УДК 534.11

[1]Гуменюк Ю.О., [2]Герасимчук Г.А., [1]Човнюк Ю.В.
[1]Національний університет біоресурсів і природокористування України
[2]Луцький національний технічний університет

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ АНАЛІЗУ РЕЗОНАНСНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ҐРУНТІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ ПРИ ВІБРАЦІЇ

Наведена наукова концепція для обґрунтованого аналізу резонансних властивостей ґрунтів сільськогосподарського призначення при вібрації.

Ключові слова*: концепція, обґрунтування, аналіз, резонанси, властивості, ґрунт сільськогосподарського призначення, взаємодія, вібрація.*

Гуменюк Ю.О., Герасимчук Г.А., Човнюк Ю.В.

КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗАРЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ ПОЧВСЕЛЬСКО ХОЗЯЙСТВЕННОГО НАЗНАЧЕНИЯ ПРИВИБРАЦИИ

Приведена научная концепция для обоснованного анализа резонансных свойств почв сельскохозяйственного предназначения при вибрации.

Ключевые слова: *концепция, обоснование, анализ, резонансы, свойства, почва сельскохозяйственного предназначения, взаимодействие, вибрация.*

Humenyuk YU., Herasymchuk H., Chovnyuk YU.

CONCEPTUAL BASES OF THE RESONANCE PROPERTIES OF SOIL FOR AGRICULTURAL PURPOSES DURING VIBRATION

The article presents scientific concept for a reasoned analysis of the resonance properties of soil for agricultural purposes during vibration.

Key words: *concept, justification, analysis, resonances, properties, soilinteraction, vibration.*

Постановка проблеми. У останні роки у зв'язку з розвитком фізичної акустики, акустоелектроніки й дефектоскопії, методів вібраційної сейсморозвідки й глибинного зондування земної кори, сейсмології та теорії розрахунку фундаментів споруд великий інтерес у нашій країні й за кордоном викликають задачі про коливання пружних середовищ, викликаних вібруючими джерелами, розміщеними як на границі, так і всередині середовища. У аналізі резонансних властивостей (власних частот коливань) ґрунтів сільськогосподарського призначення при обробці останніх робочими органами машин вібраційної дії можна використати досвід і результати досліджень вказаних вище наукових напрямків та дисциплін.

Накопичені на даний момент часу результати у розв'язуванні граничних задач динамічної теорії пружності досить численні. Детально вивчені закони розповсюдження пружних хвиль у складних середовищах, виявлені нові типи поверхневих й каналових хвиль, розвинуті методи потенціалу й граничних інтегральних рівнянь, які дозволяють розглядати дифракцію хвиль на внутрішніх і поверхневих неоднорідностях.

Важливе місце серед цих задач займають проблеми, пов'язані з дослідженням хвильових полів у пружному напівпросторі зі змінними за глибиною властивостями – швидкостями розповсюдження хвиль та щільністю. Така модель називається стратифікованим напівпростором, її частинним випадком є шаруватий напівпростір, у котрому зміни властивостей відбуваються стрибкоподібно. (До речі, ґрунти сільськогосподарського призначення (ГСП) належать саме до таких середовищ). Дослідженню законів розповсюдження хвиль у таких середовищах присвячена монографія [1], у якій основна увага приділяється променевому методу, а джерело коливань, як правило, не розглядається. Наявність джерела суттєво ускладнює як математичну постановку задачі, так і її розв'язок. Її дослідження у повній мірі неможливе без глибокого математичного аналізу крайових задач і без залучення ЕОМ.

Так, у випадку поверхневого джерела для розв'язку даного класу задач необхідно:

1) побудувати матрицю фундаментальних рішень для неоднорідного напівпростору;

2) для правильного формулювання умов випромінювання провести повний аналіз дисперсійних властивостей середовища;

3) з інтегральних рівнянь отримати невідомі контактні напруження;

4) розробити й реалізувати на ЕОМ ефективні алгоритми розрахунку хвильових полів у ближній та дальній зонах, а також енергії, що переноситься хвилями різних типів [2].

Для однозначного вирішення вихідної крайової задачі необхідно обрати контури інтегрування й гілки радикалів, які входять у інтегральне представлення розв'язку, так, щоб забезпечувалось виконання умов випромінювання. Неоднозначність виникає також за наявності кутових точок на границі області контакту. У цьому випадку необхідно попередньо визначити припустимий вид особливості напружень у околі кутових точок.

Аналіз публікацій за темою дослідження. Автори [2] протягом ряду років займалися розробкою теорії і розвитком прикладних методів розв'язку задач про збудження й розповсюдження хвиль, викликаних джерелами у стратифікованих середовищах [3 - 21]. Розвинута коректна математична теорія крайових задач й створений комплекс прикладних методів їх розв'язку, реалізований у програмах на ЕОМ, котрий дозволяє дати відповідь на цілу низку важливих питань щодо збуджуваних хвильових полів, зокрема про типи хвиль у середовищі, їх амплітудно-частотні характеристики й енергії, які переносяться, про взаємодію хвиль з об'єктами, які знаходяться на поверхні середовища. Проводиться також детальне кількісне вивчення енергетичних характеристик пружних хвиль й аналізується енергетичний баланс стратифікованого напівпростору. Проте дослідженню резонансних властивостей ГСП при дії вібрації приділялось, на думку авторів, недостатньо уваги.

Мета роботи полягає у встановленні основних резонансних властивостей та їх параметрів для ГСП при вібрації методами, розвиненими у [1 - 21].

Виклад основного змісту дослідження.

1. Резонансні властивості ГСП скінченної товщини.

Розглянемо модельну задачу для хвильового рівняння і на її прикладі продемонструємо загальну схему побудови розв'язку за допомогою перетворення Фур'є й з урахуванням принципів випромінювання [2]. Хвильова картина у акустичному середовищі (ГСП) визначається рівнянням [22]:

$$\Delta v = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{1}$$

де $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – швидкість звуку у ГСП, E – модуль пружності (Юнга), ρ – щільність ГСП.

Нехай на поверхні ГСП, який займає смугу товщини h: $-\infty \le x \le \infty, -h \le z \le 0$ розміщене джерело гармонічних коливань (вібратор):

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = Re\left[q(x)e^{-i\omega t}\right],\ i^2=-1,\ \ x \in [-a;a]; \\ \qquad q \equiv 0, x \,\overline{\in}\, [-a;a]; \\ \qquad v|_{z=-h} = 0, \quad -\infty \le x \le \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Коливання припускають усталеними: $v\ (x,\ z,\ t) = Re\left[u(x,z)e^{-i\omega t}\right]$. Комплексна амплітуда u задовольняє рівняння Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0,\ k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \tag{3}$$

де Δ – оператор Лапласа, де ω – кругова частота коливань, де k – хвильовий вектор (квадрат його модуля дорівнює $\frac{\omega^2}{c^2}$).

Тоді граничні умови для $u(x,z)$ приймають вид:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = q,\ u|_{z=-h} = 0, \text{ при } -\infty \le x \le \infty. \tag{4}$$

Розв'язок задачі (3) і (4) має вигляд [2]:

$$u(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} K(\alpha,\ z)\ Q(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{5}$$

де

$$Q(\alpha) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} q(\xi)\ Q(\alpha)e^{-i\alpha\xi}d\xi, K(\alpha,\ z) = \frac{sh\{\gamma(z+h)\}}{\gamma ch\{\gamma,h\}}, \tag{6}$$

$$\gamma = \gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2},\ Re\gamma \ge 0,\ Im\,\gamma \le 0. \tag{7}$$

Тут $U(\alpha,\ z) = K(\alpha,\ z)\ Q(\alpha)$ – функція, яка не має точок гілкування, але має лічену множину полюсів, які є нулями знаменника:

$$\zeta_l = \pm\sqrt{k^2 - a_l^2},\ a_l = \left(\frac{\pi}{2} + \pi l\right)/h,\ \ l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{8}$$

При $k > \frac{\pi}{2h}$ скінчене число ζ_l розміщене на дійсній осі, інші – чисто уявні.

Таким чином, резонансні частоти прошарку ГСП глибиною h визначаються зі співвідношення:

$$\omega_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) {}^{c}/_{h} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{h}, n = 0, 1, 2, \dots \qquad (9)$$

Лінійні частоти (резонансні) для того ж прошарку ГСП глибиною h визначаються наступним чином:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{2\pi h}, n = 0, 1, 2, \dots \qquad (10)$$

У таблиці 1 наведені значення ω_n, *1/с* й f_n, *Гц* для різних n, c, h.

Таблиця 1.

Резонансні частоти (ω_nй f_n,) ГСП для різних h, *м*,n,с, *м/с*

n	с, *м/с*	*h, м*			
		0,05	**0,10**	**0,15**	**0,20**
1.	10	(942,5)/150*	(471,3)/75	(314)/50	(236)/37,5
	20	(1885)/300	(942,5)/150	(628)/100	(471)/75
	30	(2827,5)/450	(1414)/225	(942,5)/150	(707)/112,5
2.	10	(1571)/250	(785)/125	(524)/83,3	(393)/62,5
	20	(3142)/500	(1571)/250	(1047)/167	(1571)/125
	30	(4713)/750	(2356)/375	(1571)/250	(1178)/187,5
3.	10	(2199)/350	(1100)/175	(733)/117	(550)/87,5
	20	(4398)/700	(2199)/350	(1466)/233,3	(1100)/175
	30	(6597)/1050	(3299)/525	(2199)/350	(1650)/262,5
4.	10	(2827)/450	(1413,5)/225	(942,5)/150	(707)/112,5
	20	(5655)/900	(2827,5)/450	(1885)/300	(1414)/225
	30	(8481)/1350	(4241)/675	(2827,5)/450	(2121)/337,5
5.	10	(3456)/550	(1728)/275	(1152)/183,3	(864)/137,5
	20	(6912)/1100	(3456)/550	(2304)/366,7	(1728)/275
	30	(10368)/1650	(5184)/825	(3456)/550	(2592)/412,5

*Примітка. Верхнє число (чисельник) відповідає ω, *1/с*; нижнє число (знаменник) відповідає f, *Гц*.

У таблиці 2 подані резонансні частоти ГСП (ω_0, f_0) для різних h, *м* й c, *м/с* при $n = 0$ (найменші моди).

Таблиця 2.

Резонансні частоти ГСПω_0, *1/с*,f_0, *Гц*для різних h, *м* й c, *м/с* при $n = 0$

с, *м/с*	*h, м*				
	0,05	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**
10	(314)/50	(157)/25	(104,7)/16,7	(78,5)/12,5	(62,8)/10
15	(471)/75	(235,5)/37,5	(157)/25	(117,8)/18,8	(94,2)/15
20	(628)/100	(314)/50	(209,3)/33,3	(157)/25	(125,7)/20
25	(385)/125	(392,5)/62,5	(261,7)/41,7	(196,3)/31,3	(157)/25
30	(942)/150	(471)/75	(314)/50	(235,5)/37,5	(188,5)/30
35	(1099)/175	(549,5)/87,5	(366,3)/58,3	(274,8)/43,8	(220)/35
40	(1256)/200	(628,4)/100	(419,1)/66,7	(314)/50,0	(251,3)/40

Таким чином, для найнижчої моди *n*= 0 коливань ГСП при $c = (10 \dots 40)$, *м/с*, $h = (0{,}05 \dots 0{,}25)$, *м* маємо: $\omega_0 = (62{,}8 \dots 1256{,}7)$, *1/с*, $f_0 = (10 \dots 200)$, *Гц*.

2. Резонансні властивості системи «ГСП – сейсмічний вібратор» для різних моделей основи (ґрунту).

А. Модель основи ґрунту Вінклера.

Розглянемо коливання системи «ГСП – сейсмічний вібратор» й визначимо його (ґрунту) резонансні частоти за моделлю основи Вінклера (рис.1).

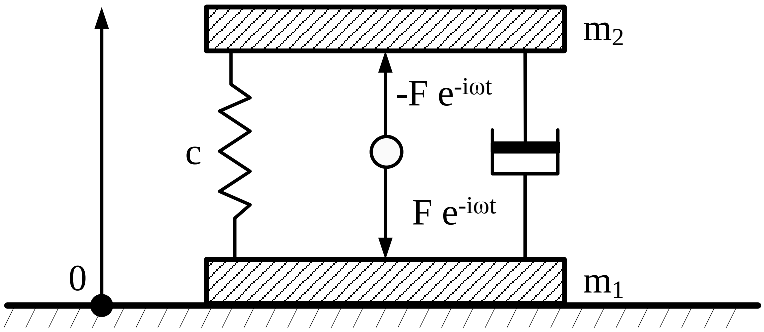

Рис.1 .**Система «ГСП – сейсмічний вібратор»**

Сейсмічний вібратор моделюється плитою з масою m_1, який лежить без тертя на поверхні пружного середовища (ГСП) й зв'язаною з масою m_2 пружними і демпфіруючими зв'язками (рис.1).

На обидві маси діє навантаження $Fe^{-i\omega t}$, $i^2 = -1$. Вертикальні коливання плити w_1 і з'єднаної з нею маси w_2 описуються рівнянням:

$$\begin{cases} m_1\ddot{w}_1 - k(\dot{w}_2 - \dot{w}_1) - c(w_2 - w_1) = F - Q \\ m_2\ddot{w}_2 - k(\dot{w}_2 - \dot{w}_1) - c(w_2 - w_1) = -F \end{cases} \tag{11}$$

Тут $(\dot{w}) \equiv \frac{dw}{dt}$, $\ddot{w} \equiv \frac{d^2w}{dt^2}$, t – час, c – жорсткість пружного зв'язку, k – коефіцієнт тертя демпфіруючого зв'язку, F – сила, прикладено до плити, $-Q = -\iint_\Omega q_3\,dxdy$ – реакція пружного середовища (ГСП) на занурення у нього плити, Ω – область контакту: $(x, y) \in \Omega$, $q_3 = K_{\text{пост}}w_1$, $K_{\text{пост}}$ – коефіцієнт постілі (Вінклера основи - ГСП), $\frac{H}{м^3}$.

Будемо вважати, що вібратор працює в усталеному гармонічному режимі з круговою частотою ω. Під w_1,w_2, F, Q – у подальшому будемо розуміти комплексні амплітуди відповідних величин. Вважаючи, що площа штампу (маси m_1), який контактує з ГСП, складає S з (11) можна отримати (враховуючи, що $\frac{d^n}{dt^n} \to (-i\omega)^n$):

$$\begin{cases} (-m_1\omega^2 - i\omega k + c + K_{\text{пост}}S)w_1 + (i\omega k + c)w_2 = F \\ (i\omega k - c)w_1 + (-m_2\omega^2 - i\omega k + c)w_2 = -F \end{cases}, \tag{12}$$

Звідси: $w_1 = -\frac{\omega^2 m_2}{\Delta(\omega)}$; $w_1 = -\frac{(K_{\text{пост}}\,S - \omega^2 m_1)}{\Delta(\omega)}$ (13)

$$\Delta(\omega) = \omega^2 m_2(i\omega k - c) + (K_{\text{пост}}\,S - \omega^2 m_1)(\omega^2 m_2 - i\omega k + c) \tag{14}$$

Зрозуміло, що умова:

$$\Delta(\omega) = 0 \tag{14*}$$

є умовою резонансу розглядуваної системи.

Якби була відсутньою реакція ГСП ($Q \equiv 0$), тоді поліном $\Delta(\omega)$, як поліном четвертого ступеня відносно ω, мав би чотири корені. За наявності $Q \neq 0$ (а, можливо, й $Q = Q(\omega)$) питання про кількість резонансів та їх розміщення у комплексній площині ω вимагає спеціальних аналітичних та чисельних досліджень (у подальшому, для спрощення задачі, вважаємо, що $K_{\text{пост}}$ не залежить від ω). Особливий інтерес представляють тут дійсні корені, котрим відповідають незатухаючі коливання системи з даною частотою.

Прирівнюючи нулю дійсну та уявну частини $\Delta(\omega)$ з (14), отримаємо 4 можливих частоти коливань розглядуваної системи ($\Omega_{1,2,3,4}$):

1) $\Omega_1 = 0$ (можливе при $\omega \equiv 0$ – статичний випадок, або $k = 0$); (15)

$$2)\quad \Omega_2 = \left\{\frac{K_{\text{пост}}S}{m_1 + m_2}\right\}^{1/2}; \tag{16}$$

$$3)\quad \Omega_3 = \left\{-\frac{1}{2}A_1 + \left[\frac{1}{4}A_1^2 + A_2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}, \text{ де: } A_1 = \frac{m_1 c + m_2 c - K_{\text{пост}}\,S\,m_2}{m_1}$$

$$A_2 = \frac{K_{\text{пост}}\,S\,c}{m_1 m_2}; \tag{17}$$

$$4)\quad \Omega_3 = +i\left\{\frac{1}{2}A_1 + \left[\frac{1}{4}A_1^2 + A_2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}. \qquad (18)$$

Коливання у системі відбуваються з частотами Ω_2, Ω_3, а при $\Omega = \omega = \Omega_4$ виникає аперіодичних (затухаючий) у часі t процес.

Б. Модель основи (ґрунту) Пастернака.

У цьому варіанті моделі ГСП:

$$q_3 = K_{\text{пост}} w_1 + K_1 \frac{dw_1}{dt},\ [K_1] = \frac{\text{Н с}}{\text{м}^3}, \qquad (19)$$

де другий доданок у формулі (19) враховує швидкість руху штампу m_1 у ГСП. Тоді у виразі (14) слід здійснювати заміну:

$$K_{\text{пост}}\,S \Longrightarrow K_{\text{пост}}\,S - i\omega K_1 S. \qquad (20)$$

Отже, замість (14) у даному випадку матимемо:

$$\Delta^*(\omega) = \omega^2 m_2(i\omega k - c) + (K_{\text{пост}}\,S - i\omega K_1 S - \omega^2 m_1)(\omega^2 m_2 - i\omega k + c). \qquad (21)$$

Прирівнюючи нулю дійсну та уявну частини $\Delta^*(\omega)$ (21), отримаємо 4 можливих частоти коливань розглядуваної системи ($\Omega^*_{1,2,3,4}$):

$$1)\quad \Omega_1^* = 0 \text{ (статичний випадок)}; \qquad (22)$$

$$2)\quad \Omega_2^* = \left\{\frac{kK_{\text{пост}}\,S + K_1 Sc}{k(m_1+m_2) - K_1 S\, m_2}\right\}^{\frac{1}{2}}, \text{ при цьому } \Omega_2^* \to \infty$$

$$(\text{при } k(m_1+m_2) \geq K_1 S\, m_2\,) \qquad (23)$$

$$3)\quad \Omega_3^* = \left\{-\frac{1}{2}A_1^* + \left[\frac{1}{4}(A_1^*)^2 + A_2\right]^{1/2}\right\}^{1/2},$$

де

$$A_1^* = \frac{m_1 c + m_2 c - K_{\text{пост}}\,S\, m_2 + K_1 S k}{m_1 m_2}, (A_2) \text{ див } (17) \qquad (24)$$

$$4)\quad \Omega_4^* = +i\left\{\frac{1}{2}A_1^* + \left[\frac{1}{4}(A_1^*)^2 + A_2\right]^{1/2}\right\}.^{1/2} \qquad (25)$$

Коливання у системі відбуваються з частотами Ω_2^*, Ω_3^*, а при $\Omega^* = \omega = \Omega_4^*$ виникає аперіодичних (затухаючий) у часі t процес.

В. Скінченовимірна модель ГСП (ефект приєднаної маси ґрунту).

Розглянемо вертикальні коливання штампу w під дією навантаження F. Використовуючи [2], можна отримати після зрозумілих спрощень (рис. 2,а) наступну математичну модель коливань штампу на ГСП:

$$-m\omega^2 w = F - Q,\ Q = wP_z, \qquad (26)$$

де $(-P_z) = -\iint_\Omega q_3\, d\Omega$ – реакція середовища на одиничні переміщення штампу,

$$w = \frac{F}{\tilde{\Delta}(\omega)},\ \tilde{\Delta}(\omega) = P_z(\omega) - m\omega^2. \qquad (27)$$

(Тут Ω – область контакту штампу з ГСП).

Нехай $F = const$, переміщення штампу w цілком визначаються залежністю P_z від ω. Зокрема, якщо для всіх ω_R: $\tilde{\Delta}(\omega_R) = 0$, тоді при $\omega \to \omega_R w \to \infty$ – частота ω_R є резонансною.

Розглянемо для порівняння скінченовимірну модель ГСП. Замінюємо «реакцію середовища» (ГСП) на реакцію «приєднаної маси» (ГСП) M, зв'язаної зі штампом пружними та демпфіруючими зв'язками (рис. 2 б).

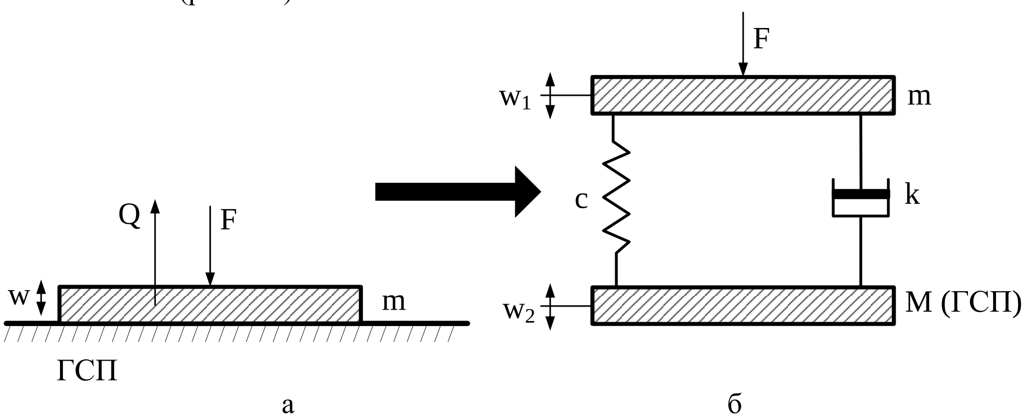

Рис. 2. **Скінченовимірна модель взаємодії ГСП зі штампом**

Координати центрів мас w_1, w_2 задовольняють системі

$$\begin{cases} m\ddot{w}_1 = F - c(w_1 - w_2) - k(\dot{w}_1 - \dot{w}_2), \\ M\ddot{w}_2 = c(w_1 - w_2) + k(\dot{w}_1 - \dot{w}_2), \end{cases} \quad (28)$$

з котрої для усталених гармонічних коливань маємо:

$$\begin{cases} w_1 = F\,\frac{(\beta - \omega^2 M)}{\tilde{\Delta}(\omega)}, \beta = c - i\omega k; \\ w_2 = F\,\frac{\beta}{\tilde{\Delta}(\omega)}, \tilde{\Delta}(\omega) = \omega^2[\omega^2 mM - \beta(m+M)]. \end{cases} \quad (29)$$

З $\tilde{\Delta}(\omega_R) = 0$ випливає:

$$\omega_R = \sqrt{\beta\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)}. \quad (30)$$

Порівнюючи (27) та (29), отримаємо, що у прийнятому наближенні реакція середовища P_z дається виразом:

$$\tilde{P}_z = -\frac{\beta\omega^2 M}{\beta - \omega^2 M}. \quad (31)$$

Зрозуміло, $\tilde{P}_z$ не може описувати реакцію середовища (ГСП) в усьому діапазоні частот, якщо не припустити, що β й M залежать від ω. Іншими словами, параметри моделі c, k, M повинні підбиратись для кожної конкретної частоти ω, модель «налаштовують» на дану частоту, і користуватись цією моделлю (ГСП) можна тільки у деякому околі даної частоти. Зокрема, у зоні квазістатики ($\omega < 1{,}57$) P_z – дійсна величина, тому $k = 0$.

На частотах власних коливань прошарку ГСП, де $P_z = 0$, повинні перетворюватись у нуль або зв'язки k, c, або приєднана маса M.

З (30) випливає, що ω_R зменшується із збільшенням маси штампа m або приєднаної маси ГСП M й зростає зі збільшенням жорсткості c.

Введемо поняття питомого (на одиницю площі штампа) коефіцієнта пружності ГСП - χ, $\frac{Н}{м^3}$. Тоді, нехтуючи в'язкими властивостями ГСП ($k \to 0$), можна ω_R подати наступним чином:

$$\omega_R^2 = \frac{\chi S}{m}\left(1 + \frac{m}{M}\right), \quad (32)$$

де S – площа поверхні штампу m (поверхні контакту m з ГСП).

Звідси знаходимо формулу для ω_R:

$$\omega_R = \sqrt{\frac{\chi S}{m}}\left(1 + \frac{m}{M}\right)^{1/2}, \quad (33)$$

Тоді

$$\Omega_R = \frac{\omega_R}{\sqrt{\frac{\chi S}{m}}} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{1/2}. \quad (34)$$

Таким чином, враховуючи властивості ГСП за допомогою коефіцієнту χ, можна констатувати, що ω_R зростає при збільшенні χ, S – штампу і залежить від $\frac{m}{M}$ (рис. 3).

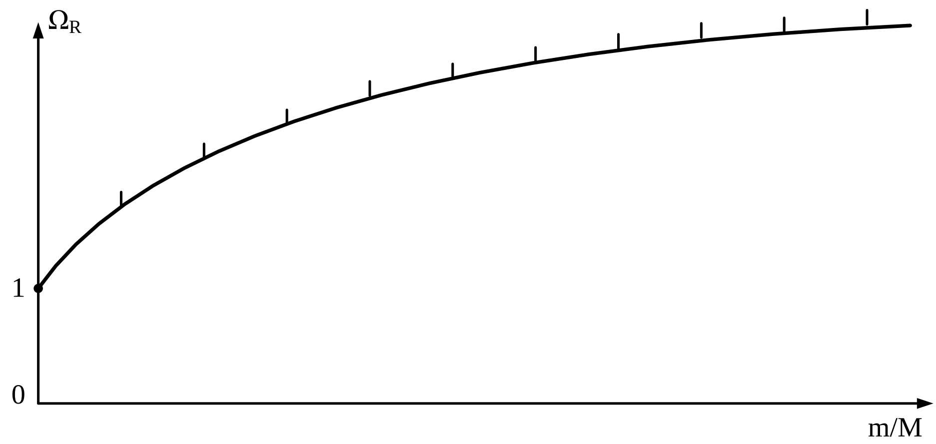

Рис. 3. **Залежність Ω_R від $\frac{m}{M}$**

Якщо позначити:

$$\sqrt{\frac{\chi S}{m}} = \omega_0, \quad (35)$$

тоді залежність ω_R від $\frac{m}{M}$ набуває вигляду (рис. 4).

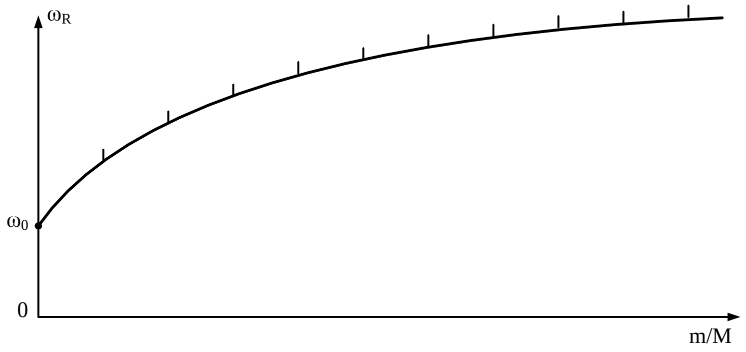

Рис. 4 .**Залежність ω_R від $\frac{m}{M}$**

Аналітично залежність, зображену на рис. 4, можна подати у вигляді:

$$\omega_R = \omega_0\left(1+\frac{m}{M}\right)^{1/2}. \tag{36}$$

Як випливає з (36), $\omega_R \to \omega_0$ при $\frac{m}{M} \to 0$, тобто при $\frac{m}{M} \ll 1$. У таблиці 3 подані значення $\frac{\omega_R-\omega_0}{\omega_0} = \delta$ для різних відношень $\frac{m}{M}$. Зазначимо, що:

$$\delta = \left(1+\frac{m}{M}\right)^{1/2} - 1. \tag{37}$$

Параметр δ характеризує наскільки ω_R відмінна від ω_0 за інших однакових умов (для різних $\frac{m}{M}$).

Таблиця 3.

Залежність δ від $\frac{m}{M}\left(\frac{m}{M} < 1\right)$

m/M	δ
0,1	0,0488
0,2	0,0954
0,3	0,1402
0,4	0,1832
0,5	0,2247
0,15	0,0724
0,25	0,1180
0,35	0,1619
0,45	0,2042
$1/\infty = 0$	0

Аналіз результатів таблиці 3 свідчить про те, що при $\frac{m}{M} = (0{,}1 \dots 0{,}5)$ значення ω_R відрізняється (у сторону збільшення) від $\omega_0 = \sqrt{\frac{\chi S}{m}}$ на $(4{,}88 \dots 22{,}47)\%$. Отже, частота ω_0, яка залежить від геометричних характеристик штампу (S), його маси (m) та питомого коефіцієнта пружності (χ) ГСП може слугувати досить точною (при інженерних розрахунках) оцінкоюω_R прошарку ГСП. (Відхилення тим менші, чим менше $\frac{m}{M}$). Зазвичай, $\frac{m}{M} > 1$ і M складає $(20 \dots 40)\%\, m$. У таблиці 4 подані значення δ для випадку $\frac{m}{M} > 1$.

Таблиця 4.

Залежність δ від $\frac{m}{M}\left(\frac{m}{M} > 1\right)$

m/M	δ
20	3,5826
10	2,3166
3	1
2	0,7321
1	0,4142
0,8	0,3416
0,6	0,2649

Так, при $\frac{m}{M} = 5$ $(M = 0{,}2m)\delta = 1{,}4495$; при $\frac{m}{M} = 2{,}5$ $(M = 0{,}4m)\delta = 0{,}8708$.
Отже, при $\frac{m}{M} > 1\omega_R$ суттєво відрізняється від ω_0, а саме від 358% до 26,5% ($\frac{m}{M} = 20 \ldots 0{,}6$).
Таким чином, у цьому випадку ω_0 не може слугувати для кількісної оцінки ω_R.
На рис.5 подана залежність δ від $\frac{m}{M}$.

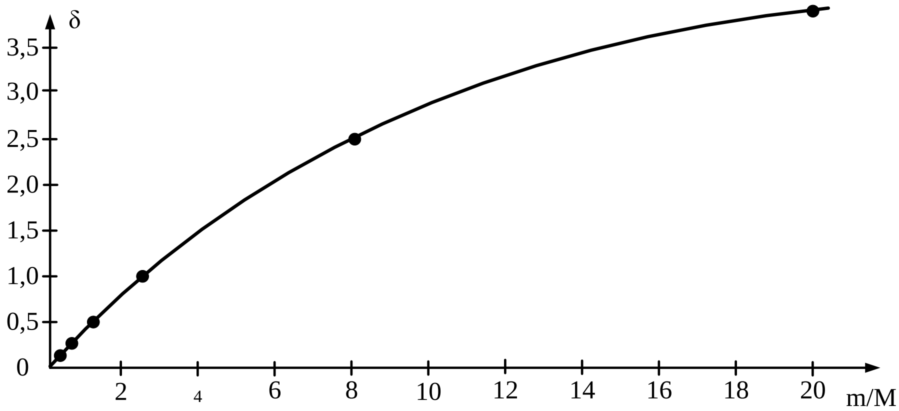

Рис. 5. **Залежність δ від $\frac{m}{M}$**

Висновки

1. Визначені аналітично й чисельно резонансні частоти коливання ґрунтів сільськогосподарського призначення (ГСП) для різних товщин (H) їх прошарків та для різних значень пружних та фізико-механічних властивостей.

2. Знайдені аналітичним шляхом резонансні частоти ГСП для різних моделей ґрунту (Вінклера, Пастернака та скінченовимірної з «приєднаною масою» ГСП).

3. Отримані результати можуть у подальшому слугувати для визначення резонансних частот коливань ГСП, викликаних робочими органами сільськогосподарських машин вібраційної дії та для уточнення і вдосконалення інженерних методів розрахунку і проектування таких машин.

Література:

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах./ Л.М. Бреховских. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
2. Бабешко В.А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред./ В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Ж.Ф. Зинченко. – М.: Наука Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 344 с.
3. Бабешко В.А. К теории динамических контактных задач. /В.А. Бабешко// ДАН СССР. – 1971. – Т.201, №3.
4. Бабешко В.А. Асимптотические свойства решений некоторых двумерных интегральных уравнений. /В.А. Бабешко// ДАН СССР. – 1972. – Т.206, №5.
5. Бабешко В.А. О единственности решения интегральных уравнений динамических контактных задач. /В.А. Бабешко// ДАН СССР. – 1973. – Т.210, №6.
6. Бабешко В.А. Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. /В.А. Бабешко// ДАН СССР. – 1974. – Т.217, №4.
7. Бабешко В.А. Метод факторизации в статических и динамических задачах теории упругости. /В.А. Бабешко// Докторская диссертация. – М.: ИПМ АН СССР, 1974.
8. Бабешко В.А. Новый метод в теории в пространственных динамических контактных задач. /В.А. Бабешко// ДАН СССР. – 1978. – Т.242, №1.
9. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. /В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1984. – 400 с.
10. Бабешко В.А. К проблеме динамически контактных задач в произвольных областях. /В.А. Бабешко Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова// Известия АН СССР. МТТ. – 1978. - №3.
11. Бабешко В.А. Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах. /В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова //ДАН СССР. – 1981. – Т.257, №2.
12. Бабешко В.А. Установившиеся колебания массивных объектов на поверхности упругой среды./В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, Ж.Ф. Зинченко. – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. ун-т, 1981. Деп. в ВИНИТИ 22.01.82, №290–82 - 250 с.

13. Бабешко В.А. О резонансных свойствах системы штампы-упругий слой./ В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова. – Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 1985. Деп. в ВИНИТИ 04.12.85, №8329–В - 138 с.

14. Бабешко В.А. Выделение особенностей в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах./В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова. – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. ун-т, 1980. Деп. в ВИНИТИ 22.12.80, №5410–80-315 с.

15. Ворович И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости. /И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1974. –280 с.

16. Ворович И.И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. /И.И. Ворович, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1979. –420 с.

17. Глушков Е.В. Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве. /Е.В. Глушков //ПММ. – 1983. – Т.47, №1.

18. Глушков Е.В. Плоская задача о колебании штампа на слое. /Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова //Изв. СКНЦ ВШ – 1979. – №1.

19. Бабешко В.А. Резонансные явления в многослойном полупространстве. /В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, Ж.Ф. Зинченко //ДАН СССР. – 1986. – Т.286, №4.

20. Бабешко В.А. Анализ волновых полей, возбуждаемых в упругом стратифицированном полупространстве, поверхностными источниками. /В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова //Акустический журнал. – 1986. – Т.32, Вып. 3.

21. Бабешко В.А. Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства /В.А. Бабешко, Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова //ЖВМ и МФ. – 1987. – Т.27, №1.

22. Котляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики. /Н.С. Котляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 638 с.

Стаття надійшла до редакції 23.11.2016.