

В.А. Сяський

Рівненський державний гуманітарний університет

УТОЧНЕНА МОДЕЛЬ ПЕРЕДАЧІ ОБЕРТАЛЬНОГО МОМЕНТУ ВІД СИСТЕМИ ШТАМПІВ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ ДО ПРУЖНОГО КРУГЛОГО ДИСКА

Уточнена модель контактної взаємодії системи жорстких штампів та пружного круглого диска враховує початкову різницю радіусів кривини контактуючих поверхонь та особливості передачі обертального моменту за рахунок сил тертя, заданих законом Кулона. На основі виразів для зміщення контурних точок диска побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами. Розв'язок системи рівнянь дозволяє встановити положення і розмір зони контакту, напружено-деформований стан на контурі диска та величину притискового зусилля у системі штампів, яке забезпечує максимальну передачу обертального моменту і гарантує мінімальне зминання матеріалу. Розглядаються різні варіанти контактування тіл в залежності від співвідношення між радіусами кривин їх поверхонь.

Ключові слова: пружний диск, жорсткий штамп з кутовими точками, сили тертя, обертальний момент, контактні напруження, сингулярні інтегральні рівняння з логарифмічними ядрами.

В.А. Сяський

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕДАЧИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО МОМЕНТА ОТ СИСТЕМЫ ШТАМПОВ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ К УПРУГОМУ КРУГЛОМУ ДИСКУ

Уточненная модель контактного взаимодействия системы жестких штампов и упругого круглого диска учитывает начальную разницу радиусов кривизны контактирующих поверхностей и особенности передачи вращательного момента от штампов к упругому телу за счет сил трения, заданных законом Кулона. На основе выражений для смещения контурных точек диска построена система сингулярных интегральных уравнений с логарифмическими ядрами. Решение системы уравнений позволяет определить положение и размер зоны контакта, напряженно-деформированное состояние на контуре диска и величину прижимного усилия в системе штампов, которое обеспечивает максимальную передачу вращательного момента и гарантирует минимальное сминание материала. Рассматриваются различные варианты взаимодействия тел в зависимости от соотношения между радиусами кривизны их поверхностей.

Ключевые слова: упругий диск, жесткий штамп с угловыми точками, силы трения, крутящий момент, контактные напряжения, сингулярные интегральные уравнения с логарифмическими ядрами.

V. Syaskyy

REFINED TRANSMISSION MODEL OF ROTATIONAL MOMENT FROM THE SYSTEM OF HARD STAMPS TO THE ELASTIC ROUND DISK

In the article the contact interaction of the system of hard stamps with angular points and round elastic disk is researched. The specified interaction model considers the initial difference of contacting surfaces curvature and peculiarities of the rotational moment transmission from stamps to the elastic body by Coulomb friction. The boundary condition of the problem involve equality of normal displacements of the contacting bodies common points. Based on the expressions for displacement of contour points of disk the system of singular integral equations with logarithmic kernels was created. For the numerical implementation of the problem the combined method of mechanical squaring and boundary collocation is used. The solution of the system of equations allows to determine the position and the size of the contact zone, stress-strain state on the elastic body outline and value of clamping force in the system of stamps, that provides the maximum rotational moment transmission and ensures minimum crushing of material. Depending on the correlation between the curvature radius of their surfaces, different options of the contacting bodies interaction are analyzed.

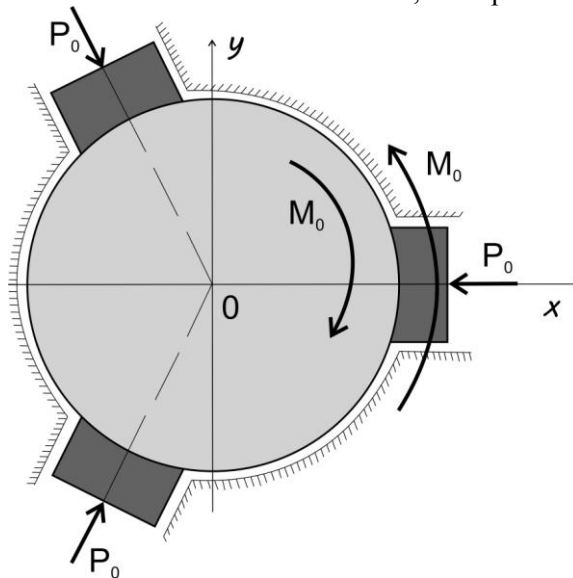
Key words: hard stamps with angular points, Coulomb friction, rotational moment, contact stresses, singular integral equations with logarithmic kernels.

Формулювання проблеми в загальному вигляді. При розрахунках фрикційних передач, гальмівних систем для транспорту та підйомної техніки, розробці пристроїв для закріплення ріжучих інструментів та заготовок у обробних верстатах, а також фіксації геофізичних приладів та обладнання у свердловинах широко використовуються розв'язки задач про тиск жорстких штампів з кутовими точками на поверхню кругового циліндричного отвору в масивному тілі або на бічну поверхню круглого диска чи вала. Контакт між тілом і штампамі забезпечується системою зрівноважених сил, прикладених вздовж осей симетрії штампів, та моментом пари сил, який рівномірно розподілений по усіх штампах. Передачу обертального моменту від системи штампів до тіла здійснюють сили тертя в зоні контакту. Актуальним є дослідження залежності напружено-деформованого стану пружного тіла від геометричних параметрів штампів та сил тертя в зоні контакту. Визначення розподілу контактних напружень необхідне для розв'язання проблем міцності співдотичних тіл, їх зносостійкості, теплового розрахунку тертьових поверхонь тощо.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вдавлювання гладких штампів без кутових точок на циліндричну поверхню пружних тіл, коли кривини контактуючих контурів є близькими і такими, що забезпечують суцільну зону контакту, досліджено у роботах [1, 2]. Взаємодія двох жорстких штампів із кутовими точками та пружного круглого диска або пружної пластинки із круговим циліндричним отвором, коли радіуси кривин контактуючих поверхонь рівні, розглянута в роботі [3]. Подальші дослідження в цьому напрямі передбачали використання систем із довільної кількості однакових симетричних штампів з кутовими точками [4]. Такі постановки задач є ідеалізованими. У більшості технічних застосувань має місце тиск штампів на поверхні тіл, радіуси кривин яких відрізняються на величини, що перевищують пружні деформації. При цьому можна вважати контактуючі поверхні позбавленими шорсткості, а їх кривини – сталими. Прикладом такої технічної проблеми є закріплення ріжучих інструментів (свердл, фрез) або заготовок у затискних патронах обробних верстатів. Патрон із одним комплектом затискних штампів використовується для закріплення інструментів або заготовок різного діаметра. Важливим у цьому випадку є встановлення величини затискного зусилля у патроні, яке забезпечує максимальну передачу обертального моменту і гарантує мінімальне змінання матеріалу.

Метою дослідження є побудова уточненої моделі передачі обертального моменту від системи жорстких штампів з кутовими точками до пружного круглого диска або вала за рахунок сил тертя у загальному випадку, коли радіуси кривин контактуючих поверхонь відрізняються на скінченні величини.

Постановка задачі. Не зменшуючи загальності, розглядається ізотропний круглий диск радіусом R і товщиною $2h$. На контурі диска в площині серединного перерізу рівномірно розміщено N однакових симетричних жорстких штампів з кутовими точками, які утримуються системою із паралельних напрямних (Рис. 1). Форма і розмір штампів характеризуються радіусом контактуючої поверхні r та відстанню між кутовими точками $2d$. Твірні поверхонь взаємодіючих тіл є паралельними, а радіуси кривин відрізняються на скінченну величину, що має порядок пружних зміщень. Контакт між диском і штампами підтримують зрівноважені сили P_0 , які діють вздовж осей симетрії штампів. Поступальне радіальне зміщення штампів забезпечують пари паралельних напрямних. Між напрямними і бічними поверхнями штампів тертя відсутнє. Усі напрямні утворюють єдину жорстку систему, до якої прикладено обертальний момент M_0 із центром обертання, що співпадає з центром диска. Обертальний момент через штампи завдяки силам тертя передається до диска. Для забезпечення рівноваги диска в його центрі діє зосереджена пара сил із таким самим за абсолютною величиною моментом, але протилежним за напрямом.



Оскільки радіуси поверхонь штампів і диска різні, то розміри ділянок контакту наперед невідомі і підлягають встановленню. У результаті взаємодії тіл в зоні контакту виникають нормальні T_ρ і дотичні $S_{\rho\lambda}$ зусилля, які потрібно визначити. Також необхідно встановити кільцеві T_λ напруження на контурі диска γ . Особливий інтерес становить граничне значення моменту

M_0 , яке може передаватися до пружного тіла без проковзування при заданій силі P_0 , та величина поступального зміщення штампів.

Лінійні розміри диска та штампів вздовж твірних циліндричних поверхонь можна вважати однаковими, тому доцільно розглядати систему диск-штампи в умовах узагальненого плоского напруженого стану. При цьому досліджується серединний переріз взаємодіючих тіл. В залежності від співвідношення між радіусами контактуючих поверхонь можливі два варіанти взаємодії. Перший варіант – радіус кривини поверхонь штампів більший від радіуса диска. У цьому випадку буде одна ділянка контакту із невідомими межами в околі серединної точки штампа. Другий варіант – радіус кривини поверхонь штампів менший від радіуса диска. У цьому випадку буде дві ділянки контакту із невідомими внутрішніми межами, які поширюватимуться від зовнішніх кутових точок штампів назустріч одна одній. Оскільки при взаємодії тіл має місце передача обертового моменту за рахунок сил тертя, то у обох випадках ділянки контакту будуть несиметричними відносно осей симетрії штампів.

Побудова визначальної системи рівнянь математичної моделі задачі.

Розглянемо спочатку випадок $r > R$. Якщо зусилля P_0 не забезпечує повного контактування поверхонь, то можна говорити про контактну задачу для штампів без кутових точок [1, 2].

Система прямокутних і полярних координат вводиться так, щоб її початок O_1 співпадав із центром диска, а вісь Ox співпадала з віссю симетрії одного із штампів (Рис. 2). Несиметрична зона контакту окремого штампа характеризується дуговими координатами β_1 , β_2 . Повна зона контакту може бути визначена наступним чином

$$L \equiv [\beta_1; \beta_2] \cup \left[\frac{2\pi}{N} + \beta_1; \frac{2\pi}{N} + \beta_2 \right] \cup \dots \cup \left[\frac{2\pi(N-1)}{N} + \beta_1; \frac{2\pi(N-1)}{N} + \beta_2 \right].$$

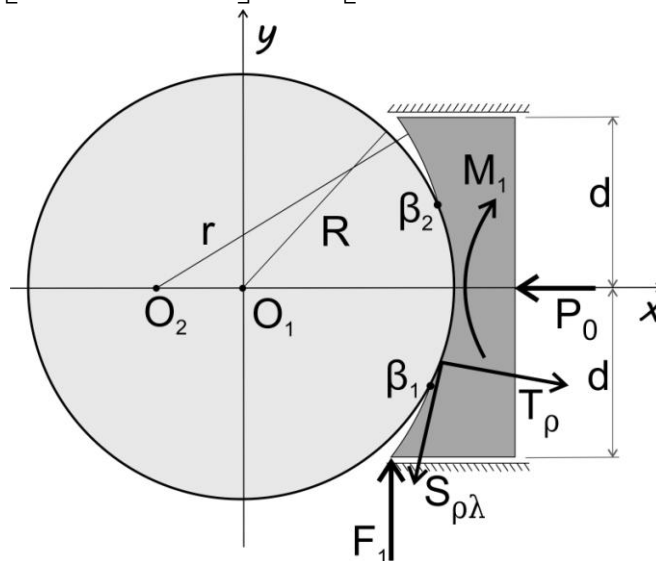


Рис. 2. Розрахункова схема для окремого штампа

Передача обертового моменту від системи напрямних до штампа фактично реалізується силою реакції F_1 в точці однієї із напрямних, що контактує із кутовою точкою штампа після його зміщення як жорсткого цілого, та моментом M_1 деякої пари сил. Сила F_1 та момент M_1 є невідомими і підлягають встановленню.

Умови дотику взаємодіючих тіл обираються у вигляді рівності нормальних зміщень спільних точок контактуючих поверхонь. При цьому вважається, що контурні точки диска, які не контактують зі штампами, залишаються нерухомими. Враховуючи геометрію зони контакту, а також наявність на цій ділянці сил тертя, заданих законом Кулона, граничні умови задачі можна записати у вигляді [3]

$$u(\lambda) + tg \lambda \cdot v(\lambda) = U_0 - D_1(\lambda), \quad \lambda \in L; \quad (1)$$

$$S_{\rho\lambda}(\lambda) = f \cdot T_\rho(\lambda), \quad \lambda \in L; \quad (2)$$

$$D_1(\lambda) = \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \lambda} - R \cos \lambda + R - r, \quad \lambda \in L.$$

Тут $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ – проекції вектора зміщення контурних точок на координатні осі; f – коефіцієнт тертя ковзання; U_0 – величина зміщення штамп як жорсткого цілого; $D_1(\lambda)$ – величина вільного зміщення точки штамп до моменту контактування з точкою λ контуру диска.

Компоненти вектора зміщення контурних точок диска при заданому навантаженні визначаються за формулами [3]

$$u(\lambda) + i \cdot v(\lambda) = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)(f_1(\lambda) + i \cdot f_2(\lambda)) + \frac{i}{\pi} \int_{\gamma} (f_1(\lambda) + i \cdot f_2(\lambda)) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt - \frac{e^{i\lambda}}{\pi} \int_{\gamma} T_{\rho}(t) dt + \frac{2i \cdot e^{i\lambda} M_0}{\pi} + C_1 + i \cdot C_2 \right], \quad (3)$$

де $f_1(\lambda) + i \cdot f_2(\lambda) = i \int_{\beta_1}^{\lambda} (T_{\rho}(t) + i \cdot S_{\rho\lambda}(t)) e^{it} dt$; E , ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу диска; C_1 , C_2 – дійсні сталі.

Враховуючи умови періодичності задачі та властивості функцій $f_1'(\lambda)$, $f_2'(\lambda)$ [4]

$$u\left(\lambda + \frac{2\pi k}{N}\right) + i \cdot v\left(\lambda + \frac{2\pi k}{N}\right) = (u(\lambda) + i \cdot v(\lambda)) e^{\frac{i2\pi k}{N}}, \quad \lambda \in [\beta_1; \beta_2], \quad k = \overline{1, N-1};$$

$$f_1'\left(\lambda + \frac{2\pi k}{N}\right) + i \cdot f_2'\left(\lambda + \frac{2\pi k}{N}\right) = (f_1'(\lambda) + i \cdot f_2'(\lambda)) e^{\frac{i2\pi k}{N}}, \quad \lambda \in [\beta_1; \beta_2], \quad k = \overline{1, N-1},$$

співвідношення (3) можна записати у вигляді

$$u(\lambda) = \left[\frac{N \cos \lambda}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} (f_1'(t) \sin t - f_2'(t) \cos t) dt + (1-\nu) \int_{\beta_1}^{\lambda} f_1'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(f_1'(t) \sin \frac{2\pi k}{N} + f_2'(t) \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda-t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| dt - \frac{2M_0}{\pi} \sin \lambda + C_1 \right] \frac{1}{2Eh};$$

$$v(\lambda) = \left[\frac{N \sin \lambda}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} (f_1'(t) \sin t - f_2'(t) \cos t) dt + (1-\nu) \int_{\beta_1}^{\lambda} f_2'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(f_2'(t) \sin \frac{2\pi k}{N} - f_1'(t) \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda-t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| dt + \frac{2M_0}{\pi} \cos \lambda + C_2 \right] \frac{1}{2Eh}, \quad (4)$$

де $C_1 = -\frac{(1-\nu)}{2} \left(f_1(\beta_2) - f_2(\beta_2) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{N} \right)$; $C_2 = -\frac{(1-\nu)}{2} \left(f_2(\beta_2) + f_1(\beta_2) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{N} \right)$.

Підстановка (4) в граничні умови (1), (2) призводить до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій $f_1'(\lambda)$ і $f_2'(\lambda)$. Крім цієї системи повинні виконуватися умови граничної рівноваги кожного штамп

$$f_2(\beta_2) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} f_2'(t) dt = -P_0; \quad f_1(\beta_2) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} f_1'(t) dt = -F_1;$$

$$\frac{F_1 \sqrt{r^2 - d^2} - M_1}{r} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} S_{\rho\lambda}(t) dt = -\frac{M_0}{NR}, \quad (5)$$

які служать для визначення невідомих величин U_0 , F_1 , M_1 .

Зведення отриманої системи інтегральних рівнянь до стандартного проміжку інтегрування $[-1; 1]$ реалізовано заміною змінних

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} &= \frac{b_2 - b_1}{2} x + \frac{b_2 + b_1}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{b_2 - b_1}{2} s + \frac{b_2 + b_1}{2}; \\ b_1 &= \operatorname{tg} \left(\frac{\beta_1}{2} \right); \quad b_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\beta_2}{2} \right), \quad \lambda, t \in [\beta_1; \beta_2], \quad x, s \in [-1; 1], \end{aligned} \quad (6)$$

яка призводить до нових невідомих функцій $\Phi_1(x)$ і $\Phi_2(x)$, пов'язаних із функціями $f_1'(\lambda)$ і $f_2'(\lambda)$ співвідношеннями

$$\Phi_j(x) = f_j'(\lambda) \frac{4(b_2 - b_1)}{4 + ((b_2 - b_1)x + b_2 + b_1)^2}, \quad (j = 1, 2). \quad (7)$$

В результаті побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій $\Phi_1(x)$ і $\Phi_2(x)$

$$\begin{aligned} &\frac{N}{\pi} \int_{-1}^1 (\Phi_1(s) \sin t - \Phi_2(s) \cos t) ds + \\ &+ \cos \lambda \left[(1 - \nu) \int_{-1}^x \Phi_1(s) ds - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(s) \ln \left| (x - s) \frac{(b_2 - b_1)}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \cos \frac{t}{2} \right| ds - \right. \\ &\left. - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-1}^1 \left(\Phi_1(s) \sin \frac{2\pi k}{N} + \Phi_2(s) \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda - t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| ds \right] + \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &+ \sin \lambda \left[(1 - \nu) \int_{-1}^x \Phi_2(s) ds + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_1(s) \ln \left| (x - s) \frac{(b_2 - b_1)}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \cos \frac{t}{2} \right| ds - \right. \\ &\left. - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-1}^1 \left(\Phi_2(s) \sin \frac{2\pi k}{N} - \Phi_1(s) \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda - t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| ds \right] = \\ &= (U_0 - D_1(\lambda)) 2Eh \cos \lambda - C_1 \cos \lambda - C_2 \sin \lambda, \quad \lambda \in [\beta_1; \beta_2], \quad x \in [-1; 1]; \\ &(1 - f \cdot \operatorname{tg} \lambda) \Phi_1(x) + (\operatorname{tg} \lambda + f) \Phi_2(x) = 0, \quad \lambda \in [\beta_1; \beta_2], \quad x \in [-1; 1]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\int_{-1}^1 \Phi_2(s) ds = -P_0; \quad \int_{-1}^1 \Phi_1(s) ds = -F_1; \quad \frac{F_1 \sqrt{r^2 - d^2} - M_1}{r} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} S_{\rho\alpha}(t) dt = -\frac{M_0}{NR}, \quad (10)$$

де

$$C_1 = \frac{(1 - \nu)}{2} \cdot \left(F_1 - P_0 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{N} \right); \quad C_2 = \frac{(1 - \nu)}{2} \cdot \left(P_0 + F_1 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{N} \right).$$

Якщо розв'язок задачі (8), (9), (10) стане відомий, то компоненти напруженого стану на контурі γ визначаються за формулами [4]

$$\begin{aligned} T_\rho(\lambda) &= \Phi_2(x) \cdot \frac{4 - ((b_2 - b_1)x + b_2 + b_1)^2}{4(b_2 - b_1)} - \Phi_1(x) \cdot \frac{(b_2 - b_1)x + b_2 + b_1}{b_2 - b_1}; \\ S_{\rho\alpha}(\lambda) &= f \cdot T_\rho(\lambda), \quad \lambda \in [\beta_1; \beta_2], \quad x \in [-1; 1]; \\ T_\lambda(\lambda) &= T_\rho(\lambda) - \frac{N \cdot f}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} T_\rho(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{N(\lambda - t)}{2} \right) dt, \quad \lambda \in [0; 2\pi]. \end{aligned} \quad (11)$$

Розглянемо тепер випадок $r < R$. Якщо зусилля P_0 забезпечує повне контактування поверхонь, то можна говорити про контактну задачу для однозв'язних симетричних штампів з кутовими точками [3, 4].

Система прямокутних і полярних координат вводиться аналогічно попередньому випадку (Рис. 3). Внутрішні межі несиметричних зон контакту характеризуються дуговими координатами β_1, β_2 . Тоді повна зона контакту може бути визначена наступним чином

$$L \equiv [-\alpha_0; \beta_1] \cup [\beta_2; \alpha_0] \cup \left[\frac{2\pi}{N} - \alpha_0; \frac{2\pi}{N} + \beta_1 \right] \cup \left[\frac{2\pi}{N} + \beta_2; \frac{2\pi}{N} + \alpha_0 \right] \cup \dots \cup \left[\frac{2\pi(N-1)}{N} - \alpha_0; \frac{2\pi(N-1)}{N} + \beta_1 \right] \cup \left[\frac{2\pi(N-1)}{N} + \beta_2; \frac{2\pi(N-1)}{N} + \alpha_0 \right].$$

Тут $\alpha_0 = \arcsin(d/R)$ – величина полярного кута точки диска, що співпадає із кутовою точкою штампа.

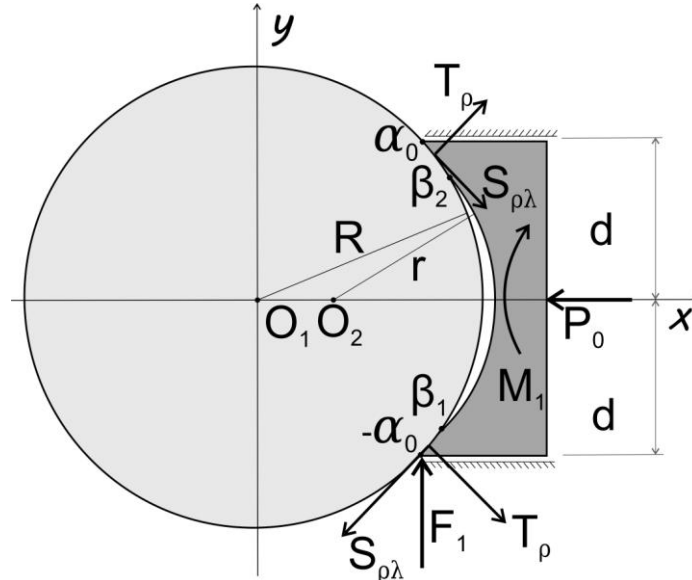


Рис. 3. Розрахункова схема для окремого штампа

Передача обертального моменту від системи напрямних до штампа реалізується силою реакції F_1 в крайній точці однієї із напрямних, що відповідає зовнішній межі зони контакту $-\alpha_0$, та моментом M_1 деякої пари сил.

Як і в попередньому випадку, умови дотику взаємодіючих тіл обираються у вигляді рівності нормальних зміщень спільних точок контактуючих поверхонь. В силу припущення про нерухомість точок контуру γ , що не контактують зі штампами, гранична умова (1) матиме вигляд

$$u(\lambda) + tg \lambda \cdot v(\lambda) = U_0 - D_2(\lambda), \quad \lambda \in L; \tag{12}$$

$$D_2(\lambda) = \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \lambda} - R \cos \lambda + \sqrt{R^2 - d^2} - \sqrt{r^2 - d^2}, \quad \lambda \in L.$$

Тут величина $D_2(\lambda)$ має той самий зміст, що і $D_1(\lambda)$ у граничній умові (1).

Вирази для компонент вектора зміщення контурних точок диска із врахуванням характеру зони контакту матимуть таку саму структуру, як і співвідношення (4). Підстановка їх у граничні умови (12) із врахуванням (2) призводить до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій $f_1'(\lambda)$ і $f_2'(\lambda)$. Крім цієї системи повинні виконуватися умови граничної рівноваги кожного штампа

$$f_2(\alpha_0) = \int_{-\alpha_0}^{\beta_1} f_2'(t) dt + \int_{\beta_2}^{\alpha_0} f_2'(t) dt = -P_0; \quad f_1(\alpha_0) = \int_{-\alpha_0}^{\beta_1} f_1'(t) dt + \int_{\beta_2}^{\alpha_0} f_1'(t) dt = -F_1; \tag{13}$$

$$\frac{F_1 \sqrt{r^2 - d^2} - M_1}{r} = \int_{-\alpha_0}^{\beta_1} S_{\rho\lambda}(t) dt + \int_{\beta_2}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}(t) dt = -\frac{M_0}{NR},$$

які служать для визначення невідомих величин U_0 , F_1 , M_1 .

Зведення отриманої системи інтегральних рівнянь до стандартного проміжку інтегрування $[-1; 1]$ реалізовано заміною змінних

$$tg \frac{\lambda}{2} = \frac{b_1 + a_0}{2} x + \frac{b_1 - a_0}{2}; \quad tg \frac{t}{2} = \frac{b_1 + a_0}{2} s + \frac{b_1 - a_0}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\tilde{\lambda}}{2} = \frac{a_0 - b_2}{2} \tilde{x} + \frac{a_0 + b_2}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{\tilde{t}}{2} = \frac{a_0 - b_2}{2} \tilde{s} + \frac{a_0 + b_2}{2}; \quad (14)$$

$$a_0 = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_0}{2} \right); \quad b_1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\beta_1}{2} \right); \quad b_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\beta_2}{2} \right),$$

$$\lambda, t \in [-\alpha_0; \beta_1], \quad \tilde{\lambda}, \tilde{t} \in [\beta_2; \alpha_0], \quad x, s, \tilde{x}, \tilde{s} \in [-1; 1],$$

яка призводить до нових невідомих функцій $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\tilde{\Phi}_1(\tilde{x})$, $\tilde{\Phi}_2(\tilde{x})$. Ці функції визначені на різних частинах ділянки контакту і пов'язані із $f_1'(\lambda)$ та $f_2'(\lambda)$ співвідношеннями

$$\Phi_j(x) = f_j'(\lambda) \frac{4(b_1 + a_0)}{4 + ((b_1 + a_0)x + b_1 - a_0)^2}, \quad (j = 1, 2), \quad \lambda \in [-\alpha_0; \beta_1], \quad x \in [-1; 1];$$

$$\tilde{\Phi}_j(\tilde{x}) = f_j'(\tilde{\lambda}) \frac{4(a_0 - b_2)}{4 + ((a_0 - b_2)\tilde{x} + a_0 + b_2)^2}, \quad (j = 1, 2), \quad \tilde{\lambda} \in [\beta_2; \alpha_0], \quad \tilde{x} \in [-1; 1]. \quad (15)$$

У результаті побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\tilde{\Phi}_1(\tilde{x})$, $\tilde{\Phi}_2(\tilde{x})$

$$\begin{aligned} & \frac{N}{\pi} \int_{-1}^1 (\Phi_1(s) \sin t - \Phi_2(s) \cos t) ds + \frac{N}{\pi} \int_{-1}^1 (\tilde{\Phi}_1(\tilde{s}) \sin \tilde{t} - \tilde{\Phi}_2(\tilde{s}) \cos \tilde{t}) d\tilde{s} + \\ & + \cos \lambda \left[(1 - \nu) \int_{-1}^x \Phi_1(s) ds - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(s) \ln \left| (x - s) \frac{(b_1 + a_0)}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \cos \frac{t}{2} \right| ds - \right. \\ & - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{\Phi}_2(\tilde{s}) \ln \left| \left(\frac{b_1 + a_0}{2} x + \frac{b_1 - a_0}{2} - \frac{a_0 - b_2}{2} \tilde{s} - \frac{a_0 + b_2}{2} \right) \cos \frac{\lambda}{2} \cos \frac{\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{s} - \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-1}^1 \left(\Phi_1(s) \sin \frac{2\pi k}{N} + \Phi_2(s) \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda - t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| ds - \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-1}^1 \left(\tilde{\Phi}_1(\tilde{s}) \sin \frac{2\pi k}{N} + \tilde{\Phi}_2(\tilde{s}) \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda - \tilde{t}}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| d\tilde{s} \left. \right] + \\ & + \sin \lambda \left[(1 - \nu) \int_{-1}^x \Phi_2(s) ds + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_1(s) \ln \left| (x - s) \frac{(b_1 + a_0)}{2} \cos \frac{\lambda}{2} \cos \frac{t}{2} \right| ds + \right. \\ & + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{s}) \ln \left| \left(\frac{b_1 + a_0}{2} x + \frac{b_1 - a_0}{2} - \frac{a_0 - b_2}{2} \tilde{s} - \frac{a_0 + b_2}{2} \right) \cos \frac{\lambda}{2} \cos \frac{\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{s} - \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-1}^1 \left(\Phi_2(s) \sin \frac{2\pi k}{N} - \Phi_1(s) \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda - t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| ds - \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-1}^1 \left(\tilde{\Phi}_2(\tilde{s}) \sin \frac{2\pi k}{N} - \tilde{\Phi}_1(\tilde{s}) \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \ln \left| \sin \left(\frac{\lambda - \tilde{t}}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| d\tilde{s} \left. \right] = \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & = (U_0 - D_2(\lambda)) 2Eh \cos \lambda - C_1 \cos \lambda - C_2 \sin \lambda, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \beta_1], \quad x \in [-1; 1]; \\ & (1 - f \cdot \operatorname{tg} \lambda) \Phi_1(x) + (\operatorname{tg} \lambda + f) \Phi_2(x) = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \beta_1], \quad x \in [-1; 1]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{N}{\pi} \int_{-1}^1 (\Phi_1(s) \sin t - \Phi_2(s) \cos t) ds + \frac{N}{\pi} \int_{-1}^1 (\tilde{\Phi}_1(\tilde{s}) \sin \tilde{t} - \tilde{\Phi}_2(\tilde{s}) \cos \tilde{t}) d\tilde{s} + \\
 & + \left[(1-\nu) \left(\int_{-1}^1 \Phi_1(s) ds + \int_{-1}^{\tilde{x}} \tilde{\Phi}_1(\tilde{s}) d\tilde{s} \right) - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{\Phi}_2(\tilde{s}) \ln \left| (\tilde{x} - \tilde{s}) \frac{(a_0 - b_2)}{2} \cos \frac{\tilde{\lambda}}{2} \cos \frac{\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{s} - \right. \\
 & - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(s) \ln \left| \left(\frac{a_0 - b_2}{2} \tilde{x} + \frac{a_0 + b_2}{2} - \frac{b_1 + a_0}{2} s - \frac{b_1 - a_0}{2} \right) \cos \frac{\tilde{\lambda}}{2} \cos \frac{t}{2} \right| ds - \\
 & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-1}^1 \left(\Phi_1(s) \sin \frac{2\pi k}{N} + \Phi_2(s) \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \ln \left| \sin \left(\frac{\tilde{\lambda} - t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| ds - \\
 & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-1}^1 \left(\tilde{\Phi}_1(\tilde{s}) \sin \frac{2\pi k}{N} + \tilde{\Phi}_2(\tilde{s}) \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \ln \left| \sin \left(\frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| d\tilde{s} \left. \right] \cos \tilde{\lambda} + \\
 & + \left[(1-\nu) \left(\int_{-1}^1 \Phi_2(s) ds + \int_{-1}^{\tilde{x}} \tilde{\Phi}_2(\tilde{s}) d\tilde{s} \right) + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{s}) \ln \left| (\tilde{x} - \tilde{s}) \frac{(a_0 - b_2)}{2} \cos \frac{\tilde{\lambda}}{2} \cos \frac{\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{s} + \right. \\
 & + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_1(s) \ln \left| \left(\frac{a_0 - b_2}{2} \tilde{x} + \frac{a_0 + b_2}{2} - \frac{b_1 + a_0}{2} s - \frac{b_1 - a_0}{2} \right) \cos \frac{\tilde{\lambda}}{2} \cos \frac{t}{2} \right| ds - \\
 & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-1}^1 \left(\Phi_2(s) \sin \frac{2\pi k}{N} - \Phi_1(s) \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \ln \left| \sin \left(\frac{\tilde{\lambda} - t}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| ds - \\
 & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{-1}^1 \left(\tilde{\Phi}_2(\tilde{s}) \sin \frac{2\pi k}{N} - \tilde{\Phi}_1(\tilde{s}) \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \ln \left| \sin \left(\frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} - \frac{k\pi}{N} \right) \right| d\tilde{s} \left. \right] \sin \tilde{\lambda} =
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 & = (U_0 - D_2(\tilde{\lambda})) 2Eh \cos \tilde{\lambda} - C_1 \cos \tilde{\lambda} - C_2 \sin \tilde{\lambda}, \quad \tilde{\lambda} \in [\beta_2; \alpha_0], \quad \tilde{x} \in [-1; 1]; \\
 & (1 - f \cdot \operatorname{tg} \tilde{\lambda}) \tilde{\Phi}_1(\tilde{x}) + (\operatorname{tg} \tilde{\lambda} + f) \tilde{\Phi}_2(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{\lambda} \in [\beta_2; \alpha_0], \quad \tilde{x} \in [-1; 1];
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \Phi_2(s) ds + \int_{-1}^1 \tilde{\Phi}_2(\tilde{s}) d\tilde{s} = -P_0; \quad \int_{-1}^1 \Phi_1(s) ds + \int_{-1}^1 \tilde{\Phi}_1(\tilde{s}) d\tilde{s} = -F_1; \\
 & \frac{F_1 \sqrt{r^2 - d^2} - M_1}{r} = \int_{-\alpha_0}^{\beta_1} S_{\rho\lambda}(t) dt + \int_{\beta_2}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}(t) dt = -\frac{M_0}{NR},
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

де

$$C_1 = \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \left(F_1 - P_0 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{N} \right), \quad C_2 = \frac{(1-\nu)}{2} \cdot \left(P_0 + F_1 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{N} \right).$$

Компоненти напруженого стану на контурі γ через функції $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\tilde{\Phi}_1(\tilde{x})$, $\tilde{\Phi}_2(\tilde{x})$ визначаються за формулами

$$\begin{aligned}
 T_\rho(\lambda) &= \Phi_2(x) \cdot \frac{4 - ((b_1 + a_0)x + b_1 - a_0)^2}{4(b_1 + a_0)} - \Phi_1(x) \cdot \frac{(b_1 + a_0)x + b_1 - a_0}{b_1 + a_0}, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \beta_1]; \\
 T_\rho(\tilde{\lambda}) &= \tilde{\Phi}_2(\tilde{x}) \cdot \frac{4 - ((a_0 - b_2)\tilde{x} + a_0 + b_2)^2}{4(a_0 - b_2)} - \tilde{\Phi}_1(\tilde{x}) \cdot \frac{(a_0 - b_2)\tilde{x} + a_0 + b_2}{a_0 - b_2}, \quad \tilde{\lambda} \in [\beta_2; \alpha_0]; \\
 S_{\rho\lambda}(\lambda) &= f \cdot T_\rho(\lambda), \quad \lambda \in [-\alpha_0; \beta_1] \cup [\beta_2; \alpha_0]; \\
 T_\lambda(\lambda) &= T_\rho(\lambda) - \frac{N \cdot f}{\pi} \left(\int_{-\alpha_0}^{\beta_1} T_\rho(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{N(\lambda - t)}{2} \right) dt + \int_{\beta_2}^{\alpha_0} T_\rho(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{N(\lambda - t)}{2} \right) dt \right), \quad \lambda \in [0; 2\pi].
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Висновки та перспективи подальших досліджень:

- запропонована модель дозволяє розв'язувати практичні задачі по оптимізації технічних систем, які передбачають фрикційну передачу обертального моменту від системи жорстких штампів до пружних тіл із круговими циліндричними поверхнями;
- уточнення граничних умов дотику взаємодіючих тіл враховує можливу різницю кривин контактуючих поверхонь та особливості передачі обертального моменту;
- побудована система сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами може бути розв'язана числово-аналітичними методами, зокрема комбінованим методом механічних квадратур та граничної колокації;
- числова реалізація системи рівнянь дозволяє встановити: положення і розміри ділянок контакту; компоненти напруженого стану на контурі пружного тіла; граничне значення обертального моменту, що передається силами тертя без проковзування при заданій величині притискного зусилля; величину поступального зміщення штампів.

Список використаних джерел:

1. Панасюк В.В. Деякі контактні задачі теорії пружності / В.В. Панасюк, М.Й. Теплий. – Київ: Наук. думка, 1975. – 195 с.
2. Теплый М.И. Контактные задачи для областей с круговыми границами / М.И. Теплый. – Львов: Вища школа, Изд-во при Львов. ун-те, 1983. – 176 с.
3. Сяський В.А. Вплив тертя на розподіл напружень при контакті гладких циліндричних тіл і штампів з кутовими точками / Сяський В.А. // Волинський математичний вісник. – 1999. – Вип. 6. – С. 127-134.
4. Сяський В.А. Контактна взаємодія пружного круглого диска із системою жорстких штампів з кутовими точками при наявності сил тертя / Сяський Володимир Андрійович // «Наука, освіта, суспільство очима молодих» : матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції студентів та молодих науковців : Ч. 2. – Рівне: РВВ РДГУ. – 2012. – С. 31-33.

Рецензенти:

Кундрат Микола Михайлович, професор кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки НУВГП, докт. тех. наук, професор;

Бомба Андрій Ярославович, завідувач кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету, докт. тех. наук, професор.

Стаття надійшла до редакції 22.11.2016.