УДК 629.111

Б.І. Сокіл, Р.А. Нанівський, М.Б. Сокіл
Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного
Національний університет "Львівська політехніка"

РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ ПІДРЕСОРЕНОЇ ЧАСТИНИ КОЛІСНИХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ ІЗ НЕКОНСЕРВАТИВНОЮ СИЛОВОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ СИСТЕМИ ПІДРЕСОРЮВАННЯ

Розроблено методику дослідження резонансних коливань підресореної маси колісних транспортних засобів із нелінійною неконсервативною силовою характеристикою системи підресорювання. В її основу покладено основні ідеї методів збурень у поєднанні із спеціальними періодичними Ateb-функціями. Отримано умову існування резонансних коливань та залежності, які описують визначальні їх параметри.

Ключові слова: *підресорена маса, амплітуда, частота коливань, явище резонансу.*

Б.И. Сокил, Р.А. Нанивский, М.Б. Сокил
Национальная академия сухопутных войск имени гетмана Петра Сагайдачного
Национальный университет "Львовская политехника "

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДРЕССОРЕННОЙ ЧАСТИ КОЛЕСНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ С НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ СИЛОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ СИСТЕМЫ ПОДРЕССОРИВАНИЯ

Разработана методика исследования резонансных колебаний подрессоренной массы колесных транспортных средств с нелинейной неконсервативной силовой характеристикой системы подрессоривания. В ее основу положены основные идеи методов возмущений в сочетании со специальными периодическими Ateb-функциями. Получено условие существования резонансных колебаний и зависимости, описывающие определяющие их параметры.

Ключевые слова: *подрессоренная масса, амплитуда, частота колебаний, явление резонанса.*

B. Sokil, R. Nanivskyi, M. Sokil
The National Academy of the Army named after Hetman Sahaidachny
National University "Lviv Polytechnic"

RESONANT VIBRATIONS OF SPRUNG PART OF WHEELED VEHICLES WITH THE CONSERVATIVE FORCE CHARACTERISTIC OF THE SPRUNG SYSTEM

It is developed the research methodology of resonant vibrations of sprung mass of the wheeled vehicles with nonlinear non-conservative force characteristic of the sprung system.It is based on the main ideas of perturbation method in combination with special periodic Ateb-functions.It is obtained the condition for the existence of resonant vibrations and dependences that describe their defining parameters.

Keywords: *sprung mass, amplitude, vibration frequency, the phenomenon of resonance.*

Актуальність та огляд основних результатів. Найбільш небезпечними випадками руху колісних транспортних засобів **(**КТЗ) вздовж шляху із нерівностями є ті, які викликають резонансні коливання підресореної маси (ПМ) чи інших систем. Такі процеси характеризуються значним ростом амплітуди коливань, а значить і динамічними навантаженнями, як на людей, що перевозяться, так і на окремі вузли чи системи, зменшуючи тим самим ресурс їх експлуатації. Резонансні коливання ПМ КТЗ за умови лінійної характеристики пружних амортизаторів ґрунтовно розглядались у низці робіт [1-4]. Однак, пружні амортизатори із лінійною та навіть квазілінійною характеристиками відновлюючої сили не забезпечують належної комфортабельності перевезення людей чи транспортування чутливих щодо коливань вантажів [5; 6]. В той же час, дослідження динаміки КТЗ із нелінійною характеристикою відновлюючої сили від деформації (прогресивної чи регресивної), а також її швидкості руху не знайшло належного розвитку. Це зв'язано із значними математичними труднощами – побудовою та дослідженням розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, які їх описують. Лише в окремих роботах [5-7] проводились аналітичні дослідження коливань ПМ ТЗ за умови, що відновлююча сила описується близькою до степеневої функцією. Із нелінійною залежністю пружної сили амортизаторів від деформації зв'язана низка особливостей коливань підресореної частини – залежність частоти власних коливань від амплітуди, а значить і резонансні процеси. Саме дослідження останніх, за умови, що відновлююча сила амортизаторів залежить від їх деформації та її швидкості, є предметом розгляду роботи.

Постановка задачі та методика її розв'язування. У роботі розглядаються вертикальні коливання підресореної частини ТЗ за умови, що відновлююча сила пружних амортизаторів F визначається деформацією Δ та швидкістю деформації $\dot{\Delta}$ останніх, а сила опору демпферних пристроїв R – лише швидкістю деформації. Приймається, що вказані сили носять нелінійний характер і описуються залежностями

$$F\left(\Delta,\dot{\Delta}\right)=\left(\alpha_1+\alpha_2\dot{\Delta}^{\nu_1}\right)\Delta^{\nu_2+1}\ , \tag{1}$$

$$R\left(\dot{\Delta}\right)=\alpha_3\dot{\Delta}^{s}\ , \tag{2}$$

де $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\nu_1,\nu_2,s-$ сталі, які задовольняють певним умовам, на яких зупинимось нижче.

На рис.1 представлено залежність відновлюючої сили від деформації Δ та швидкості деформації $\dot{\Delta}$; ν_1=-2/5; ν_2=4/3; $F_1=P-\alpha_1\Delta^{\nu_2+1}$.

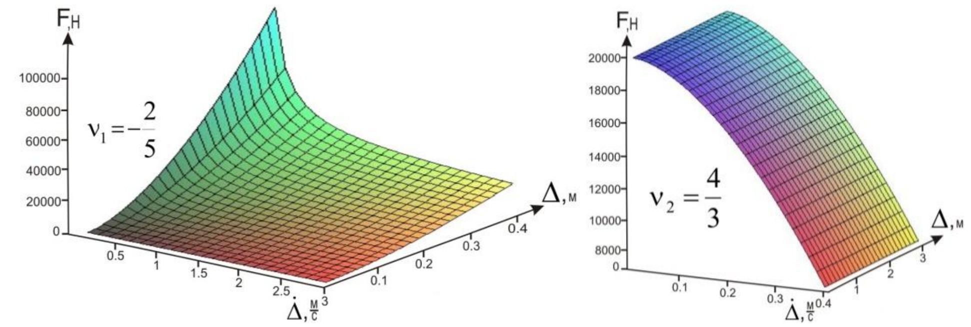


Рис. 1. – **Залежність відновлюючої сили від деформації Δ та швидкості деформації $\dot{\Delta}$ за різних значень параметрів ν_1 і ν_2**

Вважатимемо, що транспортний засіб рухається вздовж шляху із впорядкованою системою нерівностей, які описуються гладкою періодичною функцією $\hat{z}=H\sin 2\pi x/L$, де $H-$ амплітуда нерівності, $L-$ віддаль між гребнями нерівностей. У випадку сталої швидкості V руху КТЗ вказані нерівності представляються функцією від часу у вигляді $\hat{z}=H\sin 2\pi Vt/L$. Стосовно системи відліку, початок котрої співпадає із положенням статичної рівноваги $F\left(\Delta_{cm.},0\right)=Mg$ ($M-$ маса підресореної частини, $\Delta_{cm.}$–статична деформація амортизаторів), диференціальне рівняння вертикальних коливань ПМ набуває вигляду

$$m\ddot{z}+\left(\alpha_1+\alpha_2\left(\frac{dz}{dt}-\dot{\hat{z}}\right)^{\nu_1}\right)\left(z+\Delta_{cm.}-\hat{z}\right)^{\nu_2+1}=P-\alpha_3\left(\frac{dz}{dt}-\dot{\hat{z}}\right)^{s}. \tag{3}$$

Примітки.

1. За вказаної моделі відновлюючої сили амортизаторів статична деформація визначається із умови $\alpha_1\Delta_{cm.}^{\nu_2+1}=Mg\rightarrow\Delta_{cm.}=\left(Mg/\alpha_1\right)^{1/(\nu_2+1)}$;

2. Диференціальне рівняння (3) буде описувати коливальний процес підресореної частини, якщо функція $F\left(\Delta,\dot{\Delta}\right)$ є непарною за деформацією та парною за швидкістю деформації, а $R\left(\dot{\Delta}\right)$– непарною. Виходячи із наведеного, нижче будемо вважати, що $\nu_1=\frac{2(r_1-q_1)}{2q_1+1}$, $\nu_2+1=\frac{2q_2+1}{2q_2+1}$, $s=\frac{2q_1+1}{2q_2+1}$ $r_i,q_i=0,1,2,\ldots$, $i=1,2$.

3. У роботі розглядається випадок малої сили опору, тобто $\max\left|F\left(\Delta,\dot{\Delta}\right)\right|>>\max\left|R\left(\dot{\Delta}\right)\right|$ та $\max\left|\alpha_2\dot{\Delta}^{\nu_1}\Delta^{\nu_2+1}\right|>>\max\left|\alpha_1\Delta^{\nu_2+1}\right|$ (домінуючу роль відіграє неконсервативна складова відновлюючої сили).

Загалом наведене дозволяє використати на базі спеціальних Ateb- функцій [8;9]загальні ідеї методу Ван-дер-Поля [10]. Використання останнього найбільш ефективне у випадку, коли незбурений рух вдається описати за допомогою аналітичних функцій. Для випадку, що розглядається, це власні коливання підресореної частини, яким відповідає диференціальне рівняння

$$m\ddot{z}^{*}+\alpha_2\left(\frac{dz^{*}}{dt}\right)^{\nu_1}\left(z^{*}\right)^{\nu_2+1}=0\ , \tag{4}$$

де $z^* = z - \Delta_{cm.}$. Вони описуються за допомогою періодичних Ateb-функцій у вигляді $z^*(t) = aca\left(\nu_2 + 1, \frac{1}{1-\nu_1}, \omega(a)t + \theta)\right)$, де a, θ – для незбуреного випадку сталі параметри, а функція $\omega(a)$ приймає значення $\omega(a) = \frac{\nu_2 + 2}{2}\left(\frac{\alpha_2}{m}\frac{2-\nu_1}{(1-\nu_1)(\nu_2+2)}\right)^{\frac{1}{2-\nu_1}} a^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2-\nu_1}}$. Для збуреного випадку вказані параметри вже залежать від часу і визначаються зовнішнім періодичним збуренням та силовими характеристиками підвіски. Тобто, для збуреного руху, якому відповідає диференціальне рівняння (3), у першому наближенні динамічний процес описується залежністю

$$z(t) = a(t)ca\left(\nu_2 + 1, \frac{1}{1-\nu_1}, \omega(a(t))t + \theta(t))\right), \tag{5}$$

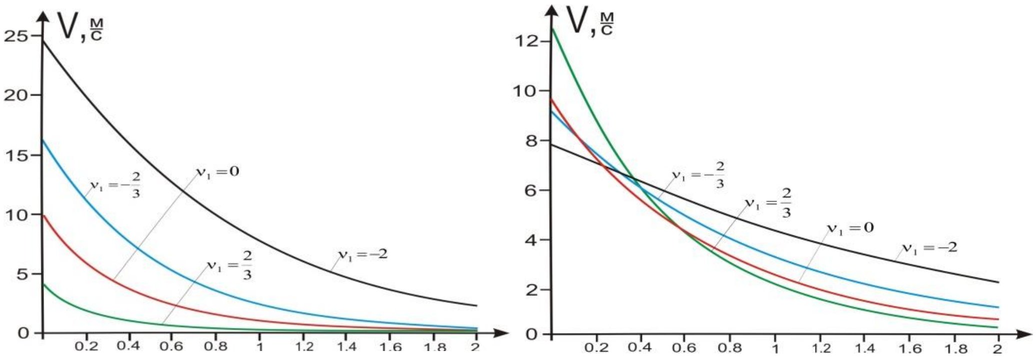
у якій невідомі функції $a(t)$ та $\theta(t)$. Вони знаходяться таким чином, щоб представлення розв'язку у формі (5) задовольняло рівнянню (3). У зв'язку із цим, що функція $\hat{z}(t)$ є періодичною відносно параметру t із періодом $T_{з.} = L/V$, для збуреного руху можливі наступні випадки: а) період власних коливань підресореної частини є близьким або рівним періоду зовнішнього збурення; б) період власних коливань відмінний від періоду зовнішнього збурення. Перший випадок будемо називати *резонансним* і він має місце при $L/V = 2\Pi/\omega(a)$, другий–*нерезонансний* при $L/V \neq 2\Pi/\omega(a)$. У вказаних вище співвідношеннях Π – півперіод за фазою $\psi = \omega(a)t + \theta$ розв'язку рівняння (4), тобто $\Pi = \Gamma(1/(\nu_2+2))\Gamma((1-\nu_1)/(2-\nu_1))\Gamma^{-1}(1/(\nu_2+2) + (1-\nu_1)/(2-\nu_1))$. Із наведеного випливає, що резонансне явище підресореної частини за руху ТЗ впорядкованою системою нерівностей має місце за певного співвідношення між амплітудою вертикальних коливань та швидкістю руху:

$$V = \frac{L}{\Pi}\frac{\nu_2 + 2}{4}\left(\frac{\alpha_2}{m}\frac{2-\nu_1}{(1-\nu_1)(\nu_2+2)}\right)^{\frac{1}{2-\nu_1}} a^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2-\nu_1}} \tag{6}$$

Окремим випадком отриманої залежності при $\nu_1 = 0$ є так званашвидкість резонансу дляконсервативної системи та $\nu_1 = \nu_2 = 0$ лінійної моделі відновлюючої сили підвіски. Востанньому випадку, як відомо, вона не залежить від амплітуди коливань.Одночасно, якщо амплітуда коливань ПМ є меншою за a^* резонансне явище спостерігатись не буде.

$$a^* = \left[\frac{4V\Pi}{L(\nu_2+2)}\left(\frac{\alpha_2}{m}\frac{2-\nu_1}{(1-\nu_1)(\nu_2+2)}\right)^{\frac{1}{\nu_1-2}}\right]^{\frac{2-\nu_1}{\nu_1+\nu_2}} \tag{7}$$

Нижче, на рис.2, представлено залежність швидкості резонансу вертикальних коливань ПМ від параметру ν_2 за різних значень параметрів ν_1 та амплітуди коливань.



a=0,02 a=0,2

Рис.2. – **Залежність швидкості резонансу вертикальних коливань ПМ від параметру ν_2 за різних значень параметрів ν_1 та амплітуди коливань**

Із наведеного випливає, що резонансний випадок має місце при наближенні амплітуди власних коливань до значення a^*; по-друге, є більш швидкоплинним, ніж для випадку квазілінійних систем, адже увійшовши у резонансну зону амплітуда коливань швидко зростає, а значить змінюється власна частота (система виходить із резонансу); по-третє, резонансний процес суттєвим чином залежить від різниці фаз власних та вимушених коливань. У зв'язку із наведеним вище, для описання резонансу ПМ отримано систему диференціальних рівнянь у вигляді

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2-\nu_1}{4\pi\omega(a)}\int_0^{2\pi} sa\left(\frac{1}{1-\nu_1}, \nu_2+1, \frac{\pi}{\Pi}(\vartheta+\gamma)\right) G\left(a, \frac{\pi}{\Pi}(\vartheta+\gamma), \gamma\right) d\gamma,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\pi}{\Pi}\omega(a) - \frac{2\pi V}{L} - \frac{(\nu_2+2)(2-\nu_1)}{4\pi a\omega(a)} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi}\left(sa\left(\frac{1}{1-\nu_1}, \nu_2+1, \frac{\pi}{\Pi}(\vartheta+\gamma)\right)\right)^{\frac{\nu_1}{\nu_1-1}} ca\left(\nu_2+1, \frac{1}{1-\nu_1}, \frac{\pi}{\Pi}(\vartheta+\gamma)\right) G\left(a, \frac{\pi}{\Pi}(\vartheta+\gamma), \frac{\pi}{\Pi}(\vartheta+\gamma)\right) d\gamma.)$$

де ϑ–"різниця фаз" власних та вимушених коливань, тобто $\vartheta = \frac{\pi\psi}{\Pi} - \gamma \to \psi = \frac{\Pi}{\pi}(\vartheta+\gamma)$, $G\left(a, \frac{\pi}{\Pi}(\vartheta+\gamma), \gamma\right)$– відома функція, що визначається правою частиною рівняння (3).

Таблиця 1.

Значення резонансної амплітуди $a_{рез.}$ для різних параметрів нелінійності ν, швидкості руху V, віддалі між гребнями горбів d

N з/п	Параметри					
	ν_1	ν_2	V, м/с	d, м	a^*, м	$a_{рез.}$, м
1	-0,8	0	10	3	0,00371	0,015
2	-0,5	0	10	3	0,00051	0,012
3	-0.3	0	10	3	0,00021	0,01
4	-0,8	0	10	5	0,019	0.051
4	-0,5	0	10	5	0,0066	0,039
6	-0.3	0	10	5	0.001	0.032
7	-0,8	0	15	5	0,0046	0,039
8	-0,2	-0,8	20	3	0,014	0,018
9	-0,3	-0,8	20	3	0,015	0,021
10	-0,4	-0,8	20	3	0,016	0,022

Наведені результати показують ще одну якісну та кількісну відмінність резонансного явища коливань підресореної частини за квазілінійної та нелінійної характеристики пружних амортизаторів: увійшовши у резонансну зону, динамічний процес підресореної частини описується диференціальними рівняннями (15). Амплітуда коливань в такому разі зростає, а значить система виходить із резонансу, а отже описується диференціальними рівняннями (13). Наявні сили опору спричиняють затухання коливань, тому амплітуда коливань з часом зменшується до величини близької до a^*, а значить система знову входить у резонанс. Так, динамічний процес буде повторюватись.

Що стосується кількісних характеристик резонансних коливань, то:

за значень параметру $\nu_1, \nu_2, < 0$ та $\nu_1 < 0, \nu_2 > 0$ більшим значенням швидкості відповідає менше значення резонансної амплітуди;

за сталої швидкості руху та $\nu_1, \nu_2, < 0$ більшим значенням ν_1 відповідає менше значення резонансної амплітуди;

за сталої швидкості руху $\nu_1 < 0, \nu_2 > 0$ більшим значенням ν_2 відповідає менше значення резонансної амплітуди.

Література

1. Артющенко А.Д. Дослідження впливу характеристик підвіски автомобіля малого класу на плавність ходу та її модернізація / А.Д. Артющенко, О.Г. Суярков // Вісник НТУ "ХПІ". – 2013. – № 32 (1004). – С.21-27.

2. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля / Р.В. Ротенберг. – М.: Машиностроение, 1972. – 392 с.

3. Мельников А.А. Теория автомобиля. Колебания и плавность хода: Учеб.пособ. –Нижний Новгород: Нижнегородсуий гос.техн.ун-т, 1998. – 112с.

4. Лобас Л.Г. Качественные и аналитические методы в динамики колесных машин / Л.Г. Лобас, В.Г. Вербицкий. – К.: Наукова думка, 1990. – 232с.

5. Кузьо І.В. Вплив параметрів підвіски на нелінійні коливання транспортних засобів / І.В. Кузьо, Б.І. Сокіл, В.М. Палюх // Вісник НУ "ЛП" "Динаміка, міцність та проектування машин і приладів". – 2007. – №588. – С. 49-52.

6. Hrubel M. Influence of characteristics of wheeled vehicle suspensions of its road-holding along curved stretches of track/ M. Hrubel, R. Nanivskyi, M. Sokil// Science & militariy. – Slovak Republska: Liptovscy Mikulas, 2014. – Vol. 9, – № 1. – p. 15-19.

7. Величко Л.Д. Розробка методу розрахунку нелінійних поздовжньо-кутових коливань гусеничних транспортних засобів / Л.Д. Величко, Б.І. Сокіл, Ю.А. Чаган // Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – Львів: Вісник НУ «ЛП»,2011. – Вип. № 702. – С. 49-53.

8. Сеник П.М. Обернення неповної Beta-функції / П.М. Сеник // Укр. мат. журн. – 1969. – 21, №3. – С. 325-333.

9. Сеник П.М. Про табулювання періодичних Ateb-функцій / П.М. Сеник, А.М. Возний // Доп. АН УРСР. – 1969. – № 12. – С. 1089-1092.

10. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний/ Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 501 с.

Стаття надійшла в редакцію 25.04.2016