

УДК 539.375

В.А. Кривень¹, Н.І. Блащак¹, А.Р. Бойко¹, В.Ю. Задорожний²Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя¹Тернопільський технічний коледж ТНТУ імені Івана Пулюя²

ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ПІД ЗСУВНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ ДВОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ ЗА УМОВИ ЇХ ОДНОБІЧНОГО КОНТАКТУ З СЕРЕДОВИЩЕМ

Досліджено напружено-деформований стан необмеженого пружно-пластичного тіла з двома тонкими жорсткими паралельними включеннями, кожне з яких до навантаження перебувало в односторонньому контакті із середовищем. Зовнішні грані пари включень початково знаходились в ідеальному контакті з середовищем, внутрішні не контактували з ним. Деформація тіла зумовлена діючим на нескінченності зсувним квазістатичним зростаючим навантаженням, паралельним прямій, проведеної через центри включень. В процесі навантаження вздовж зовнішніх граней включень, починаючи від їх вершин, розвиваються пластичні смуги і відбувається міжфазне відшаровування. Отримано чисельно-аналітичний розв'язок задачі. Показано, що одностороння відсутність механічного зв'язку з середовищем дуже суттєво проявляється за низького навантаження і, в цілому, призводить до зменшення ділянок міжфазного відшаровування.

Ключові слова: одностороннє відшароване включення, міжфазні пластичні смуги, антиплоска деформація, аналітичний розв'язок.

В.А. Крывень, Н.И. Блащак, А.Р. Бойко, В.Ю. Задорожний

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ОТСЛАИВАНИЕ ПОД СДВИГОВОЙ НАГРУЗКОЙ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ, НАХОДЯЩИХСЯ СО СРЕДОЙ В ОДНОСТОРОННЕМ КОНТАКТЕ

Исследовано напряженно-деформированное состояние неограниченного упругопластического тела с двумя тонкими жесткими параллельными включениями, каждое из которых предварительно находилось в одностороннем контакте со средой. Внешние грани пары включений изначально находились в идеальном контакте со средой, внутренние не контактировали с ней. Деформация тела обусловлена действующей на бесконечности сдвиговой квазистатическим возрастающей нагрузкой, параллельной прямой, проходящей через центры включений. В процессе деформирования вдоль внешних граней включений, начиная от их вершин, развиваются пластические полосы и происходит межфазное отслаивание. Получено численно-аналитическое решение задачи. Показано, что неполная механическая связь со средой очень существенно проявляется при низкой нагрузкой и, в целом, приводит к уменьшению участков межфазного отслаивания.

Ключевые слова: односторонне отслоившееся включение, междуфазные пластические полосы, антиплоская деформация, аналитическое решение

V.A. Kryven, N.I. Blashchak, A.R. Boyko, V.J. Zadorozhnyy

PLASTIC EXFOLIATION OF TWO PARALLEL INCLUSIONS UNDER THE SHEAR LOADING AT ONE SIDED CONTACT WITH ENVIRONMENT

Stress-deformed state of unbounded elastic-plastic body with two thin rigid parallel inclusions, each of them before loading has one-sided contact with environment, was investigated. Initially external edges of a pair of inclusions have strongly contacted with environment, internal ones have not contacted with it. Deformation of body was caused by acting on infinity shear quasi statically increasing loading, which is parallel to the line that passes through the centers of inclusions. Under leading plastic strips evolve along the external edges of inclusions from the inclusion apices and interfacial exfoliation occurs. Formulation of the stress problem was given. This stress problem is reduced to the nonlinear boundary problem of the theory of complex analytic functions. Numerical-analytic solution of this problem was obtained by the method of conformal maps. Regularities of plastic exfoliation of inclusions in case of arbitrary distance between them were researched. Particular cases namely the initial stage of deformation and the long distance between inclusions were analyzed. Simpler formulae for determine interfacial plastic strip lengths depending on singular term of corresponding elastic field were obtained. It is shown that one-sided absence of mechanic contacting with environment appears very serious provided low loading and causes to reduction of zones of interfacial exfoliation.

Keywords: unilateral exfoliated inclusion, interfacial plastic bands, antiplane deformation, analytic solution

Вступ. Дослідження напружено-деформованого стану тіл з близько розташованими включеннями представляють значний інтерес для теорії міцності композитів і армованих матеріалів та прогнозування і оптимізації їх деформаційних характеристик. Для лінійно-пружних тіл ця проблема вивчалася у багатьох працях [1, 2]. Для пружно-пластичних тіл ці питання з'ясовано набагато слабше [3, 4]. Актуальними залишаються питання про напружено деформований стан тіла із взаємодіючими включеннями за умови недосконалого контакту включень з середовищем і їх пластичного відшаровування [5 - 9].

Постановка задачі. Дослідимо напружено деформований стан ідеально пружно-пластичного півпростору $x > 0, -\infty < y, z < \infty$ з двома паралельним жорстким тонким включенням $x = \pm a, -l \leq y \leq l$, під впливом прикладеного на безмежності квазістатично зростаючого зсувного навантаження $\tau_{yz} = \tau_\infty, \tau_{xz} = 0$. Розглянемо випадок однобічного контакту включень з середовищем: вважатимемо, що до навантаження включення перебували у ідеальному контакті з середовищем вздовж граней $x = -a - 0, |y| \leq l$, і $x = a + 0, |y| \leq l$ і не контактували з ним вздовж других граней $x = a - 0, |y| \leq l$ і $x = -a + 0, |y| \leq l$. ($2l$ – висота включень $2a$ – відстань між включеннями).

Матеріал тіла приймаємо ідеально пружно-пластичним із зсувною границею текучості рівною k . Пластичні деформації вважаємо локалізованими на межі включення- середовище у міжфазних смугах $x = -a - 0, -l \leq |y| \leq l$ і $x = a + 0, l - d \leq |y| \leq l$, (d – довжина міжфазних смуг, яка визначається величиною прикладеного навантаження) (рис. 1). Задача полягає у визначенні напружено деформованого стану і дослідженні розвитку пластичних смуг зі збільшенням навантаження.

Формалізація і розв’язання задачі. Постановка задачі у напруженнях у першому

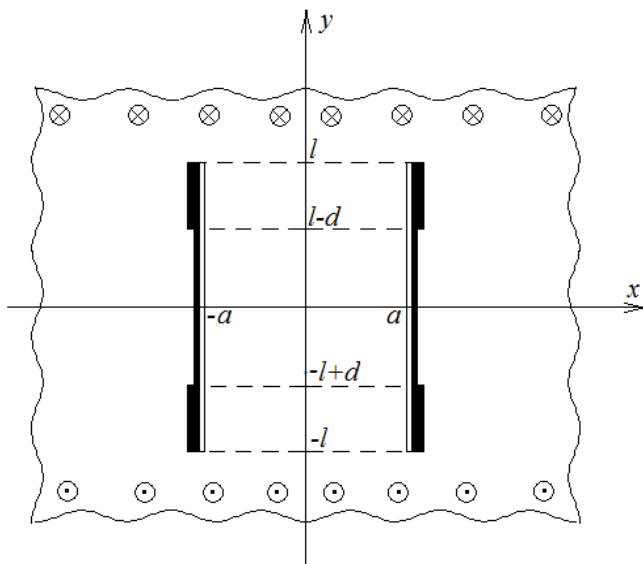


Рис. 1. - Поперечний переріз тіла. Показано включення і міжфазні пластичні смуги.

квadrанті $x > 0, y > 0$, розрізаному вздовж відрізка $x = a, 0 < y < l$, відповідного половині включення (надалі область **D**) виглядатиме так:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(0, y) &= 0 \quad (0 < y < +\infty), \\ \tau_{xz}(x, 0) &= 0 \quad (0 < x < a), \\ \tau_{xz}(a - 0, y) &= 0 \quad (0 \leq y < l), \\ \tau_{xz}^2(a + 0, y) + \tau_{yz}^2(a + 0, y) &= k^2 \quad (l - d \leq y < l), \\ \tau_{yz}(a + 0, y) &= 0 \quad (0 < y < l - d), \\ \tau_{xz}(x, 0) &= 0 \quad (a \leq x < +\infty), \\ \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tau(\zeta) &= \tau_\infty. \end{aligned} \quad (1)$$

Функція комплексного аргументу $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y) \quad \zeta = x + iy$, складена із компонент тензора напружень, є аналітичною, в пружній частині тіла, яку внаслідок симетрії задачі досить визначити в області **D**.

Зміст рівностей (1) є таким: перша – непарність зміщення $w(x, y)$ відносно осі ординат, друга – непарність зміщення $w(x, y)$ відносно осі абсцис, третя – відсутність напружень на вільній від контакту ділянці тіла, четверта – умова пластичності в точках міжфазних пластичних смуг; п’ята – наявність ідеального механічного зв’язку в зоні ідеального контакту включення із середовищем, остання – виражає величину діючого навантаження.

Крім (1) повинна виконуватися умова недосягнення пластичного стану поза пластичними смугами: $|\tau(\zeta)| < k$.

Унаслідок умов (1) функція $\tau(\zeta)$ конформно відображає область **D** на круговий сектор $|\tau| < k, 0 < \arg \tau < \frac{\pi}{2}$ (область **G**) площини τ .

Існують три пари точок A, D, F , координати яких в обох площинах ζ і τ є відомими: $\zeta_A = \infty, \tau_A = \tau_\infty$; $\zeta_D = a + il, \tau_D = k$; $\zeta_F = a, \tau_F = 0$. Тому, за теоремою Рімана, відображення $\tau(\zeta)$ існує і є єдиним. Ця властивість відображення забезпечує єдиність координат усіх решти

точок, які на даному етапі розв'язування задачі залишаються невідомими, зокрема координата точки кінця пластичної смуги у площині ζ . Таким чином довжина пластичних смуг однозначно визнається для кожного τ_∞ з умови існування розв'язку задачі (1).

Оскільки область \mathbf{D} є прямолінійним багатокутником, відображення $\tau(\zeta)$ зручно будувати у параметричному вигляді:

$$\zeta = \zeta(t), \tau = \tau(t) \quad (t \in H, \quad H = \{ \text{Im}t > 0 \}) \quad (2)$$

Тепер зауважимо, що координати точок відомих у площинах ζ і τ можна довільно фіксувати у площині допоміжного комплексного параметра t . Покладемо їх відповідно рівними $t_A = \infty, t_D = 0, t_F = 1$.

Другу із функцій (2) знайдемо композицією елементарних відображень:

$$\tau(t) = 2k^2\tau_\infty \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{(k^2 + \tau_\infty^2)t - 4k^2\tau_\infty^2 + (k^2 - \tau_\infty^2)\sqrt{t}}}. \quad (3)$$

Оскільки координата точки E апіорі відома у площині τ , то із формули (3) можна знайти її координату у площині t : $t_E = 4k^2\tau_\infty^2(k^2 + \tau_\infty^2)^{-2}$.

Відображення $\zeta(t)$ знайдемо за допомогою перетворення Шварца-Крістоффеля:

$$\zeta(t) = a + il + \frac{a}{\int_{t_B}^{t_C} F(\eta)d\eta} \int_0^t \frac{\eta d\eta}{\sqrt{(\eta - t_B)(\eta - t_C)(\eta - 1)}}, \quad (4)$$

$$\text{де } F(\eta) = \frac{|\eta|}{\sqrt{(\eta - t_B)(\eta - t_C)(\eta - 1)}}$$

Тут і нижче під $\sqrt{\eta + p}$ (p – дійсне число) розуміємо аналітичну у верхній півплощині функцію, що набуває дійсних додатних значень, коли η – дійсне і більше за $-p$.

Параметри t_B і t_C ($t_B < t_C < 0$) слід підібрати так, аби виконувалися потрібні метричні співвідношення у фігурі \mathbf{D} :

$$\begin{cases} l \int_{t_B}^{t_C} F(\eta)d\eta = a \int_0^{t_D} F(\eta)d\eta; \\ \int_{t_C}^0 F(\eta)d\eta = \int_0^1 F(\eta)d\eta. \end{cases} \quad (5)$$

Перша із рівностей (5) забезпечує потрібне співвідношення між висотою включень і відстанню між ними; друга – рівність берегів розрізу в області \mathbf{D} .

Розв'язок системи (5) відносно t_B і t_C можна отримати методом послідовних наближень:

$$t_B^{(j+1)} = t_B^{(j)} \left(1 + \frac{BC^{(j)}l - CD^{(j)}a}{BC^{(j)}l + CD^{(j)}a} \right); \quad t_C^{(j+1)} = t_C^{(j)} \left(1 - t_C^{(j)} \frac{CD^{(j)} - DF^{(j)}}{CD^{(j)} + DF^{(j)}} \right), \quad (j = 1, 2, \dots),$$

$$t_B^{(0)} = -2; \quad t_C^{(0)} = -1, \quad (6)$$

$$\text{де } BC^{(j)} = \int_{t_B^{(j)}}^{t_C^{(j)}} F^{(j)}(\eta)d\eta; \quad CD^{(j)} = \int_{t_C^{(j)}}^0 F^{(j)}(\eta)d\eta; \quad DF^{(j)} = \int_0^1 F^{(j)}(\eta)d\eta, \quad \text{функція } F^{(j)}(\eta)$$

відрізняється від $F(\eta)$ тільки заміною t_B і t_C відповідно на $t_B^{(j)}$ і $t_C^{(j)}$.

Зробимо декілька зауважень що до обчислення інтегралів системи (5). Перше: усі інтеграли системи (5) виражаються аналітично через еліптичні інтеграли, але для знаходження їх значень потрібно застосовувати чисельні методи. Якщо відношення a/l не є малою величиною для обчислення інтегралів системи (5) можна скористатися кубатурними формулами, реалізованими наприклад у пакеті MATLAB. Обчислювальні складнощі появляються для малих значень a/l

(включення близькі до межі півпростору). Тоді інтеграл $\int_{t_C^{(j)}}^0 F^{(j)}(\eta) d\eta$ набагато більший, ніж

$\int_{t_B^{(j)}}^{t_C^{(j)}} F^{(j)}(\eta) d\eta$, що забезпечується близькістю параметрів $t_B^{(j)}$ і $t_C^{(j)}$, і суттєво ускладнює обчислення

обох вказаних інтегралів: $\int_{t_B^{(j)}}^{t_C^{(j)}} F^{(j)}(\eta) d\eta$ – внаслідок швидкої зміни підінтегральної функції,

$\int_{t_C^{(j)}}^0 F^{(j)}(\eta) d\eta$ – внаслідок того що поведінка підінтегральної функції в околі точки $t_C^{(j)}$ близька до

поведінки в околі точки із неінтегрованою особливістю, хоча особливість у точці $t_C^{(j)}$ інтегрована. Застосування відомих програмних засобів стає неможливим. Для подолання вказаних складностей скористаємося тим, що при $t_B^{(j)} \rightarrow t_C^{(j)}$ функція

$$g(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(\eta - t_B^{(j)})(t_C^{(j)} - \eta)}}, & \eta \in (t_B^{(j)}; t_C^{(j)}) \\ 0, & \eta \notin (t_B^{(j)}; t_C^{(j)}) \end{cases} \quad \text{прямує до } \pi\delta\left(\eta - \frac{(t_C^{(j)} + t_B^{(j)})}{2}\right) \quad (\delta - \text{дельта}$$

функція Дірака) і, отже, $\int_{t_B^{(j)}}^{t_C^{(j)}} F^{(j)}(\eta) d\eta \approx \pi \frac{t_C^{(j)} + t_B^{(j)}}{\sqrt{2(2 - t_C^{(j)} - t_B^{(j)})}}$ з дуже високою точністю коли

$|t_C^{(j)} + t_B^{(j)}| < 0,05$. Якщо ж $|t_C^{(j)} + t_B^{(j)}| \geq 0,05$ достатню точність забезпечують кубатурні формули.

Для обчислення $\int_{t_C^{(j)}}^0 F^{(j)}(\eta) d\eta$ перед застосуванням кубатурної формули слід позбутися особливості у точці $t_C^{(j)}$.

Беручи до уваги, що кінцевій точці пластичної смуги відповідає $t = t_E$, із (4) отримуємо формулу для довжини міжфазної пластичної смуги:

$$d = \frac{a}{\int_{t_B}^{t_C} F(\eta) d\eta} \int_{t_B}^1 F(\eta) d\eta. \quad (7)$$

Рівності (3), (4), (7) дають розв'язок крайової задачі (1), визначають функцію напружень і залежність від величини навантаження довжини міжфазної смуги пластичного відшарування.

Як частковий випадок із формули (7) можна отримати функцію напружень $\tau_0(\zeta)$ і довжину міжфазної пластичної смуги d_0 для окремого включення. Для цього змістимо паралельним перенесенням початок координат у площині ζ у центр правого включення і спрямуємо відстань між включеннями $a \rightarrow \infty$. У такий спосіб отримуємо:

$$\tau_0(\zeta) = \frac{\sqrt{(k^2 + \tau_\infty^2)^2 \sqrt{\zeta^2 + l^2} - 4k^2 \tau_\infty^2 l - (k^2 - \tau_\infty^2) \sqrt{\zeta^2 + l^2}}}{2\tau_\infty \sqrt{\sqrt{\zeta^2 + l^2} - l}},$$

$$d_0 = l \frac{(k^2 + \tau_\infty^2)^2 - (k^2 - \tau_\infty^2) \sqrt{k^4 + 6k^2 \tau_\infty^2 + \tau_\infty^4}}{(k^2 + \tau_\infty^2)^2}.$$

Для порівняння наведемо залежність довжини міжфазної пластичної смуги від навантаження $d_1(\tau_\infty)$ для включення, яке до навантаження перебувало в ідеальному двобічному контакті з середовищем [4]:

$$d_1(\tau_\infty) = \frac{2l\tau_\infty^2}{k^2 + \tau_\infty^2}.$$

Частковим випадком отриманого розв'язку задачі про пластичне відшаровування включень є також пружний розв'язок цієї задачі, який отримаємо граничним переходом $k \rightarrow \infty$.

Із формул (3) одержуємо функцію $\tau = \tau^{(e)}(t)$,

$$\tau^{(e)}(t) = \tau_\infty \sqrt{\frac{t-1}{t}},$$

яка в парі із (4) дає пружний розв'язок розглянутої задачі.

Зважаючи на важливість поведінки напружень в околі вершин включень і тріщин для механіки руйнування, дослідимо асимптотику поля пружного поля напружень в колі вершин включень

Оскільки $\zeta \rightarrow a + il$, коли $t \rightarrow 0$, то у цьому випадку із формул (4), (8) отримуємо:

$$\tau^{(e)}(t) = \frac{\tau_\infty}{\sqrt{t}} + o(t^{-1/2}), \quad \zeta(t) = a + il + \frac{a}{2 \int_{t_B}^{t_C} F(\eta) d\eta} \frac{t^2}{\sqrt{t_B t_C}} + o(t^2)$$

І, отже,

$$\tau^{(e)}(\zeta) = \frac{K}{\sqrt[4]{\zeta - a - il}} + o((\zeta - a - il)^{-1/4}), \quad K = \frac{\tau_\infty \sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{2 \int_{t_B}^{t_C} F(\eta) d\eta}}$$

коли $\zeta \rightarrow a + il$.

Поле пружних напружень сингулярне у вершинах включень з показником $1/4$:

Для квазікрихких матеріалів практично важливою є дослідження початкової стадії розвитку пластичних деформацій та спрощені формули для опису зони пластичних деформацій (довжини пластичних смуг), що опираються на сингулярну складову поля пружних напружень. З цією метою дослідимо початкову стадію пластичного відшаровування включень для випадку навантажень, набагато менших за границю текучості $\tau_\infty \ll k$.

Оскільки $t_E \ll 1$, коли $\tau_\infty \ll k$, для початкової стадії пластичного відшаровування із формули (7) отримуємо

$$d \approx \frac{a}{2 \int_{t_B}^{t_C} F(\eta) d\eta} t_E^2 \approx \frac{8a\tau_\infty^4}{k^4 \int_{t_B}^{t_C} F(\eta) d\eta} - \text{смуги пластичного відшаровування ростуть}$$

пропорційно τ_∞^4 , а довжина пластичних смуг через коефіцієнт K пружного розв'язку визначається

за формулою $d = 16K^4 \frac{\tau_\infty^4}{k^4} l$. При низьких навантаженнях неповний контакт дуже суттєво впливає на розвиток міжфазного відшаровування: смуги ростуть пропорційно другому степеню відношення τ_∞/k за умови суцільного контакту, тоді як за умови однобічного контакту – четвертому.

Висновки. Отримано чисельно-аналітичний розв'язок задачі про напружено - деформівний стан необмеженого тіла з тонким жорстким паралельними між собою тунельним включенням. Вважається, що вздовж внутрішніх граней включень механічний контакт включень із середовищем відсутній, зовнішніх – ідеальний. Деформація тіла зумовлена діючим на нескінченності зсувним квазістатично зростаючим навантаженням, паралельним прямій, проведеної через центри включень, під впливом якого проходить пластичне відшаровування включень вздовж зовнішніх їх граней. Досліджено закономірності пластичного відшаровування включень для довільної між ними відстані. Зроблено аналіз часткових випадків: початкової стадії деформування, великої відстані між включеннями. Отримано спрощені формули, що визначають довжини міжфазних пластичних смуг через сингулярний член відповідного пружного поля. Показано, що однобічна відсутність механічного зв'язку з середовищем дуже суттєво

проявляється за низького навантаження і, в цілому, призводить до зменшення ділянок міжфазного відшаровування.

Список використаних джерел:

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями: монографія. Сулим Г. Т. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Панасюк В. В. Концентрація напружень в трохмерних телах с тонкими включеннями // Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. – Киев : Наук. думка, 1986. – 215 с.
3. V. A. Kryven^o. Initial stage of plastic exfoliation of a rectangular inclusion under conditions of one-sided contact with a medium / V. A. Kryven^o, V. B. Valiashek. – Journal of Mathematical Sciences, 2010, Vol. 171, No. 4. – P 107–116.
4. Kryven, V. A. Sulym, G. T. Yavorska, M. I. Plastic interfacial slip of periodic systems of rigid thin inclusions undergoing longitudinal shear . // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2006. – 44, № 4. – P. 837–848.
5. Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. – Днепропетровск: Пороги, 2008. – 196 с.
6. Победра Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
7. Сильвестров В.В., Ярдухин А.К. Межфазная трещина и отслоившееся тонкое жесткое гладкое межфазное включение при сложном нагружении // Проблемы механики неупругих деформаций: М.: Физматлит, 2001. с. 301–313.
8. Лавренюк М.В. Дослідження напружено-деформованого стану нескінченної пружної платівки з прямокутними включеннями за умов ідеального та неідеального контактів // Вісник Київського університету. – 1998. №4. – с. 17–26.
9. Лавренюк М.В. Дослідження напружено-деформованого стану скінченної платівки з двома включеннями за умов ідеального та неідеального контактів// Вісник Київського університету. – 1999. №2. – с. 40–49.

Стаття надійшла до редакції 25.04.2017