УДК: 539.375; 620.169.1

Н.С. Штаюра
Львівський національний університет імені Івана Франка

ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛИШКОВОЇ МІЦНОСТІ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З КОРОТКИМИ ТРІЩИНАМИ

Розвинуто енергетичний підхід для знаходження залишкової міцності пружно-пластичних тонкостінних елементів конструкцій з короткими тріщинами. При цьому для визначення величини розкриття у вершині короткої тріщини запропоновано наближену формулу, коректність і точність якої підтверджено порівнянням з відомими в літературі більш точними числовими результатами. Апробація підходу здійснена при розв'язанні узагальненої задачі Гріффітса та задачі для випадку розтягу смуги з двома зовнішніми тріщинами.

***Ключові слова**: короткі тріщини, залишкова міцність, розкриття вершини тріщини, енергетичний підхід.*

Н.С. Штаюра

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНОЙ ПРОЧНОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С КОРОТКИМИ ТРЕЩИНАМИ

Развито энергетический подход для нахождения остаточной прочности упруго-пластических тонкостенных элементов конструкций с короткими трещинами. При этом для определения величины раскрытия в вершине короткой трещины предложена приближённая формула, корректность и точность которой подтверждена сравнением её с известными в литературе более точными числовыми результатами. Апробация подхода осуществлена при решении обобщённой задачи Гриффитса и задачи для случая растяжения полосы с двумя внешними трещинами.

***Ключевые слова:** короткие трещины, остаточная прочность, раскрытие вершины трещины, энергетический подход.*

N. Shtayura

RESIDUAL STRANGE DETERMINATION OF THIN-WALLED STRUCTURAL ELEMENTS WITH THE SHORT CRACKS

There has been developed the energy approach for residual strength determination of elastic-plastic thin structural elements with short cracks. The basis of the approach is formed by a model for the determination of the period of subcritical growth of short cracks in elastic-plastic thin-walled plates. The model has been formulated using the first law of thermodynamics and strain approach.

Thus, to determine the short crack tip opening displacement there has been proposed an approximate formula. The formula effectively models the solution of the tension problem for double edge cracked plate depending on linear dimensions of the plate and crack.

Its correctness and accuracy have been confirmed by comparing with the more accurate numerical results described in the literature. This approach has been approved on the generalized Griffiths problem and on the tension problem for double edge cracked plate.

***Keywords:** short cracks, residual strength, crack tip opening displacement, energy approach.*

Постановка проблеми. У сучасній техніці, транспорті, теплоенергетиці, будівництві широко використовують конструкційні пружно-пластичні матеріали, які можуть бути послаблені малими дефектами типу тріщин. Визначення залишкової міцності елементів конструкцій із таких матеріалів пов'язане із значними математичними труднощами, оскільки в цьому випадку некоректним є застосування методів лінійної механіки руйнування, а їх реалізація вимагає розв'язання складних пружно-пластичних задач для визначення величини деформації або розкриття тріщини біля її вершини. Тому для розв'язання таких задач необхідно створити більш прості й надійні підходи, які можна застосовувати в інженерній практиці. Один із таких підходів і запропонований в даній роботі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогодні для розв'язання згаданих вище пружно-пластичних задач запропоновано моделювати пластичну зону біля вершини тріщини смугами ковзання. Це певною мірою спрощує розв'язок пружно-пластичної задачі. Достатньо широкий огляд результатів розв'язання задач такого типу наведено в роботі [1]. Такі дослідження необхідні при розробленні й використанні критеріїв руйнування для достатньо пластичних тіл з тріщинами. Модель тріщини із смугами пластичності в її вершині для тіла з розгалуженим розрізом дозволяє звести пружно-пластичну задачу до пружної та застосовувати розвинуті методи розв'язання таких задач у лінійній теорії пружності. Найбільш повно досліджено тріщини відриву в тонких пластинах при плоскому напруженому стані та в циліндричних тілах при плоскій деформації. Проте навіть у таких випадках наближений розв'язок відповідних пружно-пластичних задач на рівні інженерної практики не є ефективним.

У цій роботі запропоновано більш простий, але достатньо точний підхід для розв'язання задач такого типу.

Постановка завдань. У роботі запропоновано новий критерій міцності з урахуванням дефектності матеріалу, який можна ефективно застосовувати в інженерній практиці.

Метою роботи є встановлення критерію руйнування, розроблення моделі та аналітичних залежностей для розрахунку залишкової міцності й довговічності елементів конструкцій з короткими тріщинами.

Викладення основного матеріалу. Розглянемо пластину з прямолінійною тріщиною початкової довжини l_0, піддану дії статичного навантаження p. При цьому вважається, що тріщина макроскопічна, а зовнішні навантаження, що характеризуються силовим параметром *p*, викликають у тілі симетричний відносно лінії розміщення тріщини напружено-деформований стан, що описується в її вершині тільки коефіцієнтом інтенсивності напружень K_1 (*рис.1*). Задача полягає у визначенні величини силового параметру $p = p_*$ після досягнення якого пластина зруйнується.

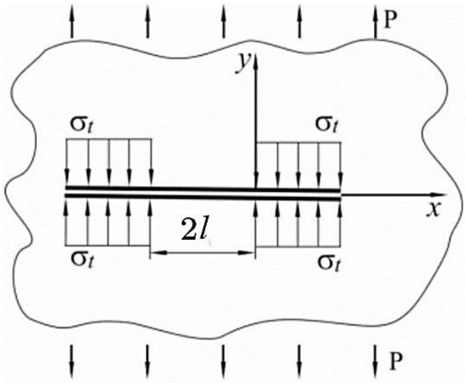

Рис. 1.- **Схема навантаження пластини з тріщиною**

Для розв'язання задачі насамперед побудуємо математичну модель, тобто рівняння, які описують даний процес. Вважаємо, що при навантаженні до критичної величини $p = p_*$ наступає гранично-рівноважний стан в околі вершини тріщин.

Енергетичний баланс цього стану можна записати [2] у вигляді:

$$A = W + \mathit{\Gamma} + T + K, \qquad (1)$$

де A – робота зовнішніх сил; W – енергія деформування тіла, яку представимо у вигляді:

$$W = W_s + W_p^{(1)}(l), \qquad (2)$$

де W_s – пружна складова W; $W_p^{(1)}(l)$ – робота пластичних деформацій; $\mathit{\Gamma}$ – енергія руйнування тіла, яка залежить тільки від площі тріщини; T – величина виділеної теплової енергії при руйнуванні тіла (вважаємо її відносно малою величиною і нехтуємо нею при обчисленнях); K – кінетична енергія, яка в цьому випадку також буде малою величиною.

Оскільки виконується умова балансу енергії, то виконуватиметься умова балансу швидкостей зміни складових енергій:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \mathit{\Gamma}}{\partial t}. \qquad (3)$$

Підставляючи вираз (2) в (3), цю умову запишемо так:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\Gamma - (A - W_s - W_p^{(1)})\right]\frac{dl}{dt} = 0. \qquad (4)$$

Оскільки швидкість початкового поширення тріщини не дорівнює нулю, тобто $dl/dt \neq 0$, то рівняння (4) еквівалентне наступному:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\Gamma - (A - W_s - W_p^{(1)})\right] = 0 \qquad (5)$$

Використовуючи результати робіт [3], похідну від виразу в квадратних дужках у лівій частині рівняння (5) запишемо так:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\Gamma-(A-W_s-W_p^{(1)})\right]=2\gamma_f-\delta_t\sigma_t\,, \tag{6}$$

де γ_f – питома енергія руйнування при поширенні тріщини, вважається характеристикою матеріалу і визначається із експерименту; δ_t – біжуче розкриття тріщини у її вершині при усередненому напруженні σ_t у зоні передруйнування (*рис. 2*).

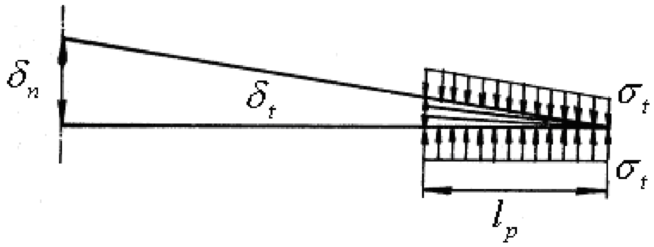

Рис. 2. - **Схема розкриття поверхні тріщини у зоні передруйнування**

На основі (5), (6) енергетичний критерій початку руйнування тіла (старту тріщини) можна записати у такому вигляді:

$$2\gamma_f-\delta_t\sigma_t=0. \tag{7}$$

Величину $\delta_t=\delta_{t\Gamma}$ для задачі Гріффітса визначаємо на основі [4]:

$$\delta_{t\Gamma}=\pi lp^2(E\sigma_t)^{-1}f(\xi),\ \ f(\xi)=-8(\pi\xi)^{-2}\ln[\cos(0,5\pi\xi)],\ \ \xi=p\sigma_t^{-1} \tag{8}$$

Функція $f(\xi)$ є досить складною для користування, проте наближено можна записати:

$$f(\xi)\approx(1-\xi^2)^{-1} \tag{9}$$

Тоді формула (8) з урахуванням (9) запишеться наступним чином:

$$\delta_{t\Gamma}\approx\frac{\pi lp^2}{E\sigma_t(1-\xi^2)}=\frac{K_{I\Gamma}^2}{E\sigma_t(1-\xi^2)} \tag{10}$$

де $K_{I\Gamma}$ – коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершин тріщини для задачі Гріффітса [4].

На основі методу еквівалентних напружених станів [5] величину розкриття δ_t вершин коротких прямолінійних тріщин в інших досліджуваних пластинах за симетричного напруженого стану можна наближено представити співвідношенням:

$$\delta_t\approx\frac{K_I^2}{K_{I\Gamma}^2}\delta_{t\Gamma}, \tag{11}$$

де K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень для досліджуваних пластин з короткими прямолінійними тріщинами.

На основі (10) величину δ_t для будь-яких пластин з короткими прямолінійними тріщинами за симетричного навантаження наближено визначаємо за формулою:

$$\delta_t=\frac{K_I^2}{E\sigma_t(1-\xi^2)}\ . \tag{12}$$

Цю формулу можна ефективно застосовувати для визначення граничного значення зовнішнього навантаження $p=p_*$. Для задачі Гріффітса із співвідношень (7) і (12) отримаємо наступну формулу для визначення критичного значення зовнішнього навантаження $p=p_*$:

$$p_*=\sigma_t\sqrt{\frac{2\gamma_f E}{2\gamma_f E+\pi l\sigma_t^2}} \tag{13}$$

Запишемо цей вираз, використовуючи параметр ψ:

$$\frac{p_*}{\sigma_t} = \sqrt{\frac{8}{8+\psi\pi^2}}, \tag{14}$$

де $\psi = \dfrac{8\sigma_t l}{\delta_{Ic}\pi E}$.

Для макротріщин ($\pi^2 l^2 \sigma_t^4 >> 8E^2\gamma_f^2$), із формули (13) за допомогою критерію Ірвіна отримаємо [2] розв'язок задачі Гріффітса:

$$p_* = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi l}}, \tag{15}$$

або

$$\frac{p_*}{\sigma_t} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\psi}}. \tag{16}$$

Розв'язок цієї задачі здійснено раніше за допомогою δ_c - моделі [4]:

$$p_* = 2\frac{\sigma_t}{\pi}\arccos e^{-\frac{\delta_{Ic}}{8\sigma_t c l}}, \qquad \frac{p_*}{\sigma_t} = \frac{2}{\pi}\arccos e^{-\frac{1}{\psi}}. \tag{17}$$

де $c = \dfrac{1}{\pi E}$.

На *рис.3* наведено графічне порівняння розв'язків (14), (16), (17). Звідси випливає, що вираз (14) є коректним й ефективним за своєю простотою при розв'язанні більш складних задач механіки руйнування. На відміну від розв'язку задачі Гріффітса за критерієм Ірвіна вираз (14) є коректним навіть для малих тріщин, тобто при $l \to 0$. При цьому слід зазначити, що певна неточність (14) в порівнянні із точним розв'язком (17) іде в запас міцності.

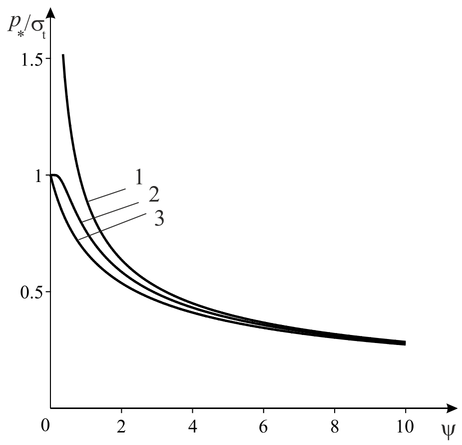

Рис. 3. - **Порівняння розв'язків задачі Гріффітса: 1 – розв'язок за критерієм Ірвіна (16); 2 – розв'язок за допомогою $\delta_c -$ моделі (17); 3 – розв'язок (14)**

Перевіримо точність наближеної формули (12), порівнюючи її з відомими в літературі більш точними результатами.

Розглянемо задачу про розтяг смуги з двома боковими тріщинами довжини $2l$ (*рис.4*). Смуга довжиною $2L$ та шириною $2h$ розтягується зусиллями P. Задача полягає у визначенні розкриття вершини тріщини δ_t.

Для знаходження розкриття вершини тріщини використаємо формулу (12). Коефіцієнт інтенсивності напруження K_I для пластини з двома боковими тріщинами визначається за формулою [6]:

$$K_I = \frac{p\sqrt{\pi l}(1{,}122 - 0{,}561\lambda - 0{,}205\lambda^2 + 0{,}471\lambda^3 - 0{,}190\lambda^4)}{\sqrt{1-\lambda}}, \tag{18}$$

де $\lambda = l / L$.

Тоді з формул (12) та (18) отримаємо:

$$\delta_t = \frac{\pi\sigma_t L\xi^2\lambda(1{,}122 - 0{,}561\lambda - 0{,}205\lambda^2 + 0{,}471\lambda^3 - 0{,}190\lambda^4)^2}{E(1-\xi^2)(1-\lambda)}. \qquad (19)$$

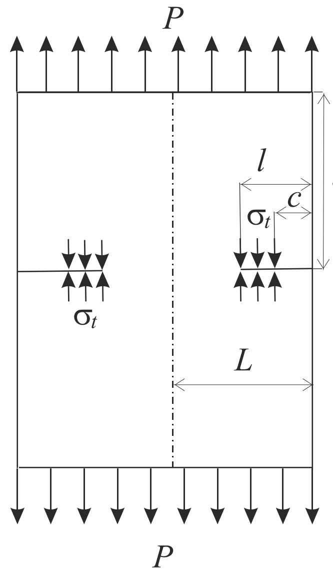

Рис. 4.- **Розтяг пластини з двома боковими тріщинами ($h/L = 3$)**

Відносне розкриття тріщини визначається за формулою [7]:

$$\delta^* = \frac{2\pi\mu\delta}{(\kappa+1)\sigma_t L}. \qquad (20)$$

Оскільки між модулями пружності існують такі залежності:

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \mu = G, \quad E = 2G(1+\nu), \qquad (21)$$

то формула (20) еквівалентна наступній:

$$\delta^* = \frac{\pi E\delta}{4\sigma_t L}. \qquad (22)$$

З (22) та (19) отримаємо формулу для визначення відносного розкриття вершини тріщини:

$$\delta^* = \frac{\pi^2\xi^2\lambda(1{,}122 - 0{,}561\lambda - 0{,}205\lambda^2 + 0{,}471\lambda^3 - 0{,}190\lambda^4)^2}{4(1-\xi^2)(1-\lambda)}. \qquad (23)$$

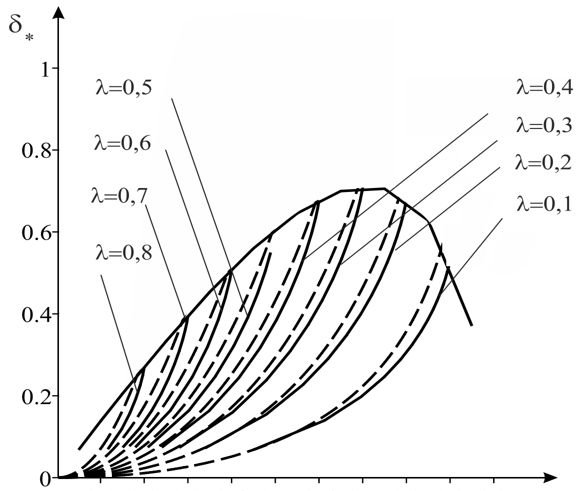

Рис. 5.- **Залежність відносного розкриття вершини тріщини δ_* від відношення $\xi = p/\sigma_t$ для пластини з двома боковими тріщинами: суцільна лінія – числові дані Хаєса та Вільямса [7], пунктирна лінія – залежність за формулою (23)**

Порівняємо розкриття вершини тріщини, отримане аналітично за формулою (23), із числовими даними [7] для пластини з двома боковими тріщинами. Для цього побудуємо графік залежності розкриття вершини тріщини δ_* від відношення прикладеного навантаження p до напруження σ_t (*рис. 5*).

З даного графіка можна зробити висновок, що відхилення аналітичного розв'язку (23) від числових даних [7] є незначними. Для задач інженерної практики така точність є допустимою, оскільки вона іде в запас міцності.

Отже, виведена формула (23) ефективно моделює розв'язок задачі про розтяг пластини з двома боковими тріщинами залежно від лінійних розмірів пластини та тріщини. Певною мірою це підтверджує коректність формули (12) та її достатню точність для інженерних розрахунків

Висновки. У статті запропоновано енергетичний підхід для наближеного визначення залишкової міцності елементів конструкцій з короткими тріщинами у пружно-пластичних матеріалах. Даний підхід апробовано на задачі Гріффітса та порівняно з відповідними розв'язками, знайденими за критерієм Ірвіна та δ_c-моделлю. Порівняння підтверджує добру збіжність результатів.

Розв'язано задачу для смуги з системою двох бокових тріщин, а отримані залежності порівняно з числовими результатами. Порівняння свідчать, що розроблений критерій та аналітичні залежності можна ефективно застосувати для опису поширення коротких тріщин у елементах конструкцій в інженерній практиці (визначення залишкової міцності).

Список використаних джерел:

1. Панасюк В.В. Модель смуг пластичності в пружно-пластичних задачах механіки руйнування / В.В. Панасюк, М.П. Саврук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – №1. – С. 49–68.
2. Панасюк В.В. Основы механики разрушения / В.В. Панасюк, О.Е. Андрейкив, В.З. Партон – К: Наукова думка, 1988. – 488 с.
3. Шата М. Енергетичний підхід у механіці втомного поширення макротріщини / М. Шата, З.О. Терлецька // Механіка руйнування і міцність конструкцій. – Львів, Каменяр. – 1999. – №2. – С. 141 –148.
4. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / В.В. Панасюк– К.: Наукова думка, 1991. – 416 с.
5. Андрейкив А.Е. Усталостное разрушение и долговечность конструкций. / А.Е. Андрейкив, А.И. Дарчук – Киев: Наук. думка, 1992. – 134 с.
6. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещенами / М.П. Саврук. – К: Наукова думка, 1988. – 648 с.
7. Hayes D.S. A Practical Method for Determining Dagdal Model Solutions for Cracked Bodies Arbitrary Shape / Hayes D.S, Williams J.G. // Int. J. of Frac. Mech. – Vol. 8. – № 3, September 1972. – P. 239-256.

<u>Рецензенти статті:</u>

1. **Іваницький Я.Л.**, зав. відділу міцності та довговічності конструкцій за складного навантаження ФМІ ім. Г.В. Карпенка НАН України, д-р. техн. наук., проф.
2. **Опанасович В.К.,** проф. кафедри механіки ЛНУ імені Івана Франка, д-р. фіз.-мат. наук, проф.

Стаття надійшла до редакції 15.03.2017