УДК 519.9

П.І. Гінайло
Луцький національний технічний університет

НЕОБХІДНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ В ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З ЛІНІЙНИМИ БАГАТОЗНАЧНИМИ ВІДОБРАЖЕННЯМИ

Отримані необхідні умови екстремуму для задачі оптимального керування, які описуються диференціальними багатозначними включеннями. При цьому враховується наявність додаткових параметрів, за допомогою яких можна впливати на функціонал і фазові обмеження задачі.

Ключові слова: *екстремум, диференціальні включення, необхідні умови екстремуму, оптимальне керування, багатозначні відображення.*

П.И. Гинайло

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМИ МНОГОЗНАЧНЫМИ

Получены необходимые условия экстремума для задачи оптимального управления, описываемые дифференциальными включениями. При этом учитывается наличие дополнительных параметров, с помощью которых можно влиять на функционал и фазовые ограничения задачи.

Ключевые слова: *экстремум, дифференциальные включения, необходимые условия экстремума, оптимальное управление, многозначные отображения.*

P. Ginaylo

NECESSARY CONDITIONS FOR EXTREMUM IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR WITH LINEAR MULTIVALUED MAPPINGS

Necessary extremum conditions for optimal control problems described by differential inclusions meaningful are recerved. This takes into account the availability of additional parameters, which can affect the functional restrictions and phase problems.

Keywords: *extremum, differential inclusion necessary extremum conditions, optimal control, ambiguous map.*

Постановка проблеми. Багато задач оптимального керування в останні роки знаходять широке застосування в самих різних областях сучасної науки і техніки. Усі фізичні процеси, що мають місце в техніці, як правило, керовані, тобто можуть здійснюватися різними способами, в залежності від потреб людини. Тому і виникає питання про знаходження найкращого або оптимального в тому чи іншому розумінні керуванні процесом. Побудові найбільш загальних необхідних умов екстремуму присвячено дуже багато робіт різних вчених.

Аналіз досліджень. Новий напрямок досліджень в теорії необхідних умов екстремуму сприяв розвитку нового підходу до багатьох задач оптимального керування, в якому центральне місце займає поняття багатозначного відображення [1-3]. Справа в тому, що задачу оптимального керування виявляється зручно трактувати як задачу оптимізації на множині траєкторій деякого диференціального включення. Поняття диференціального включення дозволяє охопити багато задач оптимального керування єдиним методом розв’язання. В основі теорії диференціальних включень лежить поняття багатозначного відображення. В даній задачі розглядаються лінійні багатозначні відображення.

Метою роботи є побудова необхідних умов екстремуму для диференціальних включень при наявності додаткових обмежень на координати траєкторії в динамічних задачах з лінійними багатозначними відображеннями.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження.

Розглянемо скінченні простори $X = R^n$, $Y = R^m$. Нехай a – багатозначне відображення, $a(x) \subset R^n$ і нехай воно буде лінійне, тобто $a(x) = Ax + U$.

Теорема 1. Нехай відображення a випукле, замкнуте і обмежене, множини N і M випуклі. Тоді для того, щоб траєкторія $\tilde{x}(t)$, $t \in [0,1]$ мінімізувала функціонал

$$\int_0^1 f\left(x(t), y(t)\right) dt$$

© П.І. Гінайло

серед всіх траєкторій диференціального включення $\dot{x}(t) \in a(x(t))$, які задовольняють умовам $x(0) \in N,\ x(1) \in M$ і $(x(t), y(t)) \in Q$, необхідно щоб знайшлися абсолютно неперервна функція $p^*(t)$, вимірні функції $u^*(t)$ і $v^*(t)$, число $\lambda \geq 0$, не всі одночасно рівні нулю, такі що:

1) $p^*(0) \in K_N^*(\tilde{x}(0)),\ \ -p^*(1) \in K_M^*(\tilde{x}(1))$

2) $-p^*(t) \in \lambda\left[u^*(t) + Q^*\left(v^*(t); (x(t), y(t))\right)\right] + a^*\left(p^*(t); \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)\right)$ майже скрізь на $[0,1]$.

3) $(u^*(t), v^*(t)) \in \partial f(x(t), y(t))$,

4) $\left\langle \dot{\tilde{x}}(t), p^*(t) \right\rangle = Wa\left(\tilde{x}(t), p^*(t)\right)$ майже скрізь на $[0,1]$.

Доведення.

Оскільки множини N і M випуклі, то виконується припущення А. $a(x)$ задовольняє умові Ліпшиця.

Аналогічно виконано і припущення С [3]. Справедлива, також, рівність

$$A^*\left(x^*; x\right) = a^*\left(y^*; y(x)\right)$$

де y – будь-яка точка з $a^*\left(x, y^*\right)$.

Звідси маємо, що

$$A^*\left(p^*(t); \tilde{x}(t)\right) = a^*\left(p^*(t); \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)\right).$$

Теорема 1 доведена.

Справедливо

$$a^*\left(y^*; y(x)\right) = \partial_x W_a\left(x, y^*\right)$$

коли $y \in a\left(x; y^*\right)$ $\partial_{y^*} W_a\left(x, y^*\right) = a\left(x, y^*\right)$.

Тоді теорему 1 можна сформулювати так:

Теорема 2. Нехай виконані всі припущення теореми 1. Тоді необхідні умови оптимальності траєкторії задачі II будуть мати наступний вигляд:

1) $p^*(0) \in K_N^*(\tilde{x}(0)),\ \ -p^*(1) \in K_M^*(\tilde{x}(1))$,

2) $-p^* \in \partial_x W_a\left(\tilde{x}(t), p^*(t)\right) + \lambda\left[u^*(t) + Q^*\left(v^*(t); (x(t), y(t))\right)\right]$,

3) $(u^*(t), v^*(t)) \in \partial f(x(t), y(t))$,

4) $\left\langle \dot{\tilde{x}}(t), p^*(t) \right\rangle = Wa\left(\tilde{x}(t), p^*(t)\right)$,

де

$$\partial_x W_a\left(x, y^*\right) = \left\{p^* : W_a\left(x, y^*\right) - W_a\left(x, y^*\right) \geq \left\langle x_1 - x, p^* \right\rangle\right\},$$

$$\partial_{y^*} W_a\left(x, y^*\right) = \left\{\omega : W_a\left(x, y_1^*\right) - W_a\left(x, y^*\right) \geq \left\langle \omega, y_2^* - y^* \right\rangle\right\}.$$

Для досліджуваної задачі оптимального керування можна отримати також достатні умови екстремуму.

Теорема 3. Нехай a – випукле замкнуте обмежене відображення, $f(x, y)$ – випукла функція. Тоді умови теореми 1 достатні для того, щоб $\tilde{x}(t),\ t \in [0,1]$ була оптимальною траєкторією.

Доведення.

Нехай $x(t)$ – будь-яка траєкторія, така що

$$\dot{x}(t) \in a(x(t))$$

і

$$x(0)\in N,\ x(1)\in M\ .$$

З теореми 2 маємо

$$-p^*\in\partial_x W_a\left(\tilde{x}(t),p^*(t)\right)+\lambda\left[u^*+Q^*\left(v^*(t);\left(x(t),y(t)\right)\right)\right]$$

або

$$-p^*\in\partial_x W_a\left(\tilde{x}(t),p^*(t)\right)+\lambda u^*+\lambda\partial_x W_a\left(\tilde{x}(t),v^*\right).$$

Тоді

$$\begin{aligned}\left\langle\dot{\tilde{x}}(t),p^*(t)\right\rangle &\geq Wa\left(x(t),p^*(t)\right)+\lambda W_Q\left(x(t),v^*(t)\right)\geq\\ &\geq Wa\left(\tilde{x}(t),p^*(t)\right)+\left\langle\tilde{x}(t),p^*(t)\right\rangle+\lambda W_Q\left(\tilde{x}(t),v^*(t)\right)\geq\\ &\geq Wa\left(\tilde{x}(t),p^*(t)\right)+\left\langle\tilde{x}(t),p^*(t)\right\rangle=\\ &=\left\langle\dot{\tilde{x}}(t),p^*(t)\right\rangle+\left\langle\tilde{x}(t),p^*(t)\right\rangle\neq\frac{d}{dt}\left\langle\tilde{x}(t),p^*(t)\right\rangle.\end{aligned}$$

Проінтегруємо цю нерівність

$$\left\langle x(1),p^*(1)\right\rangle-\left\langle x(0),p^*(0)\right\rangle\geq\left\langle\tilde{x}(1),p^*(1)\right\rangle-\left\langle\tilde{x}(0),p^*(0)\right\rangle.$$

Оскільки

$$p^*(0)\in K_N^*\left(\tilde{x}(0)\right),\text{ то }\left\langle x(0),p^*(0)\right\rangle>\geq\left\langle\tilde{x}(0),p^*(0)\right\rangle.$$

Тому

$$\left\langle x(1),p^*(1)\right\rangle>\geq\left\langle\tilde{x}(1),p^*(1)\right\rangle.$$

Значить,

$$\left\langle x(1)-\tilde{x}(1),p^*(0)\right\rangle+\left\langle x(1)-\tilde{x}(1),p^*(1)\right\rangle\geq 0.$$

Перший доданок додатній, так як $p^*(0)\in K_N^*\left(\tilde{x}(0)\right)$, другий – в силу попередньої нерівності. Отже, теорема доведена.

Нехай відображення Q в поставленій задачі задано наступним чином

$$Q=\left\{(x,y):\varphi(x,y)\leq 0\right\}$$

де $\varphi(x,y)$ – неперервна функція випукла за сукупністю аргументів. Отже, відображення

$$Q=\left\{y:\varphi(x,y)\leq 0\right\}$$

випукле і замкнуте.

Згідно з теоремою 1 [47] знаходимо локально спряжене відображення до відображення $Q(x)$.

$$Q^*\left(y^*;(x,y)\right)=\left\{\lambda x_0^*:\ y^*=-\lambda y_0^*,\left(x_0^*,y_0^*\right)\in\partial\varphi\quad\lambda\geq 0,\ \lambda\varphi(x,y)=0\right\}$$

Якщо існує така точка (x_1,y_1), що $\varphi(x_1,y_1)<0$, тоді умову 2 теореми 2.3 можна записати в наступному вигляді:

$$-p^*(t)\in a^*\left(p^*(t);\left(x(t),\dot{\tilde{x}}(t)\right)\right)+\lambda(t)\left[u^*(t)+\gamma(t)\varphi_x'\left(x(t),y(t)\right)\right]$$

$$v^*(t)=-\gamma(t)\varphi_y'\left(x(t),y(t)\right),$$

причому

$$v^*(t)=-\lambda(t)\varphi_y'\left(x(t),y(t)\right).$$

Послідовно, застосувавши до цієї задачі теорему 1, отримаємо наступний результат.

Теорема 4. Нехай $\varphi(x,y)$ – неперервна і випукла по x і y, множина $Q(x)$ обмежена хоча б для одного значення x, і існує така точка (x_1,y_1), що $\varphi(x_1,y_1)<0$, тоді для того, щоб траєкторія $\tilde{x}(t),\ t\in[0,1]$, яка цілком належить $\operatorname{int} dom\, a$ мінімізувала

$$\int_0^1 f\left(x(t), y(t)\right)dt$$

серед усіх траєкторій, які задовольняють нерівність

$$\varphi\left(x(t), \dot{x}(t)\right) \le 0$$

крайнім умовам $x(0) \in N,\ x(1) \in M$ і умові $\left(x(t), y(t)\right) \in Q$, де

$$Q = \left\{(x, y):\ \varphi(x, y) \le 0\right\}$$

необхідно, щоб знайшлись абсолютно неперервна функція $p^*(t)$, функції $\lambda(t), \gamma(t)$ і вимірні функції $u^*(t), v^*(t)$, одночасно не рівні нулю такі, що:

$$p^*(0) \in K_N^*\left(\tilde{x}(0)\right),\quad -p^*(1) \in K_M^*\left(\tilde{x}(1)\right)$$

$$-p^*(t) \in a^*\left(p^*(t); \left(x(t), \dot{\tilde{x}}(t)\right)\right) + \lambda(t)\left[u^*(t) + \gamma(t)\varphi_x'\left(x(t), y(t)\right)\right]$$

$$v^*(t) = -\gamma(t)\varphi_y'\left(x(t), y(t)\right)$$

$$\left(\gamma(t)\varphi_x'\left(x(t), y(t)\right), -\gamma(t)\varphi_y'\left(x(t), y(t)\right)\right) \in \partial\varphi\left(x(t), y(t)\right)$$

$$\left(u^*(t), v^*(t)\right) \in \partial\varphi\left(x(t), y(t)\right)$$

$$\lambda(t)\varphi\left(\tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)\right) = 0,\quad \lambda(t) \ge 0,\ \gamma(t) \ge 0.$$

Нехай в нашій задачі об'єкт лінійний, тобто $a(x) = Ax + U$, де U – випукла замкнута множина в R^n, A – оператор діючий з простору X в простір Y. Нехай відображення Q – багатогранне, тобто

$$gfQ = \left\{(x, y): Bx - Cy \le d\right\},$$

де B і C – матриці розміром $r \times n$ і $r \times m$ відповідно, а $d - r$ – мірний вектор. Тут під нерівністю для векторів розуміють систему нерівностей для компонент.

Багатозначне відображення a тут буде випуклим, замкнутим і обмеженим.

Якщо $y = Ax + \omega,\ \omega \in U$, то спряжене до a відображення буде мати вигляд

$$a^*\left(y^*; (x, y)\right) = \begin{cases} A^* y^*, & \text{ÿêù î} \quad y^* \in \left[con(U - \omega)\right]^* \\ \varnothing, & \text{ÿêù î} \quad y^* \notin \left[con(U - \omega)\right]^*. \end{cases}$$

Якщо $(x_0, y_0) \in gfQ$, то спряжене відображення до Q обчислюється так

$$Q^*\left(y^*; (x_0, y_0)\right) = \left\{B^*\lambda : y^* = \lambda C^*,\ \lambda \ge 0,\ \left\langle Bx_0 - Cy_0 - d, \lambda\right\rangle\right\} \ge 0,$$

де B^* і C^* – транспоновані матриці B і C.

Тому умова 2 теореми 1 в цьому випадку може бути записано наступним чином

$$-p^*(t) = \lambda(t)\left[u^*(t) + æ(t)B^*\right] + A^* p^*(t)$$

$$v^*(t) = \lambda(t)C$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}(t) + \tilde{\omega}(t),\ \tilde{\omega}(t) \in U$$

$$p^*(t) \in \left[con\left(U - \tilde{\omega}(t)\right)\right]^*.$$

Або, враховуючи визначення спряженого конуса і того, що

$$con\left(U - \tilde{\omega}(t)\right) = \left\{\lambda\left(\omega - \tilde{\omega}(t)\right):\ \omega \in U,\ \lambda > 0\right\}$$

останнє відношення перепишеться у вигляді

$$\left\langle \omega - \tilde{\omega}(t), p^*\right\rangle \ge 0,\ \omega \in U.$$

Застосовуючи теорему 1, отримуємо

Теорема 5. Нехай відображення Q – багатогранне. Тоді для того, щоб траєкторія $\tilde{x}(t)$ і відповідне їй керування $\tilde{\omega}(t)$ мінімізували

$$\int_0^1 f\left(x(t), y(t)\right)dt$$

серед усіх траєкторій і керувань, які задовольняють рівняння

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \omega(t),\ \omega(t) \in U$$

крайнім умовам $x(0) \in N,\ x(1) \in M$ і умові $\left(x(t), y(t)\right) \in Q$, необхідно, щоб існувала функція $p^*(t)$, вектори $\lambda(t), æ(t)$ і вимірні функції $u^*(t),\ v^*(t)$ такі що:

$$p^*(0) \in K_N^*\left(\tilde{x}(0)\right),\quad -p^*(1) \in K_M^*\left(\tilde{x}(1)\right)$$

$$-p^*(t) = \lambda(t)\left[u^*(t) + æ(t)B^*\right] + A^* p^*(t)$$

$$v^*(t) = \lambda(t)C$$

$$\left\langle \omega - \tilde{\omega}(t), p^*(t)\right\rangle \geq 0,\ \omega \in u,$$

$$\lambda(t) \geq 0,\ æ(t) \geq 0,$$

$$\left(u^*(t), v^*(t)\right) \in \partial f\left(x(t), y(t)\right).$$

Висновки. Отримані необхідні умови екстремуму для задачі оптимального керування з диференціальними багатозначними включеннями. Розглянуті лінійні багатозначні відображення,ь при цьому враховано наявність додаткових параметрів, за допомогою яких можна впливати на функціонал і фазові обмеження задачі.

Список використаних джерел:

1. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
2. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1982. – 144 с.
3. Гінайло П.І. Задача оптимального керування для диференціальних включень з многозначними відображеннями. // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – 2016. – № 24-25. – С. 68-72.
4. Гінайло П.І. Необхідні умови екстремуму для задачі оптимального керування з континуумом обмежень. // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямком „Інженерна механіка"), вип. 11, част.2, Луцьк, 2002, С.15–17.
5. Гінайло П.І. Необхідні умови екстремуму для локально випуклої задачі. // Дванадцята Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука. Київ, 15–17 трав. 2008 р. Матеріали конф., т. І. – К.: НТУУ "КПІ". – 2008. – 572с.

Стаття надійшла до редакції 14.03.2017

© П.І. Гінайло