

А.В. Новицкий, И.А. Таран, М.Н. Трубицин

Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет»

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ
МЕТОДАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Приведены результаты разработки алгоритма решения задачи определения параметров системы управления запасами при наличии произвольного количества ограничений на размер партии. Предложена методика выбора нужного экстремального решения на основе минимизации разницы величин глобального и локального экстремумов.

Ключевые слова: управление запасами, минимизация затрат, размер партии.

О.В. Новицкий, І.О. Таран, М.М. Трубицин

Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет»

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ ПРИ НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ
МЕТОДАМИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

Наведено результати розробки алгоритму розв'язання задачі визначення параметрів системи управління запасами при наявності довільної кількості обмежень на розмір партії товару. Запропонована методика вибору потрібного екстремального розв'язання на основі мінімізації різниці величин глобального та локальних екстремумів.

Ключові слова: управління запасами, мінімізація витрат, розмір партії.

A. Novytski, I. Taran, M. Trubytsyn

State Higher Educational Institution "National Mining University"

**SOLVING THE PROBLEM OF INVENTORY MANAGEMENT IN THE PRESENCE OF
RESTRICTION METHODS OF ANALYTICAL GEOMETRY.**

The results of solution algorithm development problem of determining the parameters of inventory control in the presence of any number of restrictions on the size of the consignment. The method of selecting the desired extreme solutions by minimizing the difference values of global and local extremes.

Keywords: inventory management, cost minimization, once the party action.

Постановка проблеми. Управление запасами подразумевает, в первую очередь, определение размеров теоретической величины запасов для последующего прогнозирования, мониторинга и нахождения рационального состояния параметров логистических систем и их компонент. Учитывая многократное и специфическое влияние объемов запасов на формирование конечной стоимости каждого вида товара определение рациональных величин запасов является, безусловно, **актуальной задачей**. Разнообразие накладываемых ограничений на область определения целевой функции (ООЦФ) в пространстве рассматриваемых объемов товаров q_1, q_2, \dots, q_n (n – размерность пространства или количество видов товаров) может привести к сложному математическому описанию (многосвязность, не выпуклость и др.) этой области. К тому же, задача сильно усложняется при больших значениях n и тогда, для получения решения вынужденно применяются различные итерационные методы (например, метод неопределенных множителей Лагранжа) [1]. Обоснование шагов этих итерационных методов базируется на известных принципах аналитической геометрии, что хорошо демонстрируется и проверяется при $n=2$, с дальнейшим распространением апробированного алгоритма шага на произвольное n .

Для надежной работы такого алгоритма к нему предъявляются следующие требования: наибольшая простота; наглядность; однозначность получаемого решения; отсутствие итераций разветвлений. В связи с выше изложенным, **целью** настоящей работы является разработка не итерационного, линейного, однозначного алгоритма определения двух типов запасов при одном линейном ограничении на ООЦФ. При этом **идея работы** основывается на применении методов аналитической геометрии с последующим перебором найденных экстремумов.

Постановка задачи: найти оптимальное управление двумя видами запасов ($n=2$) минимизировав затраты (хранения с учетом партионности) на основании линейного ограничения на их объемы. Аналитическая запись задачи

$$Q = \frac{\lambda_1 C s_1}{q_1} + \frac{P_1 C_1}{2} q_1 + \frac{\lambda_2 C s_2}{q_2} + \frac{P_2 C_2}{2} q_2 = \sum_{i=1,2} \left(\frac{a_i}{q_i} + b_i q_i \right) \rightarrow \min ,$$

$$w_1q_1 + w_2q_2 \leq 2V \Rightarrow \frac{q_1}{2Vw_1^{-1}} + \frac{q_2}{2Vw_2^{-1}} \leq 1,$$

где $V=14000 \text{ м}^3$ – объем склада. Расшифровка и значения остальных параметров рассматриваемого в работе примера приведены в табл. 1, где также даны величина Q^* и координаты $q_{1,2}^*$ глобального экстремума (минимума), определенного по формуле Уилсона [2].

Таблица 1

Описание и значения исходных величин рассматриваемого примера

Вид товара i	Спрос на товар, ед.тов. λ_i	Затраты на одну партию товара, грн., Cs_i	Стоимость единицы товара, грн., C_i	Издержки хранения в долях стоимости товара, P_i	Объем склада, занимаемый единицей товара, м^3 , w_i	Оптимальный размер каждой партии товара, ед.тов., $q_i^* = \sqrt{\frac{2\lambda_i Cs_i}{P_i C_i}}$
1	200	100	12	0,005	5	816,497
2	400	25	7		35	755,929
Оптимальное (\min) значение целевой функции, грн.,					$Q^* = \sum_{i=1,2} \sqrt{2P_i C_i \lambda_i C s_i} = 75,447$	

В нашем случае $w_1 \cdot q_1^* + w_2 \cdot q_2^* = 30540 > 2 \cdot 14000$, т.е. точка глобального минимума лежит вне ООЦФ, поэтому введем последовательные обозначения

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i C s_i \\ 0,5 \cdot P_i C_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 2V \cdot \begin{bmatrix} w_1^{-1} \\ w_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

и получим математическую постановку задачи с плоской ООЦФ в традиционных обозначениях. Первый вариант получения разрешающего уравнения; из системы:

$$\begin{cases} Q = \frac{a_1}{x} + x b_1 + \frac{a_2}{y} + y b_2 \rightarrow \min \\ y \leq B \left(1 - \frac{x}{A} \right) \end{cases}, \quad x, y \geq 0. \quad (1)$$

Рассмотрев предельный случай $y=B \cdot (1-x \cdot A^{-1})$ и исключив ординату y из уравнения (1) получим кубическое уравнение для определения абсцисс общих точек (точек пересечения)

$$\frac{1}{A} \left(\frac{b_2 B}{A} - b_1 \right) x^3 + \frac{1}{A} (b_1 A - 2b_2 B + Q) x^2 + \left(\frac{a_2}{B} + b_2 B - \frac{a_1}{A} - Q \right) x + a_1 = 0 \quad (2)$$

Для определения возможного расположения трех потенциальных точек пересечения оценим графическими средствами MathCad вид поверхности ЦФ, рис. 1.

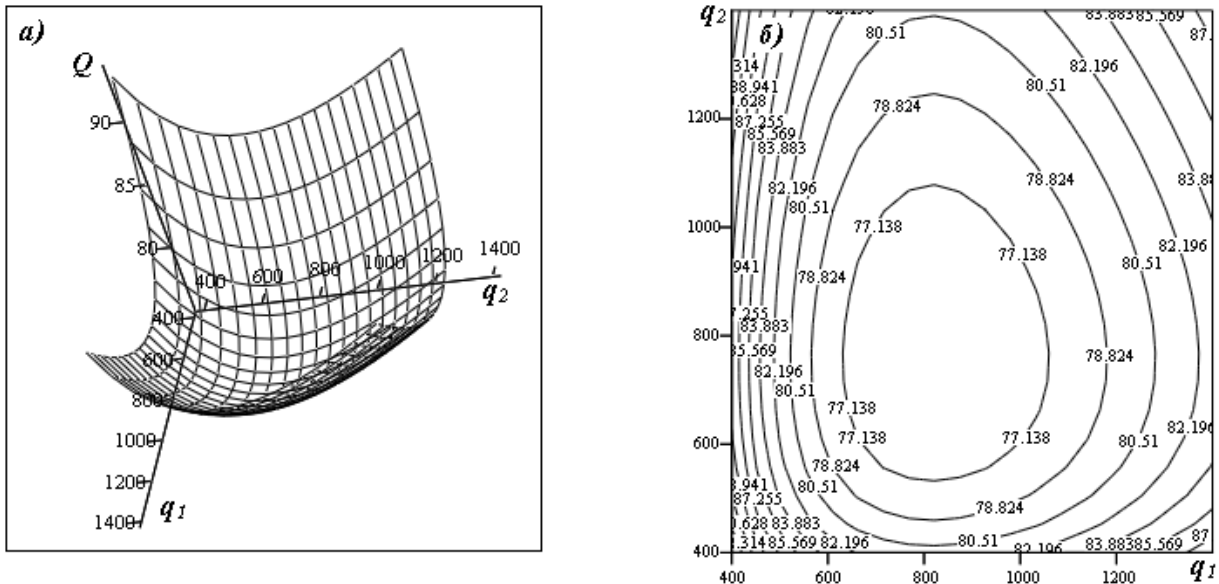


Рис. 1 – Варианты изображения поверхности ЦФ затрат рассматриваемого примера:
 а) трехмерное изображение поверхности;
 б) линии уровня Q поверхности

Как видно из последнего рисунка, пересечение граничной прямой $y=B \cdot (1-x \cdot A^{-1})$ с замкнутой выпуклой линией уровня Q возможно в дух точек первого квадранта ($x, y \geq 0$) и одной точкой других квадрантов. Последняя точка в силу положительности искомых решений нас не интересует. Кубическое уравнение (2) будет иметь три действительных корня. В случае касания граничной прямой линии уровня Q два корня из указанной тройки должны совпасть. Последовательно преобразовав (2) к каноническому и приведенному виду

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0 = x^3 + \beta \alpha^{-1} x^2 + \gamma \alpha^{-1} x + \delta \alpha^{-1} = x^3 + r \cdot x^2 + s \cdot x + t = Y^3 + pY + q = 0,$$

где: $\alpha = b_2 B A^{-1} + b_1$; $\beta = A b_1 - 2 B b_2 + Q$; $\gamma = A B b_2 + A B^{-1} a_2 - a_1 - Q A$; $\delta = a_1 A$;
 $r = \beta / \alpha$; $s = \gamma / \alpha$; $t = \delta / \alpha$; $Y = x + r / 3$; $p = (3s - r^2) / 3$; $q = 2r^3 / 27 - rs / 3 + t$,

и используя затем условие кратности корней - нулевой дискриминант уравнения

$$D = (p/3)^3 + (q/2)^2 = 0,$$

получим, в силу линейности функций $p(Q)$ и $q(Q)$, новое кубическое уравнение для нахождения трех значений Q . Выбор нужного действительного корня нового уравнения осуществляется: во-первых - по знаку; во-вторых – по минимальному удалению от точки Q^* .

Рассмотрим второй вариант разрешающего уравнения алгоритма. Общее уравнение касательной к линии уровня Q , в точке $(x_k; y_k)$ как к кривой, заданной неявной функцией

$$F(x, y) = a_1 y + b_1 x^2 y + a_2 x + b_2 x y^2 - Q x y = 0$$

имеет вид $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_k (y - y_k) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_k (x - x_k)$, что совместно с предельным положением линейного

ограничения дает ту же систему уравнений (1) и разрешающее уравнение (2). Таким образом, второй вариант определения положения координат точки касания $(x_k; y_k)$ полностью совпадает с первым, и сложность разрабатываемого алгоритма сравнима с сложностью решения кубического уравнения и выбора нужного корня. Графическое решение рассматриваемого примера показано на рис.2.

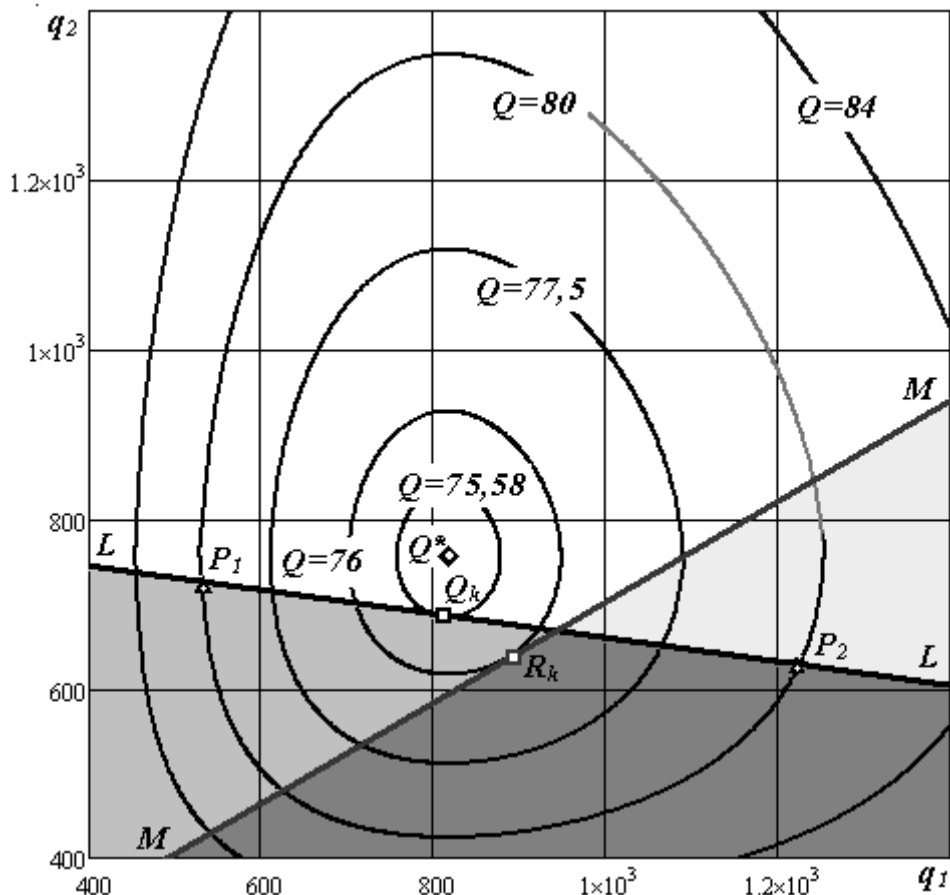


Рис. 2 – Графическое решение рассматриваемого примера (табл.1).
 LL, MM – граничные прямые; Q – линии уровня; P_{1,2} – точки пересечения;
 Q_k, R_k – искомые точки касания; Q* – точка глобального экстремума.

С целью повышения надежности разрабатываемого алгоритма изменим последовательность нахождения неизвестных величин с $Q_k \rightarrow x_k \rightarrow y_k$ на $x_k \rightarrow y_k \rightarrow Q_k$, т.е. рассмотрим третий вариант составления алгоритма решаемой задачи. Для чего из дважды полученного кубического уравнения (2) выделим функцию уровня через абсциссу точки касания

$$Q(x) = \left[\left(\frac{b_2 B}{A^2} - \frac{b_1}{A} \right) x^3 + \left(b_1 - \frac{2b_2 B}{A} \right) x^2 + \left(\frac{a_2}{B} + b_2 B - \frac{a_1}{A} \right) x + a_1 \right] \cdot \left[x \left(1 - \frac{x}{A} \right) \right]^{-1} \quad (3)$$

Из условия задачи и геометрических соображений следует, что $Q(x_k) = \min$, и следовательно, $dQ(x)/dx = 0$. Выполнив соответствующие преобразования, получим уравнение уже четвертой степени для определения x_k

$$\frac{1}{A} \left(b_1 - \frac{Bb_2}{A} \right) x^4 - 2 \left(b_1 - \frac{Bb_2}{A} \right) x^3 + \left(Ab_1 - Bb_2 + \frac{a_2}{B} - \frac{a_1}{A} \right) x^2 + 2a_1 x - Aa_1 = 0. \quad (4)$$

Анализ корней кубической резольвенты приведенного уравнения позволяет заключить, что в рассматриваемом случае (4) имеет пару комплексно сопряженных $(5,609 \pm 1,61 \cdot i) \cdot 10^3$ и пару действительных корней, их нахождение графическим способом показано на рис.3.

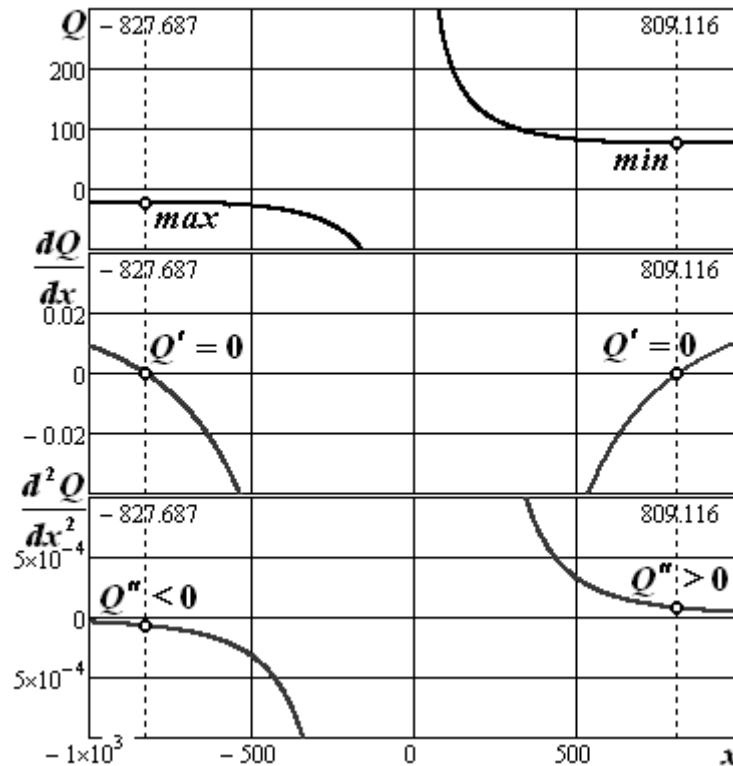


Рис. 3 – Графическое решение и выбор подходящего корня $x_k=809,116$ уравнения (4)

После определения $x_k=q_1^*$ последовательно находим: $y_k=q_2^*=B \cdot (1-x_k \cdot A^{-1})=684,412$ и $Q_k=75,58$. Поставленная задача решена, алгоритм работает надежно не смотря на большой разброс (~ 10 порядков) коэффициентов уравнений, что можно считать вполне удовлетворительным результатом исследований. В случае наложения нескольких линейных ограничений, рис.2, ООЦФ остается выпуклой и тогда необходимо проверить не являются ли одновременно обе граничные прямые LL и MM касательными к одной линии уровня Q_k . Если нет, то точка пересечения (как общая точка) этих линий будет искомым решением.

Выводы

1. Разработан и проверен линейный, не итерационный, надежный оптимизационный алгоритм решения задачи управления запасами при ограничениях на объем склада.
2. Алгоритм легко адаптируется для n -мерного пространства (n типов товаров) и единообразно работает с любым количеством накладываемых линейных ограничений.
3. Предложена методика выбора нужного экстремального решения на основе минимизации разницы величин глобального экстремума Q^* и найденных локальных Q_k .
4. Показана полная идентичность первых двух вариантов вывода разрешающего кубического уравнения и рациональный путь проведения решения за счет незначительного усложнения алгоритма – решения уравнения четвертой степени вместо кубического.

Литература

1. Хедли Дж. Анализ систем управления запасами / Дж. Хедли, Т. Уайтин. – М.: Наука, 1964. – 512 с.
2. Лукинский В.С. Управление запасами: аналитическое решение многопродуктовых задач / В.С. Лукинский. М.: Финансы и статистика, 2005. – 222 с.

Стаття надійшла до редакції 27.04.2016