

УДК 624.04

**М.Г. Сур'янінов, О.М. Чучмай, О.С. Шияєв**  
*Одеська державна академія будівництва та архітектури*  
**ЗГИН І КРУТІННЯ СИСТЕМ З ПЕРЕХРЕСНИМИ ЗВ'ЯЗКАМИ**

*Розглянутий вигин і крутіння залізобетонних систем з перехресними зв'язками. Відзначено, що в таких системах ребра, як правило, не бувають тонкостінними, що дозволяє спростити вільний член диференціального рівняння вигину пластини, який ураховує не тільки зовнішнє навантаження, але й наявність підкріплювальних ребер у поздовжньому напрямку. Методом Канторовича-Власова вихідне диференціальне рівняння із двома змінними приведене до диференціального рівняння з однією змінною, характеристичне рівняння якого може мати шість варіантів коренів. Отримана повна система розв'язків, яка містить 96 аналітичних виражень фундаментальних ортонормованих функцій. Побудовано також функцію Гріна.*

*Ключові слова:* система з перехресними зв'язками, метод граничних елементів, метод Канторовича-Власова фундаментальна функція, функція Гріна.

**Н.Г. Сурьянинов, А.М. Чучмай, А.С. Шияев**  
**ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ СИСТЕМ С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СВЯЗЯМИ**

*Рассмотрен изгиб и кручение железобетонных систем с перекрестными связями. Отмечено, что в таких системах ребра, как правило, не бывают тонкостенными, что позволяет упростить свободный член дифференциального уравнения изгиба пластины, который учитывает не только внешние нагрузки, но и наличие подкрепляющих ребер в продольном направлении. Методом Канторовича-Власова исходное дифференциальное уравнение с двумя переменными приведено к дифференциальному уравнению с одной переменной, характеристическое уравнение которого может иметь шесть вариантов корней. Получена полная система решений, которая содержит 96 аналитических выражений фундаментальных ортонормированных функций. Построена также функция Грина.*

*Ключевые слова:* система с перекрестными связями, метод граничных элементов, метод Канторовича-Власова фундаментальная функция, функция Грина.

**N.G. Surianinov, A.M. Chuchmay, A.S. Shilyev**  
**BENDING AND TORQUETING SYSTEMS WITH CROSS-RELATED COMMUNICATIONS**

*The bending and torsion of reinforced concrete systems with cross links is considered. It is noted that in such systems the ribs, as a rule, are not thin-walled, which makes it possible to simplify the free term of the differential bending equation of the plate, which takes into account not only external loads, but also the presence of reinforcing ribs in the longitudinal direction. Using the Kantorovich-Vlasov method, the initial differential equation with two variables is reduced to a differential equation with one variable whose characteristic equation can have six variants of roots. A complete system of solutions is obtained that contains 96 analytic expressions for the fundamental orthonormal functions. The Green function is also constructed.*

*Keywords:* system with cross links, boundary elements method, Kantorovich-Vlasov method, fundamental function, Green's function.

**Постановка проблеми.** Системи з перехресними зв'язками знаходять широке застосування в багатьох галузях промисловості — будівництві, мостобудуванні, авіації, суднобудуванні та ін. У будівництві та мостобудуванні це, в першу чергу, кесонні перекриття, які фактично являють собою плиту (пластину), підкріплену системою перехресних балок — ребер, розташованих у нижній зоні. У такій конструкції бетон вилучений з розтягнутої зони перетину, у якій збережені лише ребра, у яких розташована розтягнута арматури. У результаті вдається одержати значну економію матеріалу в порівнянні з перекриттями суцільного перетину, або суттєво збільшити прольоти, що перекриваються.

Для розрахунків таких систем використовують, як правило, класичні методи будівельної механіки (метод сил або метод переміщень) і чисельні методи, частіше метод скінченних елементів, реалізований у сучасних інженерних програмах розрахунків [1, 2].

**Метою** нашого дослідження є розв'язок завдання з використанням чисельно-аналітичного методу граничних елементів (ЧА МГЕ) [3 – 5].

**Результати досліджень.** Метод полягає в розробці фундаментальної системи розв'язків (аналітично) і функцій Гріна (також аналітично) для розглянутого завдання. Урахування граничних умов, або умов контакту між модулями (окремими елементами системи) здійснюється шляхом чисельного розв'язку невеликої системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Чисельно-аналітичний метод граничних елементів має цілу низку переваг у порівнянні із традиційним методом скінченних елементів. Дискретизація тільки границі області, займаної об'єктом, суттєво знижує порядок системи розв'язних рівнянь; знижується мірність розв'язуваного

завдання. Метод використовує фундаментальні розв'язки диференціальних рівнянь, тому дозволяє одержати точні значення зусиль, переміщень, напружень, струмів, частот власних коливань, критичних сил втрати стійкості і т.д. усередині області (з урахуванням точності прийнятих вихідних гіпотез). Проста й зрозуміла логіка алгоритму розв'язку, гарна збіжність, незначне нагромадження погрішностей при чисельних операціях.

Розглянемо систему з перехресними зв'язками (рис. 1). Основна ідея пропонованого підходу полягає в наступному. Частина конструкції, які мають ребра, паралельні осі  $OX$  (назвемо цей напрямок поперечним), вважаються гладкими пластинами товщиною  $h_1 = h + h_{rib}$  та шириною  $b = b_{rib}$ , де  $h$  — товщина пластини,  $h_{rib}$ ,  $b_{rib}$  — розміри поперечних перерізів ребер (які не обов'язково повинні бути однаковими). Для цих модулів (модуль — одиниця дискретизації в ЧА МГЕ) слухна теорія розрахунків гладких пластин, викладена в [3, 4], з відповідними вираженнями фундаментальних функцій, функції Гріна й вектора навантаження. На рис. 2 такі модулі позначені парними цифрами. Інші модулі (непарні цифри на рис. 2) являють собою пластини, підкріплені ребрами в поздовжньому напрямку, тобто паралельно осі  $OY$ .

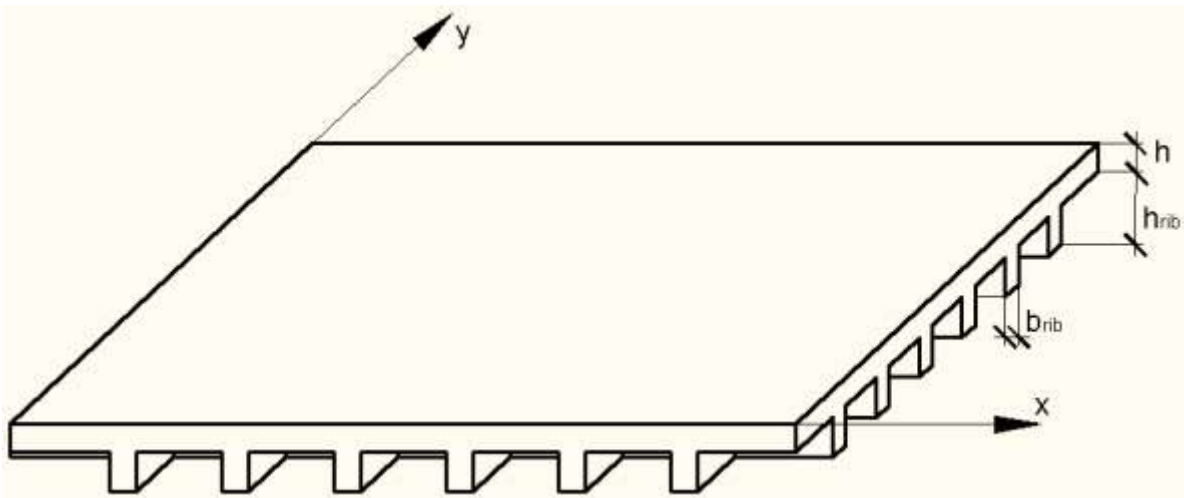


Рис. 1. - Система з перехресними зв'язками

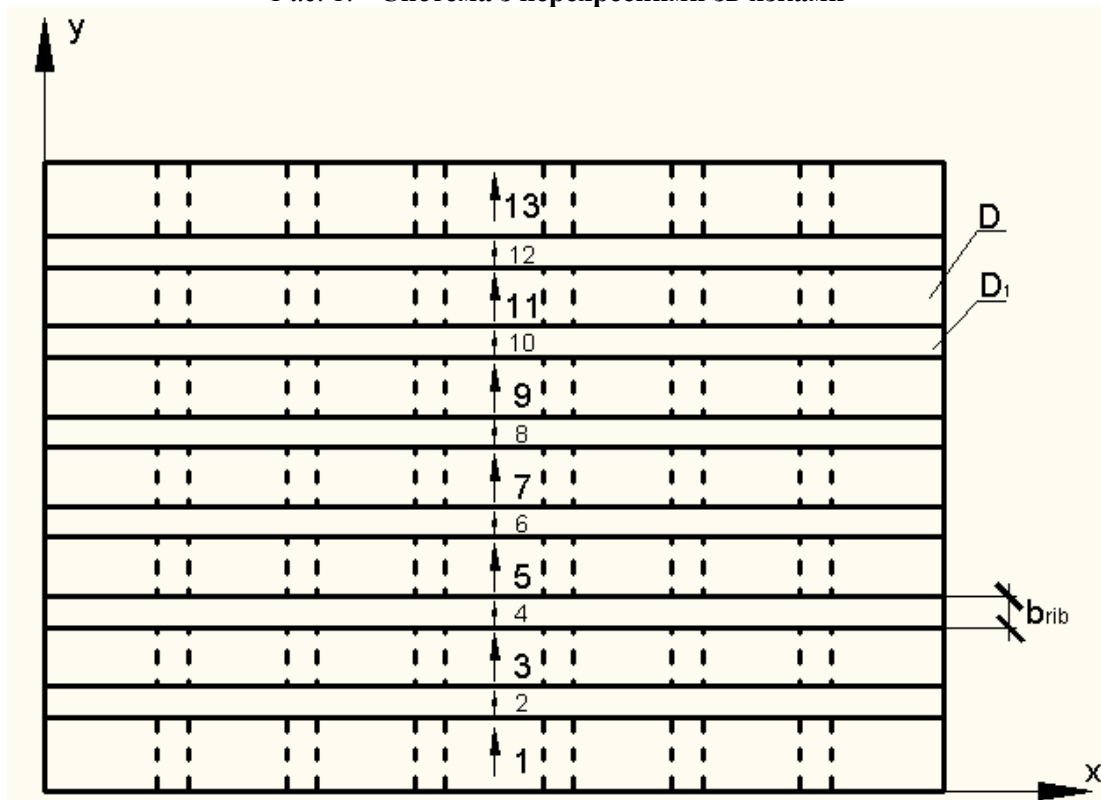


Рис. 2. - Дискретизація системи на одномірні модулі

Розглянемо докладніше застосування ЧА МГЕ до цих модулів.

Диференціальне рівняння вигину пластини в цьому випадку ухвалює вид [6]

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{\bar{q}}{D}, \quad (1)$$

де  $W = W(x, y)$  — прогин пластини;  $\bar{q} = \bar{q}(x, y)$  — вільний член рівняння, що враховує не тільки зовнішні навантаження, але й наявність підкріплювальних ребер у поздовжньому напрямку.

Застосуємо для (1) метод Канторовича-Власова, тобто прогин серединної площини пластини будемо шукати у вигляді

$$W(x, y) = W_1(y)X_1(x) + W_2(y)X_2(x) + \dots + W_k(y)X_k(x). \quad (2)$$

Усічемо ряд (2) до одного члена й поберемо варіацію прогину тільки по напрямкові  $y$ , що рівносильне прийняттю розрахункової схеми пластини, що має нескінченне число ступенів волі в одному напрямку та один ступінь волі в іншому напрямку. Тоді прогин точки серединної площини пластини буде

$$W(x, y) = W(y)X(x). \quad (3)$$

Функцію поперечного розподілу прогинів  $X(x)$  потрібно вибирати так, щоб вона максимально точно описувала форму вигнутої поверхні пластини в напрямку осі  $x$ . Цій вимозі повною мірою задовольняють криві прогину балки, що має такі ж умови обпирання, як і пластини, у напрямку осі  $x$ .

Можливі два способи для вибору функції прогинів  $X(x)$  — статичний і динамічний. При статичному способі прогин балки визначається прикладеним до неї статичним навантаженням.

У цьому випадку  $X_1(x)$  буде мати вигляд

$$X_1(x) = \left( \frac{x}{l_1} - 2 \frac{x^3}{l_1^3} + \frac{x^4}{l_1^4} \right) + M(0) \left( 8 \frac{x}{l_1} - 12 \frac{x^2}{l_1^2} + 4 \frac{x^3}{l_1^3} \right) + M(l_1) \left( 4 \frac{x}{l_1} - 4 \frac{x^3}{l_1^3} \right);$$

$$M(0) = M(l_1) = -\frac{l_1^2}{12}.$$

Навантаження, що прикладається, повинне мати такий характер, щоб симетричні та кососиметричні форми кривої прогину послідовно чергувалися.

При динамічному способі прогини балки виражаються її формами власних коливань.

При такому підході  $X_1(x)$ , наприклад, має вигляд

$$X_1(x) = \sin(\omega_1 x/l_1) - sh(\omega_1 x/l_1) - \alpha \cdot [\cos(\omega_1 x/l_1) - ch(\omega_1 x/l_1)];$$

$$\alpha = \frac{\sin \omega_1 - sh \omega_1}{\cos \omega_1 - ch \omega_1}; \quad \omega_1 = 4,73004075.$$

Найбільш загальний вид навантаження  $\bar{q} = \bar{q}(x, y)$  має в тому випадку ребра, що коли підкріплюють, будуть як суцільного перерізу, так і тонкостінного:

$$\begin{aligned} \bar{q}(x, y) = q(x, y) - \sum_{i=1}^n EI_x W^{IV}(y) X(a_i) \delta(x - a_i) - \sum_{i=1}^n \frac{GA}{k_1} W''(y) X(a_i) \delta(x - a_i) - \\ - \sum_{i=1}^n [EI_\omega W^{IV}(y) X'(a_i) - GI_k W''(y) X'(a_i)] \delta'(x - a_i), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $EI_x$ ,  $EI_\omega$ ,  $EI_k$  — жорсткості ребер при згині та крутінні;  $k_1$  — коефіцієнт, що враховує форму перерізу;  $a_i$  — координата розташування  $i$ -го ребра.

Для прямокутного перерізу  $k_1 = 1,2$ . В загальному випадку коефіцієнт  $k_1$  визначається вираженням [7]

$$k_1 = \frac{A_y(z)}{B_x^2(z)} \int_A \frac{S_{EyA}^2}{Gb^2} dA,$$

$$\text{де } A \text{ — площа перерізу; } A_y = \int_A GdA; B_x(z) = \int_A Ey^2 dA; S_{EyA} = \int_A ExdA.$$

Однак у цьому випадку, коли мова йде про залізобетонну конструкцію, тонкостінні ребра можна виключити з розгляду, і тоді вираження (4) спроститься:

$$\bar{q}(x, y) = q(x, y) - \sum_{i=1}^n EI_x W^{IV}(y) X(a_i) \delta(x - a_i) - \sum_{i=1}^n \frac{GA}{k_1} W''(y) X(a_i) \delta(x - a_i) + \sum_{i=1}^n GI_k W''(y) X'(a_i) \delta'(x - a_i), \tag{5}$$

Дельта-функція  $\delta(x - a_i)$  і її похідна  $\delta'(x - a_i)$  використовуються в (5), коли ребро дуже вузьке, що в цьому випадку неможливо, тому наявність ребра враховується різницею одиничних функцій Хевісайда [7]:

$$[H(x - a_H)H(y - b_H) - H(x - a_K)H(y - b_K)].$$

Підставимо (3) в (1) і у відомі вираження згинальних моментів і приведених поперечних сил. Множачи потім обидві частини кожного вираження на  $X(x)$  й інтегруючи в межах  $[0; l_1]$ , одержимо завдання Коші одомірної моделі вигину прямокутної пластини, підкріпленої поздовжніми ребрами:

$$W^{IV}(y) - 2r^2 W''(y) + s^4 W(y) = \frac{\bar{q}(y)}{D} \tag{6}$$

за початкових умов

$$DW(0); D\theta(0) = DW'(0); M(0) = -D\bar{A}[W''(0) - \mu r^2 W(0)]; Q(0) = -D\bar{A}[W'''(0) - (2 - \mu)r^2 W'(0)], \tag{7}$$

де

$$r^2 = -\bar{B}/\bar{A}; s^4 = C/\bar{A}; \bar{q}(y) = \int_0^{l_1} \bar{q}(x, y) X(x) dx / \bar{A}; \tag{8}$$

$$\bar{A} = A + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^n EI_x X^2(a_i); \tag{9}$$

$$\bar{B} = B + \frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n EI_k [X'(a_i)]^2 + \frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \frac{GA}{k_1} X^2(a_i); \tag{10}$$

$$A = \int_0^{l_1} X^2(x) dx; B = \int_0^{l_1} X''(x) X(x) dx; C = \int_0^{l_1} X^{IV}(x) X(x) dx. \tag{11}$$

Значення коефіцієнтів (8)-(11) легко обчислюються в будь-якому математичному пакеті.

Розв'язок завдання Коші можна представити відповідно до алгоритму методу граничних

елементів:

$DW(y)$	=	$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	+	$\int_0^y$	$A_{14}(y - \xi)$	)	$\bar{q}(\xi) d\xi$	.	(12)
$D\theta(y)$		$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$			$A_{13}(y - \xi)$				
$M(y)$		$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{22}$	$A_{12}$			$-A_{12}(y - \xi)$				
$Q(y)$		$-A_{41}$	$-A_{31}$	$A_{21}$	$A_{11}$			$-A_{11}(y - \xi)$				

Таким чином, при використанні методу Канторовича-Власова розв'язок основного диференціального рівняння завдання зводиться до визначення прогину (3), де функція  $X(x)$  задана, а функція  $W(y)$  визначається з (6) у вигляді

$$DW(y) = A_{11} \cdot DW(0) + A_{12} \cdot D\theta(0) - A_{13} \cdot M(0) - A_{14} \cdot Q(0) + \int_0^y A_{14}(y - \xi) q(\xi) d\xi. \tag{13}$$

Розв'язок рівняння (6) залежить від корінь відповідного йому характеристичного рівняння, які представляються вираженням

$$k_{1-4} = \pm \sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \tag{14}$$

Вид фундаментальних функцій визначається співвідношенням між  $r$  і  $s$ , яке залежить від граничних умов на поздовжніх крайках пластини та параметрів ребер жорсткості. При цьому тут можливі шість випадків.

Для цих шести випадків нами отримані аналітичні вираження всіх фундаментальних функцій. Так, для першого варіанта коренів перші чотири функції мають вигляд

$$\begin{cases} A_{11} = \hat{O}_2 - \frac{(1-\mu)r^2}{2\alpha\beta} \hat{O}_4; \\ A_{12} = \frac{s^2 - \mu r^2}{2\beta s^2} \hat{O}_1 + \frac{s^2 + \mu r^2}{2\alpha s^2} \hat{O}_3; \\ A_{13} = \frac{\hat{O}_4}{2\alpha\beta A}; \\ A_{14} = \frac{\alpha\hat{O}_1 - \beta\hat{O}_3}{2\alpha\beta s^2 A}, \end{cases}$$

де  $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \hat{O}_3, \hat{O}_4$  — гіперболо-тригонометричні функції:

$$\begin{cases} \hat{O}_1 = ch\alpha y \sin \beta y; \\ \hat{O}_2 = ch\alpha y \cos \beta y; \\ \hat{O}_3 = sh\alpha y \cos \beta y; \\ \hat{O}_4 = sh\alpha y \sin \beta y. \end{cases}$$

Через обмеженість обсягу статті, аналітичні вираження інших 92-х фундаментальних функцій тут не приводимо.

Вираження функції Гріна через ортонормовану фундаментальну функцію завдання не залежить від варіанту коренів характеристичного рівняння, тому можна розглядати кожного з перерахованих шести випадків розв'язку. Розглянемо, наприклад, випадок, коли коріння розв'язку дійсні та уявні:

$$k_{1,2} = \pm i\beta; \quad k_{3,4} = \pm \alpha;$$

$$\hat{O}_1 = \cos \beta y; \quad \hat{O}_2 = \sin \beta y; \quad \hat{O}_3 = ch\alpha y; \quad \hat{O}_4 = sh\alpha y. \quad (15)$$

Представимо розв'язок у вигляді

$$\theta(y) = C_1 \hat{O}_1 + C_2 \hat{O}_2 + C_3 \hat{O}_3 + C_4 \hat{O}_4, \quad (16)$$

Тоді величини  $C_1 - C_4$  при  $y = \xi$  можна визначити із системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \hat{O}_1 \tilde{N}_1 + \hat{O}_2 \tilde{N}_2 + \hat{O}_3 \tilde{N}_3 + \hat{O}_4 \tilde{N}_4 = 0; \\ \hat{O}'_1 \tilde{N}_1 + \hat{O}'_2 \tilde{N}_2 + \hat{O}'_3 \tilde{N}_3 + \hat{O}'_4 \tilde{N}_4 = 0; \\ \hat{O}''_1 \tilde{N}_1 + \hat{O}''_2 \tilde{N}_2 + \hat{O}''_3 \tilde{N}_3 + \hat{O}''_4 \tilde{N}_4 = 0; \\ \hat{O}'''_1 \tilde{N}_1 + \hat{O}'''_2 \tilde{N}_2 + \hat{O}'''_3 \tilde{N}_3 + \hat{O}'''_4 \tilde{N}_4 = 1. \end{cases} \quad (17)$$

Вирішуючи цю систему методом Гауса, після підстановки та нескладних перетворень одержимо:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{\beta s^2} \hat{O}_2(\xi); \\ C_2 = -\frac{1}{\beta s^2} \hat{O}_1(\xi); \\ C_3 = -\frac{1}{\alpha s^2} \hat{O}_4(\xi); \\ C_4 = \frac{1}{\alpha s^2} \hat{O}_3(\xi), \end{cases} \quad (18)$$

де

$$s^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Таким чином, функція Гріна з'являється у вигляді

$$\begin{aligned}
G(y - \xi) &= C_1(\xi)\hat{O}_1(y) + C_2(\xi)\hat{O}_2(y) + C_3(\xi)\hat{O}_3(y) + C_4(\xi)\hat{O}_4(y) = \\
&= \frac{1}{\beta s^2} \sin \beta \xi \cos \beta y - \frac{1}{\beta s^2} \cos \beta \xi \sin \beta y - \frac{1}{\alpha s^2} sh \alpha \xi ch \alpha y + \\
&+ \frac{1}{\alpha s^2} ch \alpha \xi sh \alpha y = -\frac{1}{\beta s^2} \sin \beta(y - \xi) + \frac{1}{\alpha s^2} sh \alpha(y - \xi) = \\
&= -\frac{1}{\beta s^2} \hat{O}_2(y - \xi) + \frac{1}{\alpha s^2} \hat{O}_4(y - \xi).
\end{aligned} \tag{19}$$

Порівнюючи (19) з аналітичними вираженнями відповідних фундаментальних функцій, остаточно одержимо

$$G(y - \xi) = A_4(y - \xi). \tag{20}$$

**Висновки.** У залізобетонних системах з перехресними зв'язками відсутній ефект тонкостінності ребер, що дозволяє спростити вільний член диференціального рівняння вигину пластини, котрий враховує не тільки зовнішні навантаження, але й наявність підкріплювальних ребер у поздовжньому напрямку.

Методом Канторовича-Власова вихідне диференціальне рівняння із двома змінними можна привести до диференціального рівняння з однією змінною, характеристичне рівняння якого може мати шість варіантів коренів. Повна система розв'язків буде містити 96 аналітичних виражень фундаментальних ортонормованих функцій. Ці вираження отримані в роботі. Побудовано також функцію Гріна.

#### Список використаної літератури:

1. Дашенко А.Ф. ANSYS в задачах инженерной механики / А.Ф. Дашенко, Д.В. Лазарева, Н.Г. Сурьянинов / Изд. 2-е, перераб. и доп. Под ред. Н. Г. Сурьянинова. — Одесса. — Пальмира, 2011. — 505 с.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер // Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
3. Дашенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. — Одесса: ВМВ, 2010. — В 2-х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.
4. Оробей В.Ф. Практикум по решению краевых задач механики: Учебное пособие для студентов технических специальностей / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. — Одесса: Астропринт, 2011. — 408 с.
5. Оробей В.Ф. / Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. — Труды Санкт-Петербургского политехнич. ун-та // Инженерно-строительный журнал. — № 4 (22). — СПб, 2011. — С. 33-39.
6. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы / В.З. Власов. — М.: Стройиздат, 1958. — 502 с.
7. Ершова В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В.В. Ершова // Под ред. В.И. Азаматовой. — Минск: Вышэйшая школа, 1976. — 255 с.

Стаття надійшла до редакції 13.04.2017