

УДК 624.041

**В.М. Фомін, М.Г. Сур'янінов***Одеська державна академія будівництва та архітектури***ПЛОСКИЙ ЗГИН ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ БАЛКИ З УРАХУВАННЯМ ФІЗИЧНОЇ Й  
ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ І ПЛАСТИЧНОСТІ БЕТОНУ ПРИ СКЛАДНОМУ  
НАВАНТАЖЕННІ**

*Досліджений плоский згин залізобетонних балок з урахуванням фізичної й геометричної нелінійності й пластичності бетону при складному навантаженні з використанням відповідного диференціального рівняння. Пропонується алгоритм визначення коефіцієнтів цього рівняння. Визначена залежність збільшень головного вектора й головного моменту внутрішніх сил у поперечному перерізі балки, викликаних збільшенням зовнішнього навантаження, від збільшень кута повороту поперечного перерізу, і їх похідних по дуговій координаті із застосуванням асоційованого закону пластичного плину бетону. Визначені прогини балки шляхом розв'язання побудованого диференціального рівняння.*

*Ключові слова:* залізобетонна балка, плоский згин, фізична й геометрична нелінійності, пластичність бетону, складне навантаження, асоційований закон плину.

**В.М. Фомин, Н.Г. Сурьянинов****ПЛОСКИЙ ИЗГИБ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И  
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ И ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА ПРИ  
СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ**

*Исследован плоский изгиб железобетонных балок с учетом физической и геометрической нелинейности и пластичности бетона при сложном нагружении с использованием соответствующего дифференциального уравнения. Предлагается алгоритм определения коэффициентов этого уравнения. Определена зависимость приращений главного вектора и главного момента внутренних сил в поперечном сечении балки, вызванных приращением внешней нагрузки, от приращений угла поворота поперечного сечения, и их производных по дуговой координате с применением ассоциированного закона пластического течения бетона. Определены прогибы балки путем решения построенного дифференциального уравнения.*

*Ключевые слова:* железобетонная балка, плоский изгиб, физическая и геометрическая нелинейности, пластичность бетона, сложное нагружение, ассоциированный закон течения.

**V.M. Fomin, N. Suryaninov****FLAT BEND OF THE FERROCONCRETE BEAM TAKING INTO ACCOUNT PHYSICAL  
AND GEOMETRICAL NOT LINEARITIES AND PLASTICITY OF CONCRETE AT  
DIFFICULT LOADING**

*The flat bend of ferroconcrete beams taking into account physical and geometrical nonlinearity and plasticity of concrete at difficult loading with use of the corresponding differential equation is investigated. The algorithm of determination of coefficients of this equation is offered. Dependence of increments of the main vector and the main moment of the internal forces in the cross section of a beam caused by an increment of external loading, on increments of an angle of rotation of cross section, and their derivatives is determined by arc coordinate with application of the associated law of the plastic current of concrete. Beam deflections are determined by a solution of the constructed differential equation.*

*The algorithm allowing to define deflections of ferroconcrete beams at a step-by-step method of the solution of problems of a flat bend at difficult and intensive loading is offered.*

*Keywords:* ferroconcrete beam, flat bend, physical and geometrical nonlinearity, plasticity of concrete, difficult loading, the associated law of the current.

**Постановка проблеми.** Исследование поведения железобетонных конструкций с учетом нелинейной работы и пластических свойств материалов на динамические (в частности, сейсмические) воздействия является сложной задачей. Во многих странах на основе метода конечных элементов разработаны программные комплексы по нелинейному динамическому расчету конструкций. В ряде работ отечественных ученых [2,3,6–8] рассмотрены статические и динамические задачи для массивных железобетонных сооружений с учетом нелинейно упругих и пластических свойств бетона и предложены их решения на основе метода конечных элементов.

Следует отметить, что порядок системы разрешающих уравнений метода конечных элементов достаточно высок, особенно в случаях учета нелинейных и пластических свойств материалов. Требуется разбиение элементов железобетонных рам на большое количество мелких конечных элементов, поскольку деформационные свойства бетона различны в сжатой и растянутой зонах. Кроме того, необходимо указать, находится ли данный элементарный объем в стадии нагружения или разгрузки.

**Целью** нашего исследования является разработка альтернативных методов нелинейного динамического расчета конструкций, в частности, метода граничных элементов, для применения которого необходимо наличие дифференциальных уравнений изгиба.

**Результаты исследований.**

**1. Вывод дифференциального уравнения изгиба**

Рассмотрим деформацию балки постоянного прямоугольного поперечного сечения, подверженной действию сил, лежащих в одной из плоскостей симметрии его поперечного сечения. В этом случае стержень будет испытывать не только поперечный изгиб, но и продольную деформацию растяжения или сжатия.

Выберем в недеформированном состоянии балки систему координат  $x_1, x_2, x_3$  так, как показано на рис.1, причем ось  $x_1$  направим вдоль оси балки (т.е. через центры тяжести поперечных сечений). Выберем материальную точку  $K$  балки, положение которой в недеформированном состоянии определяется тремя материальными координатами  $x_1, x_2, x_3$ .

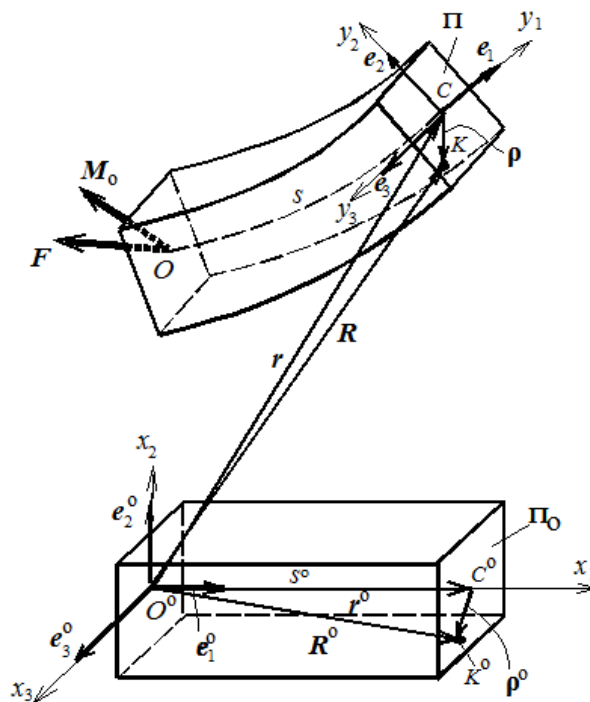


Рис. 1. - Выбор системы координат

Положение точки  $K$  определим при помощи ее радиус-вектора  $\mathbf{R}(s^0, x_2, x_3)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(s^0, x_2, x_3) &= \mathbf{r}(s^0) + \boldsymbol{\rho}(s^0, x_2, x_3), \\ \boldsymbol{\rho}(s^0, x_2, x_3) &= \sum_{n=1}^3 y_n(s^0, x_2, x_3) \mathbf{e}_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{r}(s^0)$  — радиус-вектор точки  $K$  после деформации;  $y_n(s^0, x_2, x_3)$  ( $n=1,2,3$ ) — скалярные функции координат  $s^0$ ,  $x_2$  и  $x_3$ ;  $\mathbf{e}_1$  — единичный вектор касательной к деформированной оси балки в точке  $K$ ;  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  — два взаимно перпендикулярных орта в плоскости  $\Pi$ , перпендикулярной вектору  $\mathbf{e}_1$ , проведенные аналогично векторам  $\mathbf{e}_2^0$  и  $\mathbf{e}_3^0$ . При этом, очевидно, что  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^0$ .

Из (1) следует, что выполнение гипотезы плоских сечений не предполагается, т.к. первое слагаемое в правой части формулы для  $\boldsymbol{\rho}(s^0, x_2, x_3)$  дает смещение точки  $K$  в направлении, перпендикулярном плоскости  $\Pi$ , т.е. представляет депланацию сечения.

Пренебрежем деформацией балки в направлении вектора  $\mathbf{e}_3^0$  (т.е. будем рассматривать случай, когда размеры поперечного сечения и нагрузка позволяют принять предположение, что балка находится в состоянии, близком к плоской деформации). Тогда функции  $y_n(s^0, x_2, x_3)$  ( $n = 1, 2$ ) будут функциями только координат  $s^0$  и  $x_2$ , а  $y_3 = x_3$ . Очевидно,

$$y_1(s^0, x_2) = u_1(s^0, x_2), y_2(s, x_2) = x_2 + u_2(s^0, x_2). \quad (2)$$

$u_n$  ( $n = 1, 2$ ) — перемещения точки  $K$  вдоль осей  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Построим тензор  $\mathbf{T}$ , именуемый в [10] *градиентом движения*, пользуясь диадным представлением его как двойного тензора

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^0. \quad (3)$$

Здесь

$$\mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i}, \quad \mathbf{R}_i^0 = \frac{\partial \mathbf{R}^0}{\partial x_i}. \quad (4)$$

Разложим векторы  $\mathbf{R}_i$  и  $\mathbf{R}_i^0$  по векторам базисов  $\mathbf{e}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и  $\mathbf{e}_k^0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) соответственно:

$$\mathbf{R}_i = \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{R}_i^0 = \sum_{k=1}^3 R_{ik}^0 \mathbf{e}_k^0. \quad (5)$$

Кроме того, разложим векторы  $\mathbf{e}_k^0$  по векторам базиса  $\mathbf{e}_m$  ( $m = 1, 2, 3$ )

$$\mathbf{e}_k^0 = \sum_{m=1}^3 \beta_{km} \mathbf{e}_m. \quad (6)$$

Подставив (5) и (6) в (3) и учитывая ортонормированность векторов  $\mathbf{e}_k^0$  ( $k = 1, 2, 3$ ), будем иметь

$$\mathbf{T} = \sum_{m,l=1}^3 T_{ml} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_l, \quad T_{ml} = \sum_{i,k=1}^3 \beta_{km} R_{ik}. \quad (7)$$

Учитывая, что  $\frac{d\mathbf{r}^0}{ds^0} = \mathbf{e}_1^0$ , из (5) получаем

$$R_{ik}^0 = 0 \quad (i \neq k), \quad R_{ii}^0 = 1 \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Принимая во внимание, что [10]

$$\frac{d}{ds^0} = \lambda_s \frac{d}{ds} \quad (\lambda_s = \frac{ds}{ds^0}), \quad \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \phi' \mathbf{e}_2, \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -\phi' \mathbf{e}_1 \quad (\phi' = \frac{d\phi}{ds}), \quad (9)$$

находим из (1), что

$$\mathbf{R}_1 = \lambda_s [(1 - y_2 \phi') \mathbf{e}_1 + y_1 \phi' \mathbf{e}_2], \quad \mathbf{R}_2 = y_{1,2} \mathbf{e}_1 + y_{2,2} \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{e}_3, \quad (10)$$

где  $y_{1,2} = dy_1 / dx_2$ ,  $y_{2,2} = dy_2 / dx_2$ ,  $\phi$  — угол между  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_1^0$ .

Заметим, что  $\lambda_s$  называется *кратностью удлинения оси стержня* [10], и характеризует степень удлинения или сжатия оси стержня в данном сечении.

Из (10) получаем

$$R_{11} = \lambda_s (1 - y_2 \phi'), \quad R_{12} = \lambda_s y_1 \phi', \quad R_{21} = y_{1,2}, \quad R_{22} = y_{2,2}, \quad R_{33} = 1, \quad (11)$$

а остальные коэффициенты  $R_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) равны нулю.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\beta_{11} = \cos \phi, \quad \beta_{12} = -\sin \phi, \quad \beta_{21} = \sin \phi, \quad \beta_{22} = \cos \phi, \quad \beta_{33} = 1, \quad (12)$$

а остальные  $\beta_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) равны нулю.

Подставляя (9), (11) и (12) в (7), находим

$$\begin{aligned} T_{11} &= \lambda_s [(1 - y_2 \phi') \cos \phi + y_1 \phi' \sin \phi], \quad T_{12} = y_{1,2} \cos \phi + y_{2,2} \sin \phi, \\ T_{21} &= \lambda_s [-(1 - y_2 \phi') \sin \phi + y_1 \phi' \cos \phi], \quad T_{22} = -y_{1,2} \sin \phi + y_{2,2} \cos \phi, \\ T_{33} &= 1 \end{aligned} \quad (13)$$

Остальные величины  $T_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) равны нулю.

Используя формулы [10]

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^*) - \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^*) \quad (14)$$

( $\mathbf{T}^*$  — тензор, сопряженный тензору  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор), получаем тензоры линейных деформаций и вращения. С их помощью определяются элементы тензора конечных деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  [10]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= e_{ii} + \frac{1}{2}[e_{ii}^2 + (e_{ik} - \omega_{ik})^2 + (e_{im} - \omega_{im})^2]; \\ \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + \frac{1}{2}[e_{ii}(e_{ij} + \omega_{ij}) + e_{jj}(e_{ij} - \omega_{ij}) + (e_{ik} - \omega_{ik})(e_{jk} - \omega_{jk})]; \\ &(i < j, k \neq i, m \neq i, m \neq k, k \neq j). \end{aligned} \quad (15)$$

( $e_{ij}$  — элементы тензора линейных деформаций,  $\omega_{ij}$  — элементы тензора вращения).

Заметим, что  $\lambda_s = \frac{ds}{ds^0} = \frac{ds - ds^0 + ds^0}{ds^0} = 1 + \varepsilon_s$ . Из (13) - (15) получаем

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\lambda_s^2 - 1 - 2\lambda_s^2 y_2 \phi'), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(y_{1,2}^2 + y_{2,2}^2 - 1), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\lambda_s y_{1,2}. \quad (16)$$

При выводе (16) предполагалось, что слагаемыми, содержащими выражения типа  $(x_2 \phi')^2$  можно пренебречь, т.е. что радиус кривизны оси балки значительно больше размеров ее поперечного сечения. Учитывая, что  $\varepsilon_s \ll 1$ , (16) можно представить так:

$$\varepsilon_{11} = -y_2 \phi', \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(y_{1,2}^2 + y_{2,2}^2 - 1), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} y_{1,2}. \quad (17)$$

Остальные элементы тензора конечных деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  равны нулю.

В теории пластического течения [4,5,9] приращения деформаций представляются в виде суммы упругих и пластических составляющих:

$$d[\boldsymbol{\varepsilon}] = d[\boldsymbol{\varepsilon}_e] + d[\boldsymbol{\varepsilon}_p]. \quad (18)$$

Здесь  $[\boldsymbol{\varepsilon}]$  — вектор деформаций, т.е. вектор с элементами

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_1 = \varepsilon_{1,1}, \quad [\boldsymbol{\varepsilon}]_2 = \varepsilon_{2,2}, \quad [\boldsymbol{\varepsilon}]_3 = \varepsilon_{1,2}. \quad (19)$$

В соответствии с ассоциированным законом течения приращение пластической деформации может быть представлено в следующем виде:

$$d[\boldsymbol{\varepsilon}]_p = \mathfrak{G} \frac{\partial \Phi([\boldsymbol{\sigma}], \chi)}{\partial [\boldsymbol{\sigma}]}, \quad (20)$$

где  $\Phi$  — функция нагружения

$$\Phi([\boldsymbol{\sigma}], \chi) = \Phi_l([\boldsymbol{\sigma}]) + h(\chi) \quad (21)$$

( $\Phi_l([\boldsymbol{\sigma}])$  — функция, определяющая предельную поверхность  $\Phi_l([\boldsymbol{\sigma}]) = 0$  в пространстве напряжений,  $h(\chi)$  — функция упрочнения,  $\chi$  — параметр упрочнения),  $\mathfrak{G}$  — коэффициент, определяющий величину приращения пластических деформаций,  $[\boldsymbol{\sigma}]$  — вектор напряжений, т.е. вектор с элементами

$$[\boldsymbol{\sigma}]_1 = \sigma_{1,1}, \quad [\boldsymbol{\sigma}]_2 = \sigma_{2,2}, \quad [\boldsymbol{\sigma}]_3 = \sigma_{1,2}. \quad (22)$$

По закону Гука

$$d[\boldsymbol{\varepsilon}]_e = \mathbf{D}_e^{-1} d[\boldsymbol{\sigma}].$$

Матрица  $\mathbf{D}_e$  для линейно упругого изотропного материала в случае плоской деформации имеет следующий вид:

$$D_e = \frac{2G_0}{1-\mu_0} \begin{bmatrix} 1 & \mu_0 & 0 \\ \mu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu_0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Здесь  $G_0$  — начальный модуль сдвига,  $\mu_0 = \nu_0 / (1 - \nu_0)$ ,  $\nu_0$  — начальный коэффициент Пуассона.

Подставляя (23) и (20) в (18), будем иметь

$$d[\varepsilon] = D_e^{-1} d[\sigma] + \vartheta \frac{\partial \Phi([\sigma], \chi)}{\partial [\sigma]}. \quad (24)$$

Следуя далее [4,8], получаем

$$d[\sigma] = D_{ep} d[\varepsilon], \quad (25)$$

где

$$D_{ep} = D_e - \frac{D_e \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} \right]^T D_e}{\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} \right]^T D_e \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]} - \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} [\sigma]^T \frac{\partial \Phi}{\partial [\sigma]}}. \quad (26)$$

Будем строить функцию нагружения:

$$\Phi([\sigma], \chi) = \Phi_l([\sigma]) + h(\chi) \quad (27)$$

( $\Phi_l([\sigma])$  — функция, определяющая предельную поверхность и условие прочности  $\Phi_l([\sigma]) = 0$  в пространстве напряжений,  $h(\chi)$  — функция упрочнения).

Используем приведенное в [1] условие прочности:

$$\Phi_l([\sigma]) = 0, \quad (28)$$

где  $\Phi_l([\sigma])$  в случае плоской деформации имеет следующий вид:

$$\Phi_l([\sigma]) = (\sigma_{1,1} - \sigma_{2,2})^2 - 2(R_c - R_p)(\sigma_{1,1} - \sigma_{2,2}) + 4\sigma_{1,2}^2 - \frac{1}{3}(R_c - R_p)^2. \quad (29)$$

Представим приращение возможной работы напряжений на пластических деформациях как приращение параметра упрочнения  $\chi$ :

$$\partial \chi = \sigma_0 \partial \varepsilon_{p,0} + \tau_0 \partial \gamma_{p,0}$$

( $\partial \varepsilon_{p,0}$  и  $\partial \gamma_{p,0}$  — приращения объемных пластических деформаций и пластических деформаций октаэдрического сдвига).

Примем в качестве функции упрочнения следующую функцию:

$$h(\chi) = -\Phi_l([\sigma(\chi)]). \quad (30)$$

Здесь  $\Phi_l([\sigma])$  имеет вид (29), но при этом предполагается, что элементы вектора  $[\sigma]$  являются функциями параметра упрочнения,

Учитывая, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = - \frac{\partial \Phi_l}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \chi} - \frac{\partial \Phi_l}{\partial \tau_0} \frac{\partial \tau_0}{\partial \chi},$$

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \chi} = \frac{\partial \sigma_0}{\sigma_0 \partial \varepsilon_{p,0} + \tau_0 \partial \gamma_{p,0}} = \frac{K_p H_p}{\sigma_0 H_p + \tau_0 K_p}, \quad \frac{\partial \tau_0}{\partial \chi} = \frac{\partial \tau_0}{\sigma_0 \partial \varepsilon_{p,0} + \tau_0 \partial \gamma_{p,0}} = \frac{G_p}{\tau_0}$$

( $K_p = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_{p,0}}$  — пластический объемный модуль,  $H_p = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \gamma_{p,0}}$  — пластический модуль дилатации),

находим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \chi} = - \frac{K_p H_p}{\sigma_0 H_p + \tau_0 K_p} \frac{\partial \Phi_l}{\partial \sigma_0} - \frac{G_p}{\tau_0} \frac{\partial \Phi_l}{\partial \tau_0}. \quad (31)$$

Следуя далее [8], приходим к следующим соотношениям:

$$G_p = \frac{G_0 G}{G_0 - G}, \quad G = \frac{G_0}{\lambda} \xi'(\eta), \quad (32)$$

$(\xi'(\eta) = \lambda(1 - B\eta^2 - 2C\eta^3)/(1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3)^2$ ,  $G_0$  – начальный модуль сдвига бетона,  $\eta = \gamma_0 / \hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\gamma}_0$  – абсцисса вершины диаграммы  $\tau_0 = \tau_0(\gamma_0)$ , формулы для определения параметров  $A, B, C, \lambda$  приведены в [8]),

$$K_p = \frac{K_0 K}{K_0 - K}, K = \frac{K_0}{\lambda} f_2(\zeta) \xi'(\eta), H_p = f_1(\eta) f_2(\zeta) \frac{R_p}{R_c \hat{\gamma}_0 (1 - \zeta)^2} \quad (33)$$

( $K_0$  – начальный объемный модуль упругости бетона,  $\eta = \varepsilon_0 / \hat{\varepsilon}_0$ ,  $f_1(\eta) = \hat{\sigma}_0 \xi(\eta)$ ,  $\xi(\eta) = \lambda \eta / (1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3)$ ,  $\hat{\varepsilon}_0, \hat{\sigma}_0$  – координаты вершины диаграммы  $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon_0)$ ,  $\zeta = \gamma_0 / \hat{\gamma}_0$ ,  $f_2(\zeta) = \exp(R_p \zeta / R_c (1 - \zeta))$ ).

Соотношения (28)–(33) позволяют определить все элементы матрицы  $D_{ep}$ .

Введем обозначения

$$\xi_1 = \phi, \xi_2 = \phi'. \quad (34)$$

Частные производные какой-либо функции  $f$  по величинам, представленным в (34), будем обозначать так:

$$f_r^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial \xi_r} \quad (r = 1, 2). \quad (35)$$

Тогда

$$d\beta_{i,k} = \sum_{r=1}^2 (\beta_{i,k})_r^{(1)} d\xi_r \quad (i, k = 1, 2).$$

Здесь

$$\beta_{11}^{(1)} = -\sin \phi, \beta_{12}^{(1)} = -\cos \phi, \beta_{21}^{(1)} = \cos \phi, \beta_{22}^{(1)} = -\sin \phi.$$

(остальные из коэффициентов  $(\beta_{i,k})_r^{(1)}$  ( $i, k = 1, 2, 3; r = 1, 2, \dots, 6$ ) равны нулю).

Будем разыскивать функции  $u_1(s^0, x_2)$  и  $u_2(s^0, x_2)$  в следующем виде:

$$u_1(s^0, x_2) = a_1(s^0)x_2 + a_2(s^0)x_2^2 + a_3(s^0)x_2^3, u_2(s^0, x_2) = a_4(s^0)x_2 + a_5(s^0)x_2^2 + a_6(s^0)x_2^3.$$

Тогда

$$y_1 = a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3, y_2 = x_2 + a_4 x_2 + a_5 x_2^2 + a_6 x_2^3, \\ y_{1,2} = \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = a_1 + 2a_2 x_2 + 3a_3 x_2^2, y_{2,2} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 1 + a_4 + 2a_5 x_2 + 3a_6 x_2^2,$$

Введем аналогично (35) обозначения

$$f_j^{(2)} = \frac{\partial f}{\partial a_j} \quad (j = 1, 2, \dots, 6). \quad (36)$$

Тогда

$$dy_k = \sum_{j=1}^6 (y_k)_j^{(2)} da_j, dy_{k,2} = \sum_{j=1}^6 (y_{k,2})_j^{(2)} da_j \quad (k = 1, 2).$$

где  $(y_1)_j^{(2)} = x_2^j, (y_{1,2})_j^{(2)} = jx_2^{j-1}$  ( $j = 1, 2, 3$ );  $(y_2)_j^{(2)} = x_2^{j-3}, (y_{2,2})_j^{(2)} = (j-3)x_2^{j-4}$  ( $j = 4, 5, 6$ ) (неуказанные здесь коэффициенты  $(y_k)_j^{(2)}$  и  $(y_{k,2})_j^{(2)}$  ( $k = 1, 2; j = 1, 2, \dots, 6$ ) равны нулю).

Переходим теперь к определению приращений деформаций  $d[\varepsilon]$ . Из (17) получаем

$$d\varepsilon_{11} = -dy_2 \phi' - y_2 d\phi', d\varepsilon_{22} = y_{1,2} dy_{1,2} + y_{2,2} dy_{2,2}, d\varepsilon_{12} = 0.5 dy_{1,2},$$

что может быть записано так:

$$d\varepsilon_{11} = -\sum_{j=1}^6 \phi' (y_2)_j^{(2)} da_j - y_2 d\phi', d\varepsilon_{22} = \sum_{j=1}^6 y_{1,2} (y_{1,2})_j^{(2)} da_j + \sum_{j=1}^6 y_{2,2} (y_{2,2})_j^{(2)} da_j, d\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 (y_{1,2})_j^{(2)} da_j.$$

Отсюда с использованием обозначений (35) и (36) получаем

$$d[\varepsilon]_m = \sum_{r=1}^2 ([\varepsilon]_m)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^6 ([\varepsilon]_m)_j^{(2)} da_j \quad (m = 1, 2, 3), \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned}
 ([\varepsilon]_1)_2^{(1)} &= -y_2, ([\varepsilon]_1)_j^{(2)} = -\xi_2(y_2)_j^{(2)}, ([\varepsilon]_2)_j^{(2)} = y_{1,2}(y_{1,2})_j^{(2)} + y_{2,2}(y_{2,2})_j^{(2)}, \\
 ([\varepsilon]_3)_j^{(2)} &= \frac{1}{2}(y_{1,2})_j^{(2)} \quad (j = 1, 2, \dots, 6)
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

(остальные величины из  $([\varepsilon]_m)_r^{(1)}$  ( $m = 1, 2, 3; r = 1, 2$ ) и  $([\varepsilon]_m)_j^{(2)}$  ( $m = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 6$ ) равны нулю).

Из (37) получаем

$$\begin{aligned}
 d[\sigma]_i &= \sum_{r=1}^2 ([\sigma]_i)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^6 ([\sigma]_i)_j^{(2)} da_j, ([\sigma]_i)_r^{(1)} = \sum_{k=1}^3 D_{ep,i,k} ([\varepsilon]_k)_r^{(1)}, \\
 ([\sigma]_i)_j^{(2)} &= \sum_{k=1}^3 D_{ep,i,k} ([\varepsilon]_k)_j^{(2)} \quad (i, k = 1, 2, 3; r = 1, 2; j = 1, 2, \dots, 6).
 \end{aligned}$$

**Представление  $dM$  и  $dQ$  в виде функций приращений угла  $\varphi$  и их производных.**

Запишем граничные условия на гранях балки

$$d\sigma_{22} = d\sigma_{12} = 0 \text{ при } x_2 = \pm h/2$$

или в обозначениях (22)

$$d[\sigma]_2 = d[\sigma]_3 = 0 \text{ при } x_2 = \pm h/2, \tag{39}$$

( $b$  и  $h$  — размеры поперечного сечения балки). Подставляя сюда  $d[\sigma]$  с учетом (37) и (38), получаем

$$\sum_{r=1}^2 W_{i,r}^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^6 W_{i,j}^{(2)} da_j = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{40}$$

где

$$W_{1,r}^{(1)} = ([\sigma]_2)_r^{(1)} \left(-\frac{h}{2}\right), W_{2,r}^{(1)} = ([\sigma]_2)_r^{(1)} \left(\frac{h}{2}\right), W_{3,r}^{(1)} = ([\sigma]_3)_r^{(1)} \left(-\frac{h}{2}\right), W_{4,r}^{(1)} = ([\sigma]_3)_r^{(1)} \left(\frac{h}{2}\right)$$

(аналогичные формулы справедливы и для  $W_{i,j}^{(2)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, \dots, 6$ )).

Из равенства

$$Q = Q_{\sigma} + Q_a$$

( $Q$  — главных вектор внутренних сил, приложенных к поперечному сечению,  $Q_{\sigma}$  — главный вектор внутренних сил в бетоне,  $Q_a$  — в арматуре) следует

$$dQ = dQ_{\sigma} + dQ_a.$$

Проекция  $dQ_{\sigma}$  и  $dQ_a$  на оси  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ), ортами которых являются вектора  $e_i$  ( $i = 1, 2$ ), определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 dQ_{\sigma,m} &= b \int_{-h/2}^{h/2} d\sigma_{1,m}(x_2) dx_2 \quad (m = 1, 2) \\
 dQ_{a,1} &= E_a \sum_{k=1}^{n_a} d\varepsilon_{1,1}(x_{2,k}) S_k, dQ_{a,2} = G_a \sum_{k=1}^{n_a} d\varepsilon_{1,2}(x_{2,k}) S_k.
 \end{aligned}$$

Здесь  $E_a$ ,  $G_a$  — модуль упругости и модуль сдвига арматуры (она полагается идеально упругой),  $n_a$  — количество стержней,  $x_{2,k}$  — координаты  $x_2$  центра тяжести его сечения стержня с номером  $k$ ,  $S_k$  — площадь его сечения.

Используя (37), проекции вектора  $dQ$  на оси  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) можно записать так:

$$dQ_i := \sum_{r=1}^2 (Q_i)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^6 (Q_i)_j^{(2)} da_j \quad (i = 1, 2), \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned}
 (Q_1)_r^{(1)} &= b \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{1,1})_r^{(1)}(x_2, x_3) dx_2 + E_a \sum_{k=1}^{n_a} \sum_{r=1}^6 (\varepsilon_{1,1})_r^{(1)}(x_{2,k}, x_{3,k}) S_k, \\
 (Q_i)_r^{(1)} &= b \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{1,i})_r^{(1)}(x_2, x_3) dx_2 + G_a \sum_{k=1}^{n_a} (\varepsilon_{1,i})_r^{(1)}(x_{2,k}, x_{3,k}) S_k \quad (i = 2, 3).
 \end{aligned}$$

Для  $(Q_i)_j^{(2)}$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) имеют место аналогичные формулы.

Из условий равновесия сегмента балки, изображенного на рис. 1, имеем

$$dQ + dF = 0,$$

а так как  $dF$  предполагается заданным в системе координат  $x_1x_2x_3$ , причем лежащим в плоскости  $x_1x_2$  (т.е.  $dF = \sum_{i=1}^2 dF_i^0 e_i^0$ ), то согласно (6) находим, что

$$dQ_m = -\sum_{k=1}^2 \beta_{m,k} dF_k \quad (m = 1, 2). \quad (42)$$

Используя (41) эти равенства можно записать так:

$$\sum_{r=1}^2 (Q_m)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^6 (Q_m)_j^{(2)} da_j + \sum_{k=1}^2 \beta_{m,k} dF_k = 0 \quad (m = 1, 2). \quad (43)$$

Равенства (40) и (43) можно записать в виде единой системы уравнений

$$\sum_{j=1}^6 \Psi_{i,j} da_j = \sum_{r=1}^2 \Phi_{i,r} d\xi_r + \sum_{k=1}^2 P_{i,k} dF_k \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (44)$$

если положить  $\Psi_{i,j} = W_{i,j}^{(2)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, \dots, 6$ ),  $\Psi_{i,j} = (Q_{i-4})_j^{(2)}$  ( $i = 5, 6; j = 1, 2, \dots, 6$ ),  $\Phi_{i,r} = -W_{i,r}^{(1)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4; r = 1, 2$ ),  $\Phi_{i,r} = -(Q_{i-4})_r^{(1)}$  ( $i = 5, 6; r = 1, 2$ ),  $P_{i,k} = 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2$ ),  $P_{i,k} = -\beta_{i-4,k}$  ( $i = 5, 6; k = 1, 2$ ).

Обозначим решение системы (44) с правой частью, равной  $[\Phi]^{(r)}$  ( $[\Phi]^{(r)}$  — столбец, элементами которого являются  $\Phi_{i,r}$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ )), через  $a_i^{(r)}$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), а с правой частью  $[P]^{(k)}$  — через  $b_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Очевидно, решение системы (44) имеет следующий вид:

$$da_i = \sum_{r=1}^2 a_i^{(r)} d\xi_r + \sum_{k=1}^2 b_i^{(k)} dF_k \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (45)$$

**Построение дифференциального уравнения изгиба.** Нетрудно убедиться в том, что для приращений момента внутренних усилий относительно оси  $y_3$  имеют место следующее равенство:

$$dM_{вн,3} = dM_{б,3} + dM_{а,3}$$

( $dM_{б,3}$  — приращение момента внутренних усилий в бетоне,  $dM_{а,3}$  — в арматуре), причем

$$dM_{б,3} = -b \int_{-h/2}^{h/2} d\sigma_{1,1}(x_2) x_2 dx_2, \quad dM_{а,3} = -E_a \sum_{k=1}^{n_a} d\varepsilon_{1,1}(x_{2,k}, x_{3,k}) x_{2,k} S_k$$

( $b$  — ширина поперечного сечения балки,  $E_a$  — модуль упругости арматуры (она полагается идеально упругой),  $n_a$  — количество стержней,  $x_{2,k}$  и  $x_{3,k}$  — координаты центра тяжести поперечного сечения стержня арматуры с номером  $k$ ,  $S_k$  — площадь его сечения).

Приращение момента внутренних сил  $dM_3$  можно представить так:

$$dM_3 := \sum_{r=1}^2 (M_3)_r^{(1)} d\xi_r + \sum_{j=1}^6 (M_3)_j^{(2)} da_j, \quad (46)$$

где

$$(M_3)_r^{(1)} = -b \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{1,1})_r^{(1)}(x_2) x_2 dx_2 - E_a \sum_{k=1}^{n_a} (\varepsilon_{1,1})_r^{(1)}(x_{2,k}, x_{3,k}) x_{2,k} S_k.$$

Аналогичные формулы могут быть записаны и для  $(M_3)_j^{(2)}$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ).

Используя (45) находим, что

$$dM_3 = \sum_{r=1}^2 (M_3)_r^{(3)} d\xi_r + \sum_{k=1}^2 (M_3)_k^{(4)} dF_k, \quad (47)$$

где  $(M_3)_r^{(3)} = (M_3)_r^{(1)} + \sum_{j=1}^6 (M_3)_j^{(2)} a_j^{(r)}$ ,  $(M_3)_k^{(4)} = \sum_{j=1}^6 (M_3)_j^{(2)} b_j^{(k)}$ .



Аналогично может быть представлено равенство (41):

$$dQ_i = \sum_{r=1}^2 (Q_i)_r^{(3)} d\xi_r + \sum_{k=1}^2 (Q_i)_k^{(4)} dF_k \quad (i = 1, 2), \quad (48)$$

в котором  $(Q_i)_r^{(3)} = (Q_i)_r^{(1)} + \sum_{j=1}^6 (Q_i)_j^{(2)} a_j^{(r)}$ ,  $(Q_i)_k^{(4)} = \sum_{j=1}^6 (Q_i)_j^{(2)} b_j^{(k)}$ .

Воспользуемся соотношением [10]

$$dM'_3 = -dQ_2. \quad (49)$$

Из (47) находим

$$dM'_3 = \sum_{r=1}^2 [(M_3)_r^{(3)}]' d\xi_r + \sum_{r=1}^2 (M_3)_r^{(3)} d\xi'_r + \sum_{k=1}^2 [(M_i)_k^{(4)}]' dF_k. \quad (50)$$

Используя (48) и (50), равенство (49) можно записать так:

$$(M_3)_2^{(3)} d\xi'_2 + \{ (M_3)_1^{(3)} + [(M_3)_2^{(3)}]' + (Q_2)_2^{(3)} \} d\xi_2 + \{ [(M_3)_1^{(3)}]' + (Q_2)_1^{(3)} \} d\xi_1 + \\ + \sum_{k=1}^2 \{ [(M_i)_k^{(4)}]' + (Q_2)_k^{(4)} \} dF_k = 0,$$

т.е.

$$Xd\phi'' + Yd\phi' + Zd\phi + U = 0, \quad (51)$$

где

$$X = (M_3)_2^{(3)}, Y = (M_3)_1^{(3)} + [(M_3)_2^{(3)}]' + (Q_2)_2^{(3)},$$

$$Z = [(M_3)_1^{(3)}]' + (Q_2)_1^{(3)}, U = \sum_{k=1}^2 \{ [(M_i)_k^{(4)}]' + (Q_2)_k^{(4)} \} dF_k.$$

Равенство (51) представляет собой дифференциальное уравнение для нахождения приращений угла  $\phi$  поворота поперечного сечения балки, вызванных приращениями силы  $F$  и момента  $M_0$ . Из условий равновесия отрезка балки имеем

$$dM_3 + M_3(dF) + dM_0 = 0.$$

Здесь  $M_3(dF)$  — момент приращения силы  $F$  относительно оси  $y_3$ ,  $dM_0$  — приращение проекции момента  $M_0$  на эту ось. При  $s = 0$  это равенство будет выглядеть так

$$(M_3)_2^{(3)}(0)d\phi'(0) + (M_3)_1^{(3)}(0)d\phi(0) + \sum_{k=1}^2 (M_3)_k^{(4)}(0)dF_k + dM_0 = 0. \quad (52)$$

Это соотношение представляет собой одно из начальных условий для уравнения (51). Оставшееся начальное условие определяется из условия закрепления левого конца балки.

В результате решения уравнения (51) определяем  $d\phi$  как функцию  $s$ . Прибавляя его к найденному значению угла  $\phi$  на предыдущем шаге, получаем новое значение этого угла:

$$\phi(s) = \phi_{пред}(s) + d\phi(s),$$

С помощью соотношения

$$x'_{C,2}(s) = tg \phi(s) \quad (53)$$

можно определить координаты точек изогнутой оси балки.

**Выводы.** С целью иллюстрации проведенного решения рассмотрим квазистатический изгиб жестко защемленной железобетонной колонны прямоугольного сечения  $1 \text{ м} \times 0,3 \text{ м}$  и длиной  $10 \text{ м}$ , вызванного действием силы  $F_2(t) = 9 \sin \frac{2\pi}{T} t$  ( $\kappa H$ ) ( $t$  в секундах,  $T = 25 \text{ с}$ ), параллельной оси  $x_2$ , а также постоянной продольной сжимающей силы  $F_1 = 600 \text{ кН}$ . Армирование — двенадцать стержней диаметром  $10 \text{ мм}$ , материал — сталь марки А-III. Характеристики бетона:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 19 \text{ МПа}$ ,  $R_p = 1,9 \text{ МПа}$ .

На рис. 3 представлен график изменения прогиба конца колонны с течением времени (прогиб в метрах, время в секундах). Заметно накопление остаточных деформаций.

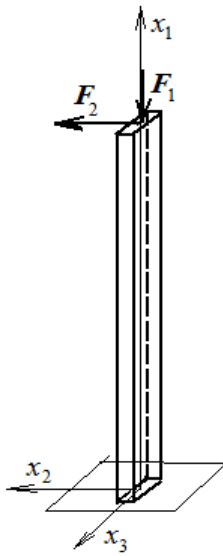
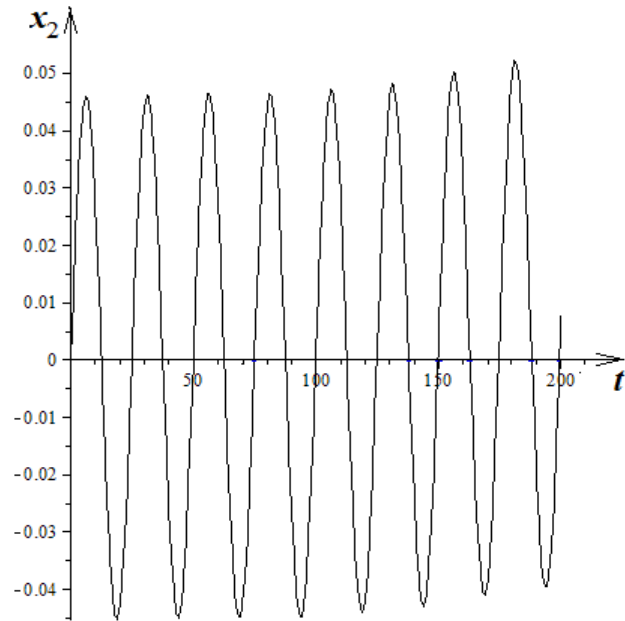


Рис. 2. - Схема колонны

Рис. 3. - График изменения координаты  $x_2$  центра верхнего сечения колонны.

### Список использованной литературы:

1. *Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А.* Теория пластичности бетона и железобетона. — М.: Стройиздат, 1974. — 316 с.
2. *Гришин А.В., Дорофеев В.С.* Нелинейная динамика конструкций, взаимодействующих с деформируемой средой. — Одесса: Астропринт, 2001. — 135 с.
3. *Гришин А.В., Федорова Е.Ю.* Нелинейные динамические задачи расчета портовых гидротехнических сооружений. — Одесса: ОНМУ, 2002. — с. 125.
4. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 543 с.
5. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. — М.: Наука, 1971. — 231 с.
6. *Клованич С.Ф.* Метод конечных элементов в нелинейной механике грунтов и бетонов // Строительные конструкции: межвед. н.-т. сб.: вып. 61: т.1. — Киев: НИИСК, 2004. — с. 123-141.
7. *Клованич С.Ф., Безушко Д.И.* Анализ напряженно-деформированного состояния железобетонных плит с использованием изопараметрического конечного элемента // Строительная механика и расчет сооружений. — №2. — 2008. — с. 67-71.
8. *Клованич С.Ф.* Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. Библиотека журнала «Світ геотехніки», вып. 9. — Запорожье: ООО ИПО «Запорожье», 2009. — 400 с.
9. *Клюшников В.Д.* Математическая теория пластичности. — М.: Издательство МГУ, 1979. — 207 с.
10. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. — Л.: Машиностроение, 1986. — 336 с.

Стаття надійшла до редакції 01.08.2016