

УДК 539.3

О.А. Мікуліч

Луцький національний технічний університет

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПІНИСТИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

У роботі в рамках псевдоконтинууму Коссера розроблено методика аналітико-числового дослідження напруженого стану тіл, виготовлених з пінистих матеріалів, що послаблені тунельними порожнинами чи системами тунельних порожнин за дії імпульсного навантаження. Запропонований алгоритм базується на сумісному використанні інтегрального та дискретного перетворення Фур'є, методу граничних інтегральних рівнянь та методу механічних квадратур. У роботі використано функції впливу для псевдоконтинууму Коссера, що дають можливість враховувати оберально-зсувні деформації, що виникають у тілах з пінистих матеріалів за дії динамічного навантаження. На основі розробленої методики досліджено зміну з часом кільцевих та радіальних напружень у пінистих тілах, послаблених тунельними порожнинами кругового перерізу.

Ключові слова: пінисті матеріали, напружений стан, нестационарна задача.

Е.А. Микulich

Луцький національний технічний університет

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЕНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

В работе в рамках псевдоконтинуума Коссера разработана методика аналитическо-численного исследования напряженного состояния тел, изготовленных из пенных материалов, ослаблены туннельными полостями или системами туннельных полостей за действия импульсной нагрузки. Предложенный алгоритм базируется на совместном использовании интегрального и дискретного преобразования Фурье, метода граничных интегральных уравнений и метода механических квадратур. В работе использованы функции влияния для псевдоконтинуума Коссера, позволяющие учитывать вращательно-сдвижные деформации, возникающие в телах с пенных материалов за действия динамической нагрузки. На основе разработанной методики исследовано изменение со временем кольцевых и радиальных напряжений в пенных телах, ослабленных туннельными полостями кругового сечения.

Ключевые слова: пенные материалы, напряженное состояние, нестационарная задача.

O.A. Mikulich

Lutsk National Technical University

CALCULATION OF STRESS STATE OF FOAM MATERIALS BY ACTION OF DYNAMIC LOADS

This paper proposes the novel technique for analysis of dynamic stress state of body, which is made of foam materials, with tunnel cavities under the action of dynamic loads. For solution of the problem it uses the integral and discrete Fourier transforms. Calculation of transformed dynamic stresses at the body is held using the boundary-integral equation method and the theory of complex variable functions. The representation of the transforms of fundamental tensor of displacements at Cosserat pseudo-continuum is used. The numerical implementation of the developed algorithm is based on the method of mechanical quadratures and collocation technique. On the basis of the developed technique, the time dependence of hoop and radial stresses in foam with tunnel cavities of circular section was investigated.

Keywords: foam materials, stress state, non-stationary problem.

Постановка проблеми. У останні роки істотно зросло використання пінистих матеріалів, особливо для звуко- та теплоізоляції. Такі матеріали зазнають впливу динамічних навантажень. Для ефективної оцінки їх напруженого стану слід враховувати внутрішній момент кількості руху мікрочастинок, який не можна описати у рамках апарату класичної теорії пружності.

Згідно принципу Пуансо в загальному випадку дія довірливої системи сил на тіло еквівалентна головному вектору та головному моменту. При цьому у тілі окрім силових напружень виникають також і моментні. Щоб їх врахувати слід допустити існування внутрішньої мікроструктури у нескінченно малому об'ємі матеріалу.

Такі питання розглядаються у рамках моментної теорії пружності Коссера [1]. Тут кожна матеріальна точка володіє властивостями твердого тіла: має шість ступенів вільності, що характеризують положення у просторі та орієнтацію. У рамках континууму Коссера з'являються додаткові фізичні параметри, що характеризують лінійний розмір, момент інерції частин та властивості частин відносно обертання. Дослідження взаємодії частинок мікрополярного тіла здійснюється не тільки з врахуванням силових (звичайних), але і моментних напружень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження напруженого стану пінистих матеріалів за дії динамічного навантаження слід проводити з урахуванням можливості оберально-

зсувних деформацій на основі рівнянь руху моментної теорії пружності. Застосування апарату моментної теорії пружності дає можливість врахувати розмірні ефекти, що виникають за різних видів навантажень у полімерних матеріалах [2].

Поширення хвильових процесів у моментних середовищах розглядалося у працях В.М. Садовського [3], В.І. Єрофеева [4], С.О. Саркіяна та ін. У роботах Lakes R.S., Anderson W.B. [5] та ін. проведені експериментальні дослідження впливу мікроструктури поліітакрилїміду на його динамічну поведінку.

Аналітичні розв'язки деяких класів статичних та динамічних задач дослідження напруженого стану тіл у рамках псевдоконтинууму Коссера побудовані у роботах Савина Г.Н. та ін. [6-9].

Метою дослідження є розробка аналітично-числової методики дослідження напруженого стану пінистих тіл з тунельними порожнинами довільного перерізу, аналогічної до [10], за дії динамічного навантаження на основі рівнянь моментної теорії пружності.

Постановка завдань. Розглянемо пружне пінисте середовище у псевдоконтинуумі Коссера, що послаблене тунельною порожниною чи системою тунельних порожнин сталого довільного перерізу. Дослідимо розподіл динамічних радіальних та кільцевих напружень у пінистому середовищі за дії пружного імпульсу, що обумовлює осесиметричний тиск, прикладений до границі порожнини.

Граничні умови задачі записуються у вигляді:

$$\sigma_r|_L = -\sigma_0\phi(t), \tau_{r\theta}|_L = 0, \quad (1)$$

де $\phi(t)$ — функція зміни інтенсивності пружного імпульсу з часом t , σ_0 — стала, що залежить від інтенсивності навантаження. За числових розрахунків зміну інтенсивності імпульсу з часом представимо у вигляді слабкої ударної хвилі [11]:

$$\phi(\tau) = p_*\tau^{n_*}e^{-\alpha_*\tau}, \tau > 0, n_* \geq 0, \quad (2)$$

де p_* , n_* , α_* — сталі, τ — безрозмірний часовий параметр.

Викладення основного матеріалу. Віднесемо тіло до декартової системи координат Ox_1x_2 , яку розмістимо у його центі ваги. Рівняння руху тіла у псевдоконтинуумі Коссера записується у вигляді [8]:

$$(\lambda + 2\mu)\text{grad div } \mathbf{u} + \text{rot rot} \left(\frac{B}{4} \Delta \mathbf{u} - \mu \mathbf{u} \right) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3)$$

де Δ — оператор Лапласа, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{u_j(\mathbf{x}, t)\}$, $j=1,2$ — вектор переміщень, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, ρ — густина, μ , λ — сталі Ляме, B — стала, що відповідає мікроструктурі матеріалу ($B = \gamma + \epsilon$), , ,

Аналогічно до [10], для розв'язання нестационарної задачі використаємо перетворення Фур'є за часовою змінною t :

$$\tilde{f}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4)$$

де ω — частота, $i = \sqrt{-1}$. Застосовуючи перетворення (4) до рівнянь (3), аналогічно до [8], отримаємо рівняння, що є аналогами рівнянь усталених коливань з циклічною частотою ω .

$$(\lambda + \mu)\partial_j \tilde{\theta} + \frac{B}{4} \Delta \partial_j \tilde{\theta} - \frac{B}{4} \Delta \tilde{u}_j + \mu \Delta \tilde{u}_j + \omega^2 \tilde{u}_j = 0. \quad (5)$$

Тут \tilde{u}_j є Фур'є-зображеннями переміщень, що знаходяться на основі залежностей (4), $\tilde{\theta} = \partial_j \tilde{u}_j$.

Записавши вектор переміщення \mathbf{u} у вигляді суми потенціальної φ та вихрової ψ функцій:

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi},$$

та підставляючи його у рівняння (5), визначимо швидкості поширення хвиль у псевдоконтинуумі Коссера:

$$c_3 = \sqrt{c_2(\sqrt{c_2^2 + 4l^2\omega^2} + c_2)}/2, \quad c_4^2 = \sqrt{c_2(\sqrt{c_2^2 + 4l^2\omega^2} - c_2)}/2, \quad (6)$$

де $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ — швидкість хвилі розширення, l — масштабний фактор, що має розмірність довжини та залежить від мікроструктури матеріалу, $l^2 = B/(4\mu)$.

3 (6) видно, що при $l \rightarrow 0$ швидкість першої з хвиль $c_3 \rightarrow c_2$, а друга з уявним хвильовим числом $i\omega/c_4$ зникає.

Застосовуючи перетворення (4) до граничних умов (1), отримаємо:

$$\tilde{\sigma}_r|_L = -\sigma_0 \tilde{\phi}(\omega), \quad \tilde{\tau}_{r\theta}|_L = 0, \quad (7)$$

де $\tilde{\phi}(\omega) = p_*(n_*!) (\alpha_* + i\omega)^{-n_*-1}$ — зображення функції (2).

Для задоволення граничних умов для першої основної задачі потенціальне зображення загального розв'язку для переміщень виберемо у вигляді [10]:

$$\tilde{u}_k(\mathbf{x}, \omega) = \int_L p_j(\mathbf{x}^0, \omega) \cdot U_{jk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0, \omega) ds, \quad (9)$$

де p_1, p_2 — невідомі потенціальні функції, $k = 1, 2$. Інтегрування вздовж границі проводиться за змінними $\mathbf{x}^0 = \{x_1^0; x_2^0\}$. Для псевдоконтинууму Коссера представлення для зображень U_{jk}^* побудовано з урахуванням умов випромінювання Зомерфельда у вигляді:

$$U_{jk}^* = U_{jk}^{*KI} + U_{jk}^{*M},$$

де U_{jk}^{*KI} — фундаментальний тензор переміщень класичної теорії пружності, U_{jk}^{*M} — фундаментальний тензор, що враховує вплив обертально-зсувних деформацій у псевдоконтинуумі Коссера.

Для визначення невідомих на границі функції p_1, p_2 розрахуємо напруження за формулами [8]:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{4} \left(e^{-2i\theta} (\sigma_{11} - \sigma_{22} + i(\tau_{12} + \tau_{21})) + e^{2i\theta} (\sigma_{11} - \sigma_{22} - i(\tau_{12} + \tau_{21})) \right); \\ \tilde{\tau}_{r\theta} &= \frac{\tau_{12} - \tau_{21}}{2} + \frac{i}{4} \left(e^{2i\theta} (\sigma_{11} - \sigma_{22} - i(\tau_{12} + \tau_{21})) - e^{-2i\theta} (\sigma_{11} - \sigma_{22} + i(\tau_{12} + \tau_{21})) \right); \end{aligned} \quad (10)$$

де θ — кут між нормаллю до площинки та віссю Ox_1 .

Підставляючи зображення (9) у формули (10), отримаємо інтегральні залежності виду:

$$\tilde{\sigma}_r = \int_L (f_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p_j) ds; \quad \tilde{\tau}_{r\theta} = \int_L (g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p_j) ds \quad (12)$$

де f_j, g_j — відомі функції, які містять функції Бесселя третього роду. Здійснивши граничний перехід у залежностях (12) на основі формул Племеля-Сохоцького з урахуванням нерегулярності підінтегральних функцій, отримаємо систему інтегральних рівнянь для визначення невідомих на границі функцій p_1, p_2 :

$$\begin{aligned} \text{Re}(q)/2 + \mathbf{v.p.} \int_L (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\zeta + f_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{q} d\bar{\zeta}) &= -\sigma_0 \phi(\omega); \\ \text{Im}(q(1 - (l/c_2)^2))/2 + \mathbf{v.p.} \int_L (g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\zeta + g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{q} d\bar{\zeta}) &= 0; \end{aligned} \quad (13)$$

де $p ds = -iq d\zeta$, $p = p_1 + ip_2$ — невідома функція, $\zeta = x_1^0 + ix_2^0$. Тут інтеграли розуміються у сенсі головного значення. Для числового визначення невідомих p_1, p_2 використано підхід, розвинутий у [10], що ґрунтується на сумісному використанні методу механічних квадратур та колокації. При цьому для інтегралів, що містять особливості типу Коші, використано квадратурні формули підвищеної точності.

Визначення зображень динамічних кільцевих напружень на границі проводилося за формулами [8]:

$$\tilde{\sigma}_\theta = (\sigma_x + \sigma_y)/2 - (e^{-2i\theta} (\sigma_x - \sigma_y + i(\tau_{xy} + \tau_{yx})) + e^{2i\theta} (\sigma_x - \sigma_y - i(\tau_{xy} + \tau_{yx}))) / 4,$$

що при підстановці потенціального зображення (9), виділенні нерегулярних складових та граничному переході вигляді запишуться:

$$\tilde{\sigma}_\theta = \frac{V}{2} \text{Re}(q) + \mathbf{v.p.} \int_L (h_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\zeta + h_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{q} d\bar{\zeta}).$$

Дослідження інтенсивності згасання радіальних напружень у пінистому середовищі у роботі проводиться на основі аналізу розподілу відповідних напружень у віддалених від центру

ваги перерізах тіла. Значення динамічних радіальних напружень розраховувалися на основі представлень:

$$\tilde{\sigma}_r = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \cdot \int_L f_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \rho_j ds.$$

Оригінали кільцевих та радіальних напружень знаходилися з використанням дискретного оберненого перетворення Фур'є:

$$\sigma(T_k) = \frac{2}{T} \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{K-1} \tilde{\sigma}(\omega_n) \exp \left(2\pi i \frac{n \cdot k}{K} \right) - \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{\sigma}(\omega_n) \right), \quad (14)$$

де K — кількість елементів дискретної вибірки, $\omega_n = 2\pi n/T$ — частоти вибірки, $T_k = kT/K$, $k = 0..K-1$ — фіксовані моменти часу. Для оптимізації числових розрахунків представлення (14) зручно обчислювати за допомогою швидкого дискретного перетворення Фур'є [12], при якому $K = 2^m$, m — ціле додатне число.

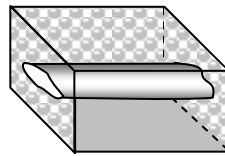


Рис. 1. - Моделювання об'єкту дослідження

Розглянемо нескінченне ізотропне пружне пінисте середовище, що послаблене тунельною порожниною сталого довільного перерізу (рис. 1). Дослідимо зміну розподілу динамічних кільцевих та радіальних напружень за дії пружного імпульсу (2), що обумовлює осесиметричний тиск, прикладений до границі порожнини кругового перерізу.

Розрахунок напруженого стану виконано для пінистого поліуретану WF 300 [5] з густиною $\rho = 0,38$ г/см³, модулем Юнга $E = 637$ МПа, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,13$ та сталою мікроструктури $V = 676$ Н.

Числові розрахунки виконано для $K = 512$ елементів дискретної вибірки для швидкого дискретного перетворення Фур'є. При розрахунках приймалося, аналогічно до [11] $p_* = 185$; $n_* = 2$; $\alpha_* = 10$. Дослідження проводилися для інтервалу безрозмірного часового параметра $\tau \in [0, 8]$.

На рис 2. наведено результати розрахунку відносних радіальних напружень у тілі для перерізів, що віддалені на відстані $2R$ (крива 1), $3R$ (крива 2), $4R$ (крива 3) та $5R$ (крива 4) від центру порожнини радіусу R .

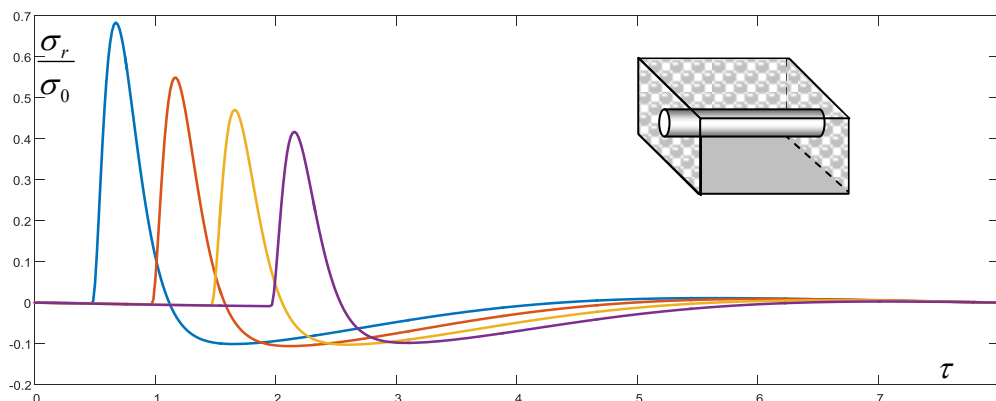


Рис. 2. - Розподіл відносних радіальних напружень у пінистому середовищі

Достовірність розробленої методики підтверджується тим, що динамічні напруження є нульовими до того моменту часу, поки хвиля не досягне відповідного перерізу (рис. 2). При проходженні пружної хвилі через точки перерізу радіальні напруження зростають. Подальше

поширення хвилі у тілі пов'язане із зменшенням радіальних напружень, причому вони спочатку досягають граничних величин від'ємних значень, а потім затухають до нуля. Наявність від'ємних значень розрахованих радіальних напружень пов'язана з можливістю обертання мікрочастинок середовища та пояснюється наявністю обертально-зсувних деформацій у тілі від дії імпульсного навантаження.

З рис. 2 видно, що у перерізі, який віддалений на відстані $3,5R$ від центру порожнини, радіальні напруження у двічі менші від тих, що виникають на її границі.

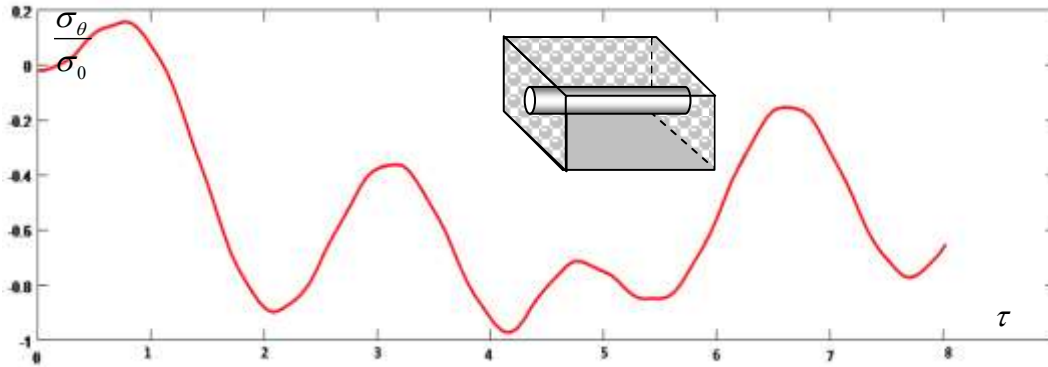


Рис. 3. - Розподіл відносних кільцевих напружень на границі порожнини у пінистому середовищі

З рис. 3 видно, що розподіл кільцевих динамічних напружень на границі порожнини має коливний характер. Це пояснюється істотним впливом обертально-зсувних деформацій, що виникають у пінистому середовищі за дії динамічного навантаження.

Висновки. В статті у рамках псевдоконтинууму Коссера розроблено аналітико-числову методику дослідження поширення пружних хвиль у пінистих середовищах, що послаблені тунельними порожнинами сталого перерізу. Розроблений підхід ґрунтується на використанні інтегрального та дискретного перетворення Фур'є за часом, причому останнє застосовується лише на етапі пошуку оригіналів. Це забезпечує високу точність отриманих результатів.

Записавши, аналогічно до (14), дискретні часові подання для переміщень, а основи запропонованої методики можна проаналізувати повну картину перебігу нестационарного хвильового процесу у пінистих середовищах.

Список використаних джерел:

1. А.К. Эринген. Теория микрополяриной упругости // Разрушение. – М.: Мир. – 1975. – Т. 2. – С. 646–751.
2. W. B. Anderson, R. S. Lakes. Size effects due to Cosserat elasticity and surface damage in closed-cell polymethacrylimide foam. // Journal of Materials Science. — 1994. — vol. 29. — PP. 6413–6419.
3. В.М. Садовский, О.В. Садовская, М.П. Варыгина. Численное моделирование пространственных волновых движений в моментных средах. // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 4. – С. 111–121.
4. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой/ В.И. Ерофеев. – М.: Изд. Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
5. R. Lakes. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with microstructure. — 1995.— Ch. 1. – P. 1–22.
6. Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д. В. Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера.// Физика сплошных сред. — 2013. —Т.5, № 1. — С. 119–125.
7. И.Н. Шардаков, М.А.Кулеш. Посторонние и анализ некоторых точных аналитических решений двумерных упругих задач в рамках континуума Коссера. // Математическое моделирование систем и процессов. — 2001. — № 9. — С. 187–201.
8. Г.Н. Савин, Н.А. Шульга. Динамическая плоская задача моментной теории упругости. // Прикладная механика. — 1967. — т. 3, вып. 6. — С. 216–221.
9. Hadjesfandiari A.R., Dargush G.F. Boundary element formulation for plane problems in couple stress elasticity. // International Journal for Numerical Methods in Engineering . — 2011. — vol. 89. — PP 618–636.
10. О.А. Mikulich, V.I. Shvabjuk Interaction of weak shock waves with rectangular meshes in plates. // Odes'kyi Politehnychnyi Universytet. PRATSI. — 2016. vol. 2(49). — PP. 104–110.
11. Я. Пастернак, Г. Сулим, Р. Пастернак . Концентрація динамічних напружень біля тонких пружних включень за умови антиплоскої деформації. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2013. — вип. 18. — С. 157–164.
12. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. — Москва: Мир, 1974. — 464 с.

Стаття надійшла до редакції 10.05.2017