуума), а ті, у свою чергу, є елементарними носіями властивостей матеріалу [5]. Подібне ототожнення в дисперсній масі з твердою фазою рослинного походження ускладнюється через брак єдиної думки про те, що потрібно розуміти під часткою такого середовища.

Динамічні аспекти механічної поведінки ДМ регламентуються рівняннями балансу у формі закону збереження кількості руху з врахуванням закону збереження маси у межах представницького елементу (ПЕ) ДМ. При цьому для кожної з фаз ДМ рівняння відносного руху фаз представляються у вигляді [1]:

$$\alpha_1\left(\rho_1\frac{d\mathbf{u}}{dt}-\rho_2\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)-\nabla\boldsymbol{\sigma}^f-\frac{\mathbf{R}}{\alpha_2}-\alpha_1(\rho_1-\rho_2)\mathbf{G}=0\ , \qquad (1)$$

$$\rho_2\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla\mathbf{P}-\frac{\mathbf{R}}{\alpha_2}+\rho_2\mathbf{G}=0, \qquad (2)$$

де відповідно до конкретного механізму взаємопроникнення фаз дисперсної системи (фільтрація, дифузія і т.п.) враховується сила $\mathbf{R}$, яка пропорційна відносної середньої швидкості потоку газорідкої фази (аналог сили в’язкого опору):

$$\mathbf{R}=\frac{\mu}{a^2}\alpha_1\alpha_2(\mathbf{v}-\mathbf{u}), \qquad (3)$$

де μ - коефіцієнт динамічної в'язкості (кг с/м) для нестисливої рідини; а – узагальнений коефіцієнт, що враховує конфігурацію простору пор дисперсійного середовища.

Для формулювання визначальних співвідношення (між деформаціями та напруженнями) у межах ПЕ ДМ розроблена методика, яка складається з наступних етапів:

1. *Вводиться у розгляд два рівні структурного аналізу ДМ – мікроаналіз* (на основі розглядання окремого мікро-фрагменту (частки) дисперсної системи формулюються співвідношення щодо параметрів його механічної поведінки) та *макроаналіз,* де виконується осереднення параметрів по макрооб’єму ПЕ. Для цього розглянуто ідеалізований мікро-фрагмент ДМ - елементарний об’єм у вигляді кругового порожнього циліндра (рис.1). Матеріал даного циліндра (тверда фаза ДМ на мікро рівні) вважається нестисливим, а його вісь збігається з напрямком одного з головних компонентів тензора швидкостей деформації.

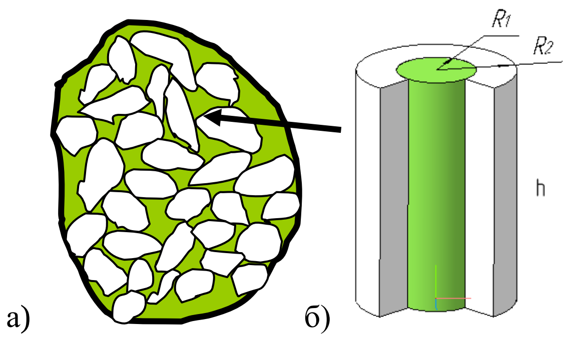

Рис.1. **Макро-фрагмент (а) та ідеалізований мікро-фрагмент (б) ДМ**

В області зайнятій циліндром $R_1 < r < R_2$; $0 < z < h$ розглядаються тільки дві компоненти швидкості переміщень точок матеріалу v_r і v_z, які задовольняють рівнянню нерозривності:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \qquad (4)$$

2. Для нівелювання результатів введеної ідеалізації *розглядається параметр швидкості локальної (на мікрорівні) енергії деформування твердої фази* з подальшим її осередненням по всьому об’єму циліндра:

$$Д=\sigma_0\gamma_0\cdot\left(\frac{1}{\alpha_1}\sqrt{\frac{\psi e^2}{\gamma_0^2}+\frac{\varphi\Gamma^2}{\gamma_0^2}}\right)^{n+1}+\sigma_T\gamma_0\frac{1}{\alpha_1}\sqrt{\frac{\psi e^2}{\gamma_0^2}+\frac{\varphi\Gamma^2}{\gamma_0^2}}\ . \tag{5}$$

При виведенні (5) враховані параметри дисперсності матеріалу [5,7]: $\alpha_2=1-\alpha_1=\frac{R_1^2}{R_2^2}$, $\varphi=\alpha_1$; $\psi=\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}$, а також узагальнена реологічна модель матеріалу твердої фази $\sigma=\sigma_0(\frac{\gamma'}{\gamma_0})^n+\sigma_т$, де $\sigma_т$ –границя текучості, $\gamma=\sqrt{\frac{1}{2}\frac{R_2^4}{r^4}e^2+\Gamma^2}$ - параметр інтенсивності швидкостей деформацій ПЕ, σ_0, γ_0, n – константи апроксимації експериментальних даних; е, Г- перший та другий інваріанти тензора напружень; $w=\frac{1}{\alpha_1}\sqrt{\psi e^2+\varphi\Gamma^2}$.

3. На основі (5) *формулюється загальна структура визначальних співвідношень* через компоненти тензорів напружень σ_{ij} і швидкостей деформацій e_{ij} по аналогії з [5,6]:

$$\sigma_{ij}=\left(\frac{\sigma_0\left(w/\gamma_0\right)^n+\sigma_T}{w}\right)\left[\varphi e_{ij}+\left(\psi-\frac{1}{3}\varphi\right)e\,\delta_{ij}\right], \tag{6}$$

4. *Конкретизуються співвідношення (6) відповідно до обраної моделі матеріалу.* Згідно принципу дисипативного детермінізму для моделі пружно - в'язко - пластичного матеріалу достатньо задати параметри: вільну енергію Гельмгольца Δ, яка визначає зворотну складову механічної потужності деформування

$$W^0=\frac{\partial\Delta}{\partial e^e}e^e \tag{7}$$

разом з тензором швидкостей зворотної (пружної) деформації $\mathbf{e}^e$; узагальнений дисипативний потенціал $Д_м$ зі скалярною функцією λ(Ф), що визначає механічну дисипацію енергії (у нерівності Клаузіуса-Дюгема):

$$Д_м=\lambda(\Phi)\cdot\Phi=\sigma_{ij}\cdot e^н{}_{ji}\ . \tag{8}$$

З рівняння (7) слідують визначальні співвідношення для пружного режиму деформування ПЕ:

$$\dot\sigma_{ij}=D^e_{ijkl}\ e^e_{kl}\ , \tag{9}$$

де D^e_{ijkl} компоненти тензора пружних властивостей матеріалу твердої фази.

Для забезпечення загального вигляду визначальних співвідношень у формі (6) функціонал Ф, що визначає у просторі напружень границю зворотного і незворотного станів макро - об'єму ДМ, слід представити у вигляді [5,6]:

$$\Phi(p,\tau,\alpha_1,\kappa,t)=\frac{\tau^2}{\varphi}+\frac{p^2}{\psi}-\kappa(t)=0\,, \tag{10}$$

де P - рівень гідростатичного тиску в дисперсному середовищі; τ^2 - другий інваріант девіатора ефективних напружень; к(t) - визначає характерний розмір поверхні навантаження у процесі деформування. З врахуванням (8,9) отримаємо визначальні співвідношення незворотного режиму деформування ПЕ ДМ:

$$\sigma_{ik}=\frac{1}{\lambda(\Phi)}\left[\varphi e^н_{ik}+\left(\psi-\frac{1}{3}\varphi\right)e^н\delta_{ik}\right]. \tag{11}$$

Розглядаючи процес нерівноважного незворотного деформування, вважаємо, що повні ефективні напруження $\boldsymbol{\sigma}$, можуть бути представлені у вигляді суми рівноважної $\boldsymbol{\sigma}^p$ і нерівноваженої складових $\boldsymbol{\sigma}^v$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^p + \boldsymbol{\sigma}^v. \tag{12}$$

Особливістю даної моделі є те, що поняття рівноважної пружно-в'язко-пластичної течії матеріалу виявляються альтернативним його пружно-пластичному деформуванню.

Рівноважну складову тензора напружень (12) визначаємо на підставі (11):

$$\sigma_{ik}^{p} = \frac{\sqrt{\rho}\kappa(t)}{\sqrt{\varphi\gamma^2 + \psi e^2}}\left[\varphi e_{ik}^{н} + \left(\psi - \frac{1}{3}\varphi\right)e^{н}\delta_{ik}\right], \tag{13}$$

де γ - другий інваріант девіатора швидкостей деформації e_{ik}. У свою чергу для нерівноважної складової тензора напружень на підставі (11) маємо:

$$\sigma_{ik}^{v} = 2\eta\left[\varphi e_{ik}^{н} + \left(\psi - \frac{1}{3}\varphi\right)e^{н}\delta_{ik}\right], \tag{14}$$

де η – коефіцієнт в'язкості твердої фази матеріалу.

Рівняння (12) з врахуванням (13) та (14) дозволяє визначити незвротну складову швидкості деформування ДМ:

$$e_{ik}^{н} = \frac{\sqrt{\varphi\gamma^2 + \psi e^2}}{\varphi\psi\left(\sqrt{\rho}\kappa + 2\eta_k\sqrt{\varphi\gamma^2 + \psi e^2}\right)}\left[\varphi\sigma_{ik} + \left(\frac{1}{3}\varphi - \psi\right)p\delta_{ik}\right], \tag{15}$$

або у матричному вигляді

$$\{e^{н}\} = [Z^{н}]\ \{\sigma\}, \tag{16}$$

де $[Z^{н}]$ матриця, компоненти якої визначають параметри в'язко – пластичної моделі ДМ.

5. *Формулюються визначальні співвідношення для пружно - в'язко - пластичного режиму деформування твердої фази матеріалу*. Для цього використовуємо розкладання вектора $\{e^{н}\}$ у (15) в ряд Тейлора по часовому аргументу $t_n < t < t_n + \Delta t_n$ в околиці моменту t_n в припущенні про малість Δt_n:

$$\left\{e^{н}\right\}_{n+1} = \sum_{n=0}^{m}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left\{e^{н}\right\}\Big|_{t_n}\frac{(\Delta t_n)^m}{m!} + 0(\Delta t_n)^{m+1} \approx \left\{e^{н}\right\}_n + \left(\left[\dot{Z}^{н}\right]_n\{\sigma\}_n + \left[Z^{н}\right]_n\{\dot{\sigma}\}_n\right)\Delta t_n. \tag{17}$$

Враховуючі адитивне розкладання швидкості деформування $e = e^e + e^н$ та лінійну інтерполяцію (16) на часових шарах t_n та t_{n+1} $\left\{e^{н}\right\} = (1-\overline{\omega})\left\{e^{н}\right\}_n + \overline{\omega}\left\{e^{н}\right\}_{n+1}$, з (9) слідують співвідношення у матричному вигляді:

$$\{\dot{\sigma}\} = \left[D^{evp}\right]_n\{e\} - \{VP\}_n, \tag{18}$$

де $\left[D^{evp}\right]_n$ - конституціональна матриця пружно-в'язко-пластичності, $\{VP\}$ - вектор „реологічного" корегування напружень. Отримано конкретний вигляд визначальних співвідношень (18) для прийнятих моделей деформування твердої фази, а саме: 1) *пружно-пластичної (рівноважної)* у циліндричній системі координат:

$$\left[D^{ep}\right]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}-K_f\begin{bmatrix}S_r^2 & S_rS_z & S_rS_\alpha & S_r\tau_{rz}\\ S_zS_r & S_z^2 & S_zS_\alpha & S_z\tau_{rz}\\ S_\alpha S_r & S_\alpha S_z & S_\alpha^2 & S_\alpha\tau_{rz}\\ \tau_{rz}S_r & \tau_{rz}S_z & \tau_{rz}S_\alpha & \tau_{rz}^2\end{bmatrix}-$$
$$-K_S\begin{bmatrix}2S_r & S_r+S_z & S_r+S_\alpha & \tau_{rz}\\ S_z+S_r & 2S_z & S_Z+S_\alpha & \tau_{rz}\\ S_\alpha+S_r & S_\alpha+S_z & 2S_\alpha & \tau_{rz}\\ \tau_{zr} & \tau_{zr} & \tau_{zr} & 0\end{bmatrix}-K_p\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad (19)$$

де $K_f=\dfrac{27G^2\psi^2}{9(\xi+3G)\psi^2\tau^2+\left(2\xi+\dfrac{3E}{1-2\nu}\right)\varphi^2P^2}$ - коефіцієнт пластичного формоутворення заданого об’єму ДМ; $K_S=\dfrac{9GPG\psi\varphi}{(1-2\nu)\left[9(\xi+3G)\psi^2\tau^2+\left(2\xi+\dfrac{3E}{1-2\nu}\right)\varphi^2P^2\right]}$ - коефіцієнт пластичної об’ємно зсувної деформації; $K_p=\dfrac{3P^2E^2\varphi^2}{(1\text{-}2\nu)^2\left[9(\xi+3G)\psi^2\tau^2+\left(2\xi+\dfrac{3E}{1\text{-}2\nu}\right)\varphi^2P^2\right]}$ - коефіцієнт пластичної зміни об’єму ДМ, S_i – компоненти девіатора тензора напружень; ξ – коефіцієнт пластичної жерсткості твердої фази матеріалу. Як видно з (19) у випадку $K_f=K_s=K_p=0$ маємо матрицю пружних властивостей $[D^e]$ твердої фази ДМ.

2) *пружно - в’язко - пластичної (нерівноважної)* у циліндричній системі координат:

$$\left[D^{evp}\right]_n=\left[\left[D^e\right]^{-1}+\left[V\right]_n\right]^{-1}, \quad (20)$$

де

$$[V]_n=\overline{\omega}\,\Delta t_n\left(\frac{\sqrt{\varphi\gamma^2+\psi e^2}}{\left(\sqrt{\rho}\kappa+2\eta\sqrt{\gamma^2+\psi e^2}\right)}\right)\begin{bmatrix}\frac{2}{3\varphi}+\frac{1}{3\psi} & -\frac{1}{3\varphi}+\frac{1}{9\psi} & -\frac{1}{3\varphi}+\frac{1}{9\psi} & 0\\ & \frac{2}{3\varphi}+\frac{1}{3\psi} & -\frac{1}{3\varphi}+\frac{1}{9\psi} & 0\\ & & \frac{2}{3\varphi}+\frac{1}{3\psi} & 0\\ \text{симетрично} & & & \frac{1}{\varphi}\end{bmatrix}$$

Система рівнянь (1)-(20) доповнюється завданням початкових та граничних умов, що відображають специфіку конкретної технологічної операції оброблення ДМ.

Висновки. Представлена система рівнянь складає основу крайової задачі механіки дисперсних систем, що дозволяє при створенні математичної моделі деформаційних процесів врахувати структурно-механічні та реологічні параметри твердої фази матеріалу. Форма отриманих визначальних співвідношень дозволяє ефективно їх використовувати для скінченно-елементного аналізу механічної поведінки дисперсних матеріалів на основі існуючих добре апробованих цифрових моделей рівноважних (пружно-пластичних) процесів деформування компактних матеріалів.

Список використаних джерел:

1. Штефан Є. В. Построение аналитической модели процессов деформирования дисперсных материалов / Є. В. Штефан, С. И. Блаженко // Межд. период. сб. научн. тр. «Обработка дисперсных материалов и сред. Теория, исследования, технологии, оборудование». – О.: НПО «ВОТУМ», 2003. - Выпуск № 13. – с. 26 - 33.

2. Штефан, Е. В. Інформаційні технології проектування обладнання для мундштучного пресування керамічних мас / Є. В. Штефан // зб. наук. пр. ВАТ «УкрНДІВогнеупорів ім.. А. С. Бережного».- 2010. - № 110. - с. 593 - 598.

3. Штефан Є. В. Розроблення інформаційних технологій проектування машин та апаратів харчових виробництв / Є. В. Штефан // Наук.пр. ОНАХТ. – О.: 2006. - Вип. 28. - Т. 2. - с. 222 - 223.

4. Штефан Є.В. Експериментальний метод дослідження реологічних властивостей органічних матеріалів - відходів зернової промисловості / Є.В. Штефан, Д.В. Риндюк // Наукові праці НУХТ.–2008.–№25,42.–С.106-108.

5. Штерн М.Б., Развитие теории прессования порошков и механики деформирования пористих тел // Порошковая металлургия. – 1992. – № 9. – с. 15-29

6. Штерн М.Б., Рудь В.Д. Механічні та комп'ютерні моделі консолідації гранульованих середовищ на основі порошків металів і кераміки при деформуванні та спіканні: Монограія. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2009. – 287с.

7. M.Shtern, O.Mikhailov Defects Formation in Die Compaction: Prediction and Numerical Analysis - in Proceeding of Powder Metalurgy European Congress, 22 - 24 October, 2001, Nice, France, Vol.3, 50-57

Рецензенти:

Крищук Микола Георгійович, професор , д.т.н., професор кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів НТУУ «КПІ»

Бовсуновський Анатолій Петрович, професор , д.т.н., професор кафедри машинобудування, стандартизації та сертифікації обладнання.

Стаття надійшла до редакції 22.04.2016.