

УДК 539.375

Б.К. Гануліч, Ю.Я. Матвіїв

Луцький національний технічний університет

ПРО РОЗВИТОК СМУГ ПЛИННОСТІ БІЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ ВИРІЗІВ ТА ТРИЩИН В УМОВАХ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

У даній роботі сформульовано критерій появи смуги плинності певної, обмеженої знизу довжини. Смуга плинності появляється тоді, коли інтегральне зсувне зусилля на певній довжині відрізка стає рівним добутку граничного напруження на довжину смуги плинності. Отримані результати розрахунків добре узгоджуються з відомими експериментальними спостереженнями.

Ключові слова: еліптичний виріз, тріщина, лінії плинності, смуги плинності, плоска деформація.

Гануліч Б.К., Матвіїв Ю.Я.**О РАЗВИТИИ ЛИНИЙ ТЕКУЧЕСТИ У ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВЫРЕЗОВ И ТРЕЩИН В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

В настоящей работе сформулирован критерий появления линии текучести определенной, ограниченной снизу длины. Полоса текучести возникает тогда, когда интегральное сдвиговое усилие на определенной длины отрезке становится равным произведению максимального допустимого касательного напряжения на длину линии текучести. Полученные результаты расчетов хорошо согласуются с известными экспериментами.

Ключевые слова: эллиптический вырез, трещина, линия текучести, полоса текучести, плоская деформация.

Ganulich B.K., Matviiv Yu.Ya.**ON THE DEVELOPMENT OF PLASTIC BANDS NEAR ELLIPTICAL CUTS AND CRACKS UNDER PLAIN STRAIN**

The paper formulates criteria on the initiation of plastic band with certain length limited below. Plastic band initiates when the integral shear force at the line of certain length equals to the product of yield shear stress and the length of the plastic band. Obtained numerical results are in good agreement with the known experiments.

Key words: elliptic cut, crack, plastic line, plastic band, plain strain.

Робота виконана у рамках науково-дослідної теми «Створення фізичної моделі тріщиностійкості металів», державна реєстрація №0116U001958.

Розглянемо розтяг в умовах плоскої деформації зразка з еліптичним вирізом (рис.1). Будемо вважати, що біля вершин еліпса A_1 і A_2 виникнуть по дві, симетричні відносно осі ox смуги плинності довжини d_0 , коли досягнеться рівність

$$\int_{d_0} \tau dl = \tau_s d_0, \quad (1)$$

де τ – дотичне напруження у точці l на осі $A_1 l$, $\tau_s = 0,5\sigma_{0,2}$ – граничне напруження зсуву матеріалу, із якого виготовлений зразок.

Ліву частину умови (1) можна записати у вигляді

$$\int_{d_0} \tau dl = F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha, \quad (2)$$

де F_x, F_y – результуючі складові сил, що діють на смугі плинності. Якщо позначити $tg \alpha = k$, то умову (2) можна записати у вигляді

$$F_x + kF_y = \tau_s d_0 \sqrt{1+k^2}. \quad (3)$$

Із співвідношень теорії пружності (1)

$$F_x = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_A^B, F_y = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_A^B, 2\frac{\partial \phi}{\partial x} = \bar{z}\Psi'(z) + \Psi(z) + X'(z) + z\bar{\Psi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z}) + \bar{X}'(\bar{z}),$$

$$2\frac{\partial \phi}{\partial y} = i(\bar{z}\Psi'(z) - \Psi(z) + X'(z) - z\bar{\Psi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z}) - \bar{X}'(\bar{z})).$$

(4)

Можна отримати:

$$F_x + kF_y = -0,5 \operatorname{Re}(k-i) \left[\bar{z} \Psi'(z) + \bar{\Psi}(\bar{z}) + \bar{X}'(\bar{z}) \right] \Big|_A^B. \quad (5)$$

Комплексні потенціали $\Psi(z), X(z)$ для задачі (рис.1) відповідно рівні (1)

$$4\Psi(z) = \sigma c \left[(1 + e^{2\xi_0}) sh \zeta - e^{2\xi_0} ch \zeta \right], \quad 4X(z) = -\sigma c^2 \left[(1 + ch 2\xi_0) \zeta - 0,5 e^{2\xi_0} ch(\zeta - \xi_0) \right] \quad (6)$$

де σ – розтягувальні вздовж осі ou напруження на нескінченності; $\zeta = c h z$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $x = c h \xi \cos \eta$, $y = c h \xi \sin \eta$, $(x = \pm c, y = 0)$ – фокуси еліпса-вирізу, $a = c h \xi_0$, $b = c sh \xi_0$ – велика і мала півосі еліптичного вирізу (рис.1).

Підставляючи комплексні потенціали (6) у (5) і (4) із (3) отримаємо

$$\sigma = \frac{8\tau_s d_0 \sqrt{1+k^2}}{c(R_1 - R_2 - R_3)}, \quad (7)$$

де

$$R_1 = \frac{2a^2}{c^2} \left(k\alpha - \beta - k \frac{c}{b} \right),$$

$$R_2 = \frac{2a}{a-b} \left[(k\alpha - \beta) \frac{a_1^2 + b_1^2}{c^2} - k \frac{a^2 + b^2}{bc} \right],$$

$$R_3 = \frac{a+b}{a-b} \left[\frac{1}{2} (k\alpha - \beta) \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) \left(\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} \right) + (\alpha + k\beta) \frac{xy}{a_1 b_1} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \right],$$

$$\alpha = \frac{b_1 x}{a_1 c \left(\frac{a_1^2}{c^2} - \frac{x^2}{a_1^2} \right)}, \quad \beta = \frac{a_1 y}{b_1 c \left(\frac{a_1^2}{c^2} - \frac{x^2}{a_1^2} \right)}, \quad \gamma = \left(\frac{a_1 + b_1}{a + b} \right)^2,$$

$$x = x_b = a + \frac{d_0}{\sqrt{1+k^2}}, \quad y = y_b = \frac{k d_0}{\sqrt{1+k^2}},$$

$a_1 = 0,5 \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)$, $b_1 = \sqrt{a_1^2 - c^2}$ – півосі еліпса з фокусами $(x = \pm c, y = 0)$, що пролягає через точку В (рис1).

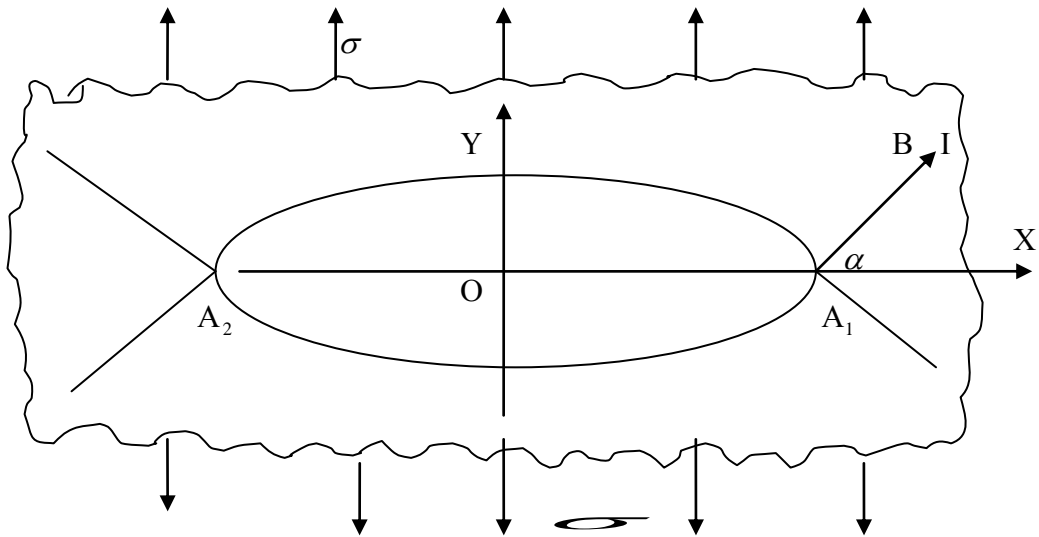


Рис.1. - Схема розтягу зразка з еліптичним вирізом

Формула (7) показує при якому значенні розтягувальних напружень σ з'являється смуга плинності довжини $d_0 = A_1 B$. Оскільки смуга плинності з'являється при мінімально можливому значенні σ , то ця умова дозволяє отримати рівняння для знаходження $k = \operatorname{tg} \alpha$:

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{d}{dk} (\text{права частина (7)}) = 0. \quad (8)$$

Рівняння (8) є ще більш громіздким виразом, ніж (7). Тому розв'язок (8) був знайдений шляхом табулювання* залежності (7) при наступних значеннях геометричних параметрів: $a = 1, b \in [0,001; 0,9]$, $d_0 = 0,01; 0,05; 0,3; 0,5; 1,0$. При заданих b і d_0 значення σ_{\min} визначали змінюючи k від 0,80 до 4,00 через інтервал 0,02. Результати визначення таким способом k – кутів поширення смуг плинності ($\alpha = \operatorname{arctg} k$) зображені на рис.2.

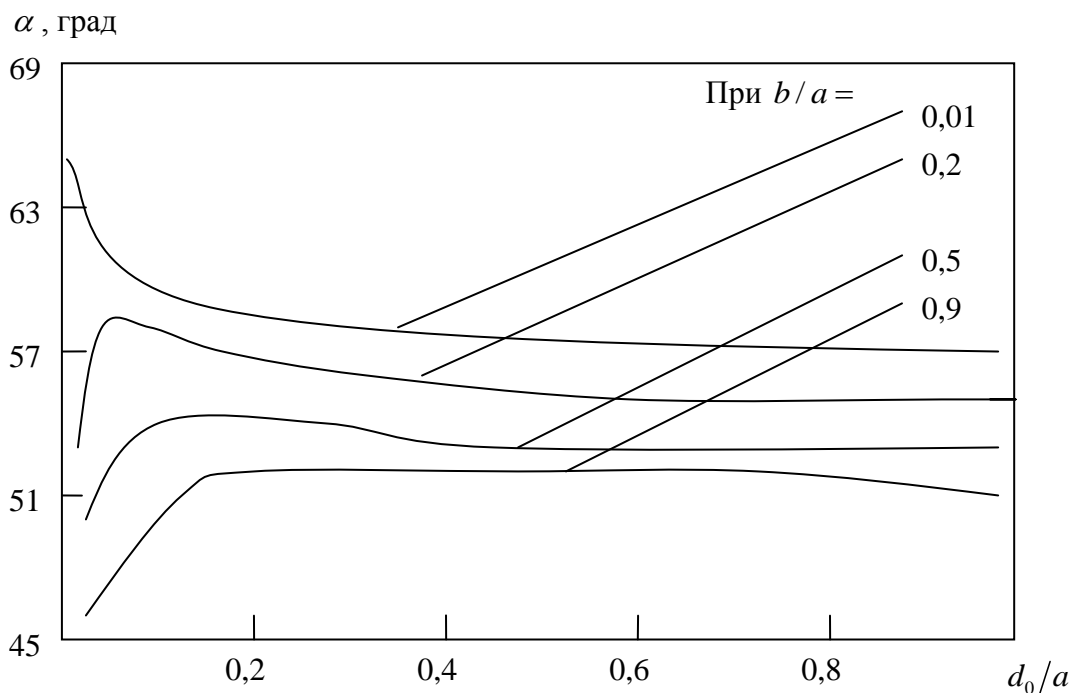


Рис.2. - Залежність напрямку поширення смуг плинності біля еліптичного отвору від розмірів еліпса та характерної постійної металу d_0

При $a = 1,0$ виконуються обчислення при віднесених до a значеннях параметрів b і d_0 . Так наприклад, при $b = 0,001$, $d_0 = 1,0$ обчислюється кут поширення смуги плинності біля вершини еліптичного вирізу, довжина малої півосі у якому складає 0,001 частину великої півосі a , а довжина d_0 смуги плинності, що виникає, рівна a . Слід зауважити, що вирізи з відношенням $b/a \in [0,001; 0,01]$ можна вважати тріщинами.

Використання комплексних потенціалів (6) при обчисленні лівої частини (1) передбачає, що до виникнення смуг плинності увесь зразок деформується лише пружно. Проте очевидно, що при досягненні напруженням σ значення $\sigma_{0,2} \left(1 + \frac{2a}{b}\right)^{-1}$ (і більше) біля вершин еліпса A_1, A_2 досягається умова плинності Треска-Сен-Венана, отже, подальше збільшення σ $\left(\sigma \geq \sigma_{0,2} \left(1 + \frac{2a}{b}\right)^{-1}\right)$ приводить до появи і збільшення пружно-пластичних зон. Виникнення пластичних зон зумовлює перерозподіл напружень і компоненти тензора напружень вже не будуть

визначатися через комплексні потенціали розв'язку задачі у пружному формулюванні. Тут приймається, що перерозподіл напружень біля вершин еліпса A_1, A_2 (рис.1) при

$\left(\sigma \geq \sigma_{0.2} \left(1 + \frac{2a}{b} \right)^{-1} \right)$ відбувається без виникнення пластичних деформацій у вигляді смуг

плинності до тих пір, поки не досягнеться умова (1). При перерозподілі напружень застосування комплексних потенціалів пружної задачі є недоречним, але тут вважається, що при обчисленні інтегрального зсувного зусилля на відрізьку d_0 – є можливим, тобто згаданий перерозподіл напружень відбувається таким чином, що повне зсувне зусилля на прямолінійному відрізьку, який виходить з вершини еліпса, залишається пропорційним параметру навантаження σ .

Припущення про те, що зміна напруженого стану реальних твердих тіл може відбуватись не лише у результаті руху середовищ, але й при відсутності будь-яких макроскопічних переміщень і притоку чи відтоку тепла від її елементів, уперше було висловлене Максвеллом [3]. Він запропонував назвати такий процес спаданням дотичних напружень і запровадив поняття часу їх релаксації. Подальший розвиток ця ідея отримала у роботах [4-6], у першій з яких уявлення про час релаксації дотичних напружень розглядається з молекулярно-кінетичної точки зору, у інших двох формулюються та аналізуються моделі середовищ з нелінійною залежністю граничних дотичних напружень від температури і гідростатичної складової тензора напружень.

У зв'язку з великим інтересом до встановлення ролі пластичних деформацій у процесі руйнування металевих конструкцій, який розглядається як процес поширення тріщин, розвиток пластичних деформацій біля концентраторів напружень, зокрема тріщин, широко досліджується [4-25]. Розрахунок методом скінчених елементів у рамках класичних теорій пластичності показує, що пружно-пластична зона біля вершини тріщини нормального розкриття в умовах плоскої деформації є компактним утворенням, максимальний розмір R_{\max} якого утворює з площиною тріщини кут $\alpha = 66^\circ \dots 82^\circ$ [26]; представлення пластичних зон у вигляді смуг плинності із застосуванням тих чи інших допущень приводило різних дослідників до таких результатів визначення α : у роботі [18] $\alpha = 45^\circ$, у [27] $\alpha = 57^\circ$, в [6] $\alpha = 59^\circ$, в [25] $\alpha = 63^\circ 30' 37''$. Експерименти показують [6-8], що смуги плинності утворюють з площиною тріщини кут $\alpha = 47^\circ \dots 54^\circ$. Отримані у дослідженні (див. рис. 2) результати розрахунку кутів поширення смуг плинності при $d_0 \geq 0,6a$ добре узгоджуються з результатами дослідів і тому залишають надію, що запропонований підхід до опису смуг плинності біля концентраторів напружень відповідає дійсності.

* – табулювання виконав Качур П. С.

Література.

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. (пер. с англ.) – М.: Наука, 1975. - 575с.
2. К. Віггард Про розколювання та розривання пружних тіл (пер. з нім.). – ФХММ. - 1994. - №3, С.91-104.
3. Мержиевский Л.А., Шамонин С.А. Построение зависимости времени релаксации касательных напряжений от параметров состояния среды. - Ж. прикл. мех. и физики, 1980, №5, С. 170-179.
4. Работнов Ю.Н., Станкевич О.Ф. Экспериментальное выявление пластических зон на моделях из титанового сплава. – Известия АН СССР, Механика, №2, 1965, С. 108-109.
5. Корнилов Г.И., Ярема С.Я. Плоские образцы с трещиновидными концентраторами для экспериментального исследования полос пластичности. - В сб. Вопросы механики реального твердого тела. - Киев: Издательство АН УССР, 1962, вып.1, С.13-28.
6. Леонов М.Я., Витвицкий П.М., Ярема С.Я. Полосы пластичности при растяжении пластинок с трещиновидным концентратором. - Докл. АН СССР, 1963, т.148, №3. С. 541-544.
7. Iricbar R., Panirra G., Mazza J. On the Luders band front in mild steel. Elastic-plastic analysis of the front by the finite element method. - Acta met., 1977, 25, №10, p. 1169-1177.
8. Райсс Дж.Р. Локализация пластической деформации. - «Теор. и прикл. мех., тр. 14-го международного конгр. УИТАМ, Делфт, 30 авг. - 4 сент. 1976». М., 1979, С. 431-471.
9. Friedrich K. Sheaf bands and fracture in crystalline polymers. - "Adv. Fract. Res. Prepr. Sth. Int. Conf. Fract., Cannes, 1981, Vol.2». Oxford e.a. 1981, P. 771-781.
10. Bell James F. A physical for continuum theoris of finite strein plasticity.11. « Arch . Ration. Mech. and Anal. 2», 1981, 75, №2, P. 103-126.

11. Bandyopadhyay S.N. Lingh N., Murty G. L. An experimental study of crack tip plastic flow in mild steel. - Eng. Fract. Mech., 1981, 14, №3, P. 565-580.
12. Tvergaard V., Needleman A., Lo K.K. Flow lokalisation in the plane strein tensile fest. - J. Mech. and Phys. Solids, 1981, 29, №2, P. 115-142.
13. Леонов М.Я., Востроб В.К. К теории сдвиготрещинообразования. - Докл. АН СССР, 1980, т. 253. №4, С. 832-837.
14. Малыгин Г.А. Анализ механизма скачкообразной деформации. - Проблемы прочности, 1975, №2, С. 12-18.
15. Enomoto M., Furubajashi E. A model for Luders band formation and plastic instability in iron related with the strein softening due to the Johnston-Gilman-Hahn theory. -Scr.met., 1979, №2, P. 113-117.
16. Витвицкий П.М., Ярема С.Я., Кутень С.И. Экспериментальное исследование развития пластических полос в пластинах с краевыми щелями. - ФХММ, 1976, №2. С.77-80.
17. Витвицкий П.М., Панасюк В.В., Ярема С.Я. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения. - Проблемы прочности, 1973, №2, с.13-18.
18. Niwa Naotake. «Нихон киндзоку гаккайси2». - J. Jap. Inst. Metals, 1978, 42, №11, P. 1060-1066.
19. Ярема С.Я. Манюк З.М. Пластическая деформация у кольцевой трещины в цилиндрических образцах при различных температурах и скорости нагружения. - ФХММ, 1971, т.7, №2, С. 15-18.
20. Леонов М.Я., Нисневич Е.Б., Предигер В.Е. Возникновение полос скольжения в пластине с трещиной.- ФХММ, 1982, №1, с.10-15.
21. Ishikawa Masaru, Narisawa Ikuo, Ogawa Hiroyki. Fracture processes in ductile polimer. 11 Morphological analysis of the localised plastic dtformation of polycarbonate film. - Polym. J., 1976, 8, №5, P.391-400.
22. Ярема С.Я., Витвицкий П.М., Зборомирский А.И., Остап О.П. Пластические деформации около трещины в тонком диске, растягиваемом сосредоточенными силами. - ФХММ, 1974, №5, С. 34-39.
23. Кошелев П.Ф., УЖИК Г.В. Исследование пластической деформации в местах концентрации методом травления. - Изв. АН СССР, ОНТ, «Механика и машиностроение», 1959, №1, С. 23-25.
24. Кулиев В.Д., Черепанов Г.П. О начальном развитии линий скольжения от свободной границы тела. - Прикл. мат. и мех., 1979, 43, №2, С. 349-359.
25. Ибрагимов В.А., Тарасюк Н.Е. Об асимптотике напряженного состояния около конца трещины-разреза в упруго-пластической бреле. – Изв. АН СССР. Мех.твёрдого тела, 1976, №5, С. 184-185.
26. Греков М.А. О пластических зонах у вершин трещины при плоской деформации. - ФХММ, 1978, 14, №5, С. 75-82.
27. Леонов М.Я., Рычков Б.А. К основам механики пластических материалов. – Проблемы прочности, 1982, №3, С. 35-39.

Стаття надійшла до редакції 07.02.2017