УДК 539.3

В.І. Шваб'юк, О.В. Гуда, В.В. Шваб'юк
Луцький національний технічний університет

ДО ПРОБЛЕМИ РОЗРАХУНКУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК У ПОСТАНОВЦІ ГІПОТЕЗ ПРИКЛАДНИХ ТЕОРІЙ ТА ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Наведено аналіз варіантів побудови розрахункових рівнянь для циліндричних оболонок та методів одержання їх розв'язків на базі прикладних теорій, а також просторової задачі теорії пружності. Наведено числовий приклад для тестової задачі та дається аналіз отриманих результатів.

Ключові слова: *прикладні теорії оболонок, осесиметрична задача теорії пружності, оболонки середньої товщини, символічний метод А.І.Лур'є*

В.И. Швабюк, О.В. Гуда, В.В. Швабюк

К ПРОБЛЕМЕ РАСЧЕТА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В ПОСТАНОВКЕ ГИПОТЕЗ ПРИКЛАДНЫХ ТЕОРИЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Приведено анализ вариантов построения расчетных уравнений для цилиндрических оболочек та методов получения их решений на базе прикладных теорий, а также пространственной задачи теории упругости. Наведено численный пример для тестовой задачи. Дается анализ полученных результатов

Ключевые слова: *прикладные теории оболочек, осесимметричная задача теории упругости, оболочки средней толщини, символический метод А.И.Лурье*

V.I. Shvabyuk, O.V. Guda, V.V. Shvabyuk

TO THE PROBLEM OF CALCULATION CYLINDRICAL SHELLS IN FORMULATION OF HYPOTHESES APPLIED THEORIES AND SPATIAL THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF ELASTICITY

Here is the analysis of variants of calculation equations for cylindrical shells and methods for their solutions based on the application of theories and spatial three-dimensional problem of elasticity. Analyzed the estimated equations and solutions of spatial problem of elasticity produced by synthesis methods A.I. Lur'ye and M.E Vashchenko-Zakharchenko and similar equations and solutions refined theory of bending cylindrical shells that take into account transverse strain and reduction. Represented an example of numerical illustration for test problem and also provided an analysis of the results.

Key words*: applied theory of shells, axisymmetric elasticity, shell of medium thickness, symbolic method A.I.Lur'ye.*

Вступ. Циліндрична оболонка є одною з найбільш поширених елементів тонкостінних несучих конструкцій, виготовлених як із традиційних, так і композитних матеріалів. У циліндричних оболонках вдало поєднуються переваги, які зв'язані з опуклістю серединної поверхні і відносною простотою технологій виготовлення. Крім того, така оболонка вигідна ще і тим, що при певних умовах закріплення країв її розрахункові рівняння дають можливість для деяких навантажень одержувати точні розв'язки, символічний метод Лур'є.

Постановка проблеми. **Аналіз останніх досліджень і публікацій**. У літературі відомо досить багато варіантів побудови розрахункових рівнянь для циліндричних оболонок та методів одержання їх розв'язків. Фундаментальні основи розрахунку таких оболонок закладені в рівняннях типу В.З. Власова [4], А.Л. Гольденвейзера [5], В.В. Новожилова [12] і інших, коли базовими гіпотезами були гіпотези Кірхгофа-Лява. Для композитних оболонок із малою зсувною жорсткістю значний вклад в побудову некласичних теорій оболонок зроблено С.О. Амбарцумяном [1], В.В.Васильєвим [2], Я.М.Григоренком, А.Т. Василенком і Г.П. Голуб [6], В.Г.Піскуновим [13], О.О. Рассказовим [17], Б.Л. Пелехом [14], Б.Л. Пелехом і М.А. Сухорольським [15], І.Ю. Хомою [19] та іншими авторами [8, 20,21], які зводяться до наступної системи рівнянь:

$$D\Delta^2 w+\left(1-\varepsilon\Delta\right)\Delta_k F = q-\varepsilon\Delta q; \quad \Delta^2 F-2Eh\Delta_k w=0; \quad \Delta\Omega-k^2\Omega=0, \tag{1}$$

де $\Delta=\frac{1}{A_\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{A_\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$; $\Delta_k=\frac{k_\beta}{A_\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{k_\alpha}{A_\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$; $k^2=\frac{2}{\varepsilon\left(1-\nu\right)}$, $D=\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\nu^2}$; w – функція прогину серединної поверхні оболонки; $F(\alpha,\beta)$ – функція зусиль В.З. Власова [4], $\Omega\left(\alpha,\beta\right)$ – функція кручення, що є розв'язком рівняння Гельмгольца; $k_\alpha, k_\beta, A_\alpha, A_\beta$ – кривини та коефіцієнти Ляме координатних ліній серединної поверхні оболонки: $k_x=0$, $k_\varphi=1/R$; $A_x=1$; $A_\varphi=R$;

$\varepsilon = D/(2k'Gh)$ – параметр, за допомогою якого враховується поправка від впливу деформації поперечного зсуву; $2h$ – товщина оболонки, R – середній радіус оболонки (рис. 1).

При цьому вважається, що серединна поверхня оболонки віднесена до ліній кривини α і β, які будуть відігравати відповідно роль твірної і напрямної. Для більшої зручності користаються заміною змінних системи координат: $\alpha = x,\ \ \beta = \varphi$. Тут $x-$ віддаль точки вздовж твірної від початкового поперечного (екваторіального) перерізу; φ – кут між початковою і будь-якою меридіональними площинами.

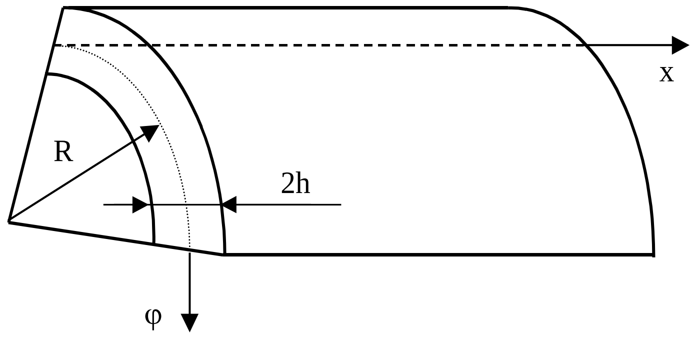

Рис. 1. **Елемент кругової циліндричної оболонки**

Теорії, що описуються системою рівнянь (1), називають теоріями оболонок типу Тимошенка, які, крім урахування деформацій поперечного зсуву, усувають ще й деякі математичні протиріччя, які має класична теорія оболонок. Основними із них є невідповідність порядку розрахункових диференціальних рівнянь кількості граничних умов, а також досить жорсткі гіпотези із розподілу напружень та переміщень за товщиною оболонки. Теорія типу Тимошенка має вищий – десятий порядок розрахункових диференціальних рівнянь (1) – у порівнянні з класичною, яка має восьмий поряок (відсутнє рівняння Гельмгольца). Тому відповідно до цієї теорії на краях оболонки можна задовольнити уже п'яти "природним" граничним умовам.

Оцінка напружено-деформованого стану в таких оболонках здійснюється на основі спрощених формул, де нормальні та тангенціальні напруження виражаються через згинальні моменти та поперечні сили відповідно до гіпотез, що закладені у згаданих моделях. Поклавши у першому рівнянні (1) параметр $\varepsilon = 0$ та, відкинувши однорідне рівняння Гельмгольца, що описує так званий вихровий крайовий ефект Рейсснера, отримаємо рівняння класичної теорії пологих оболонок Кірхгофа-Лява, що будується на гіпотезі недеформівних нормалей та нехтуванні нормальними напруженнями σ_z. Застосування гіпотези недеформівних нормалей вносить похибки, що не усуваються як у класичній теорії, так і в теоріях типу Тимошенка.

Товстостінні циліндричні оболонки з анізотропного матеріалу на основі рівнянь теорії пружності досить детально розглянуті у відомих роботах О.М. Гузя та ін. [7], Я.М. Григоренка і його учнів [6]. Отримані ними розв'язки задач можуть бути використані для порівняння з відповідними результатами класичної та уточнених теорій оболонок із метою визначення областей їх застосування. Особливо це є важливим при дослідженнях впливу анізотропії матеріалу на критичні навантаження, а також у дослідженнях контактних задач. Разом з тим, розрахунок циліндричних оболонок із використанням прикладних теорій призводить, у деяких випадках навантажень, до значних похибок, а при безпосередньому інтегруванні рівнянь теорії пружності отримати замкнуті розв'язки практично неможливо. Числова реалізація останніх потребує значних витрат часу на ПЕОМ і ускладнюється при зменшені параметра $\varepsilon = h/R$. Для випадку нерівномірно нагрітих та навантажених пластин В.М. Максимовичем [10], шляхом синтезу методів А.І.Лур'є [9] та М.Є. Ващенка-Захарченка [2], проведено покращення збіжності рядів і побудовано на цій основі співвідношення, які уточнюють прикладні рівняння тонких пластинок. Нехтуючи величинами порядку ε^2 порівняно з одиницею, у працях [10,11] отримано загальний розв'язок осесиметричної задачі теорії пружності для циліндричної оболонки та ізотропного шару. Розв'язки знайдено з використанням формул розвинення М.Є. Ващенка-Захарченка [3] до символічного розв'язку А.І.Лур'є [9], які записується у вигляді суми трьох складових: перші – близькі за видом до рівнянь теорії оболонок Кірхгофа-Лява; другі – розв'язки теорії пружності для шару (“виродженого” порожнистого циліндра при $R \to \infty,\ \varepsilon \to 0$); треті – корегуючі розв’язки, що мають простий вигляд. Запропонований метод дозволяє отримати прості рівняння та співвідношення для визначення напружень і переміщень в поперечних перерізах циліндричної оболонки та ізотропного шару [11,20]. Наступні дослідження дозволяють також проводити для циліндричної оболонки та ізотропного шару розрахунок напружень в області дії як розподіленого, так і локально прикладеного навантажень.

Основні співвідношення. У випадку осесиметричної задачі теорії пружності для нескінченного порожнистого циліндра виходять із рівнянь теорії пружності в переміщеннях:

$$\Delta W + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} = 0, \quad \Delta U + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi} = 0, \tag{2}$$

розв’язки яких мають задовольняти заданим на границі напруженням —

$$\sigma_r /_{r=R\pm h} = q \pm p; \ \ \tau_{rz} /_{r=R\pm h} = 0,$$

де $q = \dfrac{\sigma^+ + \sigma^-}{2},\ p = \dfrac{\sigma^+ - \sigma^-}{2},\ \sigma^\pm -$ відомі функції зовнішніх зусиль; $\Theta = \dfrac{\partial W}{\partial\rho} + \dfrac{\partial U}{\partial\xi} + \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho}W,$ $\rho = \dfrac{r-R}{h},\ \ \xi = \dfrac{x}{h},\ \ \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho},\ \ R-h < r < R+h,\ \nu -$ коефіцієнт Пуассона.

Напруження на площинках із нормалями $r,\ \theta$ знаходяться за формулами закону Гука:

$$h\sigma_r = \lambda\Theta + 2G\frac{\partial W}{\partial\rho}, \quad h\sigma_\theta = \lambda\Theta + \frac{2G\varepsilon}{1+\varepsilon\rho}U_r, \quad h\tau_{rx} = G\left(\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{\partial W}{\partial\xi}\right), \tag{3}$$

де $\lambda = 2\nu G/(1-2\nu) -$ постійна Ламе; $G -$ модуль зсуву.

Розв’язки системи рівнянь (2) шукають у символічному вигляді А.І.Лур’є [9]. Для цього вводяться позначення $\dfrac{\partial}{\partial\xi} = d$ і записується утворена при цьому система звичайних диференціальних рівнянь:

$$U'' + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho}U' + \nu^* d^2 U = \frac{d\cdot d_0^2}{2(1-\nu)}\cdot\tilde{w}; \quad W'' + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho}W' + \frac{d^2}{1+\nu_0}W = -\frac{d}{2(1-\nu)}\cdot U', \tag{4}$$

де $(U)' -$ оператор диференціювання за змінною ρ; $\tilde{w} = \int\limits_0^\rho W d\rho + C;\ \ d_0^2 = d^2 + \varepsilon^2(1+\nu_0);$

$\nu_0 = \dfrac{1}{1-2\nu};\ \ \nu^* = (3-2\nu)/(2-2\nu).$

Для спрощення розв’язків задачі теорії пружності розділяють її (за видом навантаження) на дві: кососиметричну та симетричну. Для кососиметричного навантаження (випадок $q=0$) розв’язок системи рівнянь (4) можна записати у символічному вигляді:

$$W = \frac{f(\rho,d)}{g(\varepsilon,d)}p; \quad U = \frac{u(\rho,d)}{g(\varepsilon,d)}p; \quad \sigma_i = \frac{S_i(\rho,d)}{g(\varepsilon,d)}p, \tag{5}$$

де $u, f, g, S_i -$ цілі функції відносно змінної d та d^2 (дані функції мають складний вигляд [11,21], тому виписувати їх у роботі не будемо). Відзначимо, що $S_i(\rho,0) \neq 0,\ g(\varepsilon,0) \equiv g(0) \neq 0$).

До розв’язків (5) можна застосувати формулу розвинення М.Є. Ващенка-Захарченка [3], яку, помноживши чисельник і знаменник на d^2, можна записати у вигляді:

$$\sigma_i = d^2\left\{2\sum_m \frac{S_i(\rho,\alpha_m)}{\alpha_m g'(\alpha_m)}p_m + \frac{S_i(\rho,0)}{g(0)}p_0\right\}, \tag{6}$$

де $\alpha_m -$ корені рівняння $g(\alpha)=0$, що задовольняють умову $\mathrm{Re}\,\alpha_m \geq 0$, $p_m -$ розв’язки рівнянь $(d^2-\alpha_m^2)p_m = p$ при $m \neq 0$ і $d^4 p_0 = p.$ Відзначимо, що функції p_m для нескінченних оболонок визначаються з умови на нескінченності: $p \to 0$ для $(m \neq 0)$.

Відповідна система рівнянь уточненої моделі трансверсально – ізотропної циліндричної оболонки середньої товщини має вигляд [20,21]:

$$\frac{d^4w}{dx^4}-2g_0{}^2\frac{d^2w}{dx^2}+\lambda^4 w=\frac{\tilde q}{D};\qquad K_x\frac{d^2\tilde w_\tau}{dx^2}=2\frac{Eh}{R^2}w-\tilde q;\qquad \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\nu}{R}\frac{dw}{dx}=0, \tag{7}$$

де u, w, R – переміщення та радіус кривини серединної поверхні оболонки, E, ν та E', ν' – модулі пружності та коефіцієнти Пуассона у напрямках x, z; w_τ – складова переміщення w, що відповідає деформації поперечного зсуву; $D=\frac{2}{3}\tilde E h^3$; $\tilde E = E/(1-\nu^2)$; $\lambda^4 = 2Eh/(DR^2)$;

$\tilde w_\tau = w_\tau - h^2 w_2$; $w_2 = 0,5A'\left(\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{6}{5}\frac{E}{G'}\frac{w}{R^2}\right)$; $\tilde q = p\left[1-(1-\nu'')\frac{h}{R}-\frac{9}{40}\frac{h^2}{R^2}\frac{E}{E'}\right]$; $2g_0{}^2=\tilde\varepsilon\lambda^4$;

$\tilde\varepsilon=\varepsilon_x\cdot(1-\nu^*)$; $\nu^*=\frac{5}{6}\nu(1+A')G'/E$; $\varepsilon_x=0,4h^2\tilde E/G'$; $K_x=\frac{4}{3}G'h$; $A'=\nu''(1-\nu)^{-1}$.

Розв'язком першого рівняння системи (7) у випадку симетричності граничних умов є:

$$w=C_1 ch\tilde\alpha x\cdot\cos\tilde\beta x + C_2 sh\tilde\alpha x\cdot\sin\tilde\beta x + w^*; \tag{8}$$

де $\tilde\alpha=\sqrt{\frac{\lambda^2+g_0{}^2}{2}}$; $\tilde\beta=\sqrt{\frac{\lambda^2-g_0{}^2}{2}}$; $w^*=\frac{\tilde q R^2}{2Eh}$ – частковий розв'язок рівняння (7); C_1, C_2 – коефіцієнти, що знаходяться з граничних умов на краях оболонки.

Основним недоліком системи рівнянь (7), порівняно із системою рівнянь (4), є те, що вона описує тільки характер зміни переміщень уздовж осі x-ів, а характер зміни переміщень у поперечному напрямку (r або z) задається наперед тією чи іншою моделлю оболонки. Наприклад, модель типу Тимошенка приймає, що тангенціальні переміщення $U(x,z)$ змінюються стосовно z за лінійним законом, а нормальні переміщення $W(x,z)=w(x)$, тобто залишаються сталими за товщиною. Запропонована авторами модель [21] приймає зміну тангенціального переміщення за кубічною параболою, а нормальні переміщення $W(x,z)$ — за параболою четвертого порядку. Тому, чим точніше модель описує розподіл напружень і переміщень за товщиною, тим ближчими будуть розв'язки цих систем.

Числові результати. Розглянемо згин циліндричної оболонки під дією внутрішнього тиску, котрий змінюється за законом — $\sigma^- = p = q\cdot\sin\lambda_n x$, $\lambda_n = n\pi/\ell$ $\sigma^+=0$,
(9)

де q – інтенсивність навантаження посередині оболонки.

Будемо вважати, що на краях оболонки: $x=0, x=\ell$ (ℓ – довжина оболонки) виконуються умови шарнірного опертя:

$$N_x = M_x = 0;\quad v=w=\gamma_\varphi=0, \tag{10}$$

де N_x, M_x – поздовжня сила та згинальний момент у поперечних перерізах оболонки.

Для їх тотожного задоволення досить взяти вираз для радіального прогину у вигляді $w=w_0\sin\lambda_n x$. Підставивши ці вирази для p і w у рівняння (7), одержимо:

$$w_0=\frac{qR^2}{2Eh[\cdots]}[(1+\lambda_n^2\varepsilon)(1-\frac{h}{R}(1-\nu'')-\frac{h^2}{R^2}\frac{E}{E'})-\frac{D\lambda_n^2}{ER}(0,6\nu''(1+\nu)\cdot\frac{R}{h}-0,5\nu\frac{E}{E'})], \tag{11}$$

де використано позначення $[\cdots]=1+\varepsilon\lambda_n^2+\lambda_n^4/\lambda^4$.

Зробимо співставлення числових результатів, одержаних за формулою (11) та точним розв'язком просторової задачі теорії пружності [6,11]. У підрахунках брались наступні значення вихідних даних: $\frac{\ell}{R}=2$; $\frac{R}{2h}=3,\ 5,\ 10$; $\frac{E}{G'}=2,\ 6;\ 20$; $\frac{R}{\ell_0}=60,\ 20$; $\nu=\nu''=0,\ 3$ і різних $\delta=\ell/2nh$; (ℓ_0- одиниця довжини). Величини відносного радіального переміщення $\tilde w = w/qE^{-1}\cdot\ell_0$ для ізотропної оболонки (при $R/\ell_0=60$) наведені в табл. 1.

Аналіз числових даних табл.1 показує, що для $n=1$ значення відносного радіального переміщення $\tilde w$ серединної поверхні оболонки, знайдені за формулою (11) і за допомогою точного розв'язку теорії пружності повністю співпадають. Разом з тим, уточнені теорії типу С. Тимошенка

[2,14, 18] в цих випадках дають результати, які майже не відрізняються від відповідних результатів класичної теорії оболонок Кірхгофа-Лява**.** Ці ж теорії дають значно кращі результати у порівнянні з класичною теорією при $n \geq 5$. З табл.1 також видно, що для $\delta < 1$ ні одна з уточнених теорій оболонок не працює. Тому тут необхідно користуватись розв'язками просторової задачі теорії пружності.

Таблиця 1.

Значення відносних переміщень $\tilde{w}$ залежно від товщини та моделі оболонки

$\frac{2h}{R}$	$n;\delta$	Точний розв'язок [6]	Дана модель, формула (11)	Теорії типу Тимошенка	Класична теорія
$\frac{1}{10}$	1;20 10;2	575 15,8	575 15,9	597 17,8	597 10,6
$\frac{1}{5}$	1;10 5;2 10;1	271 28,8 3,76	271 28,4 4,15	294 32,7 5,05	293 20,1 1,34
$\frac{1}{3}$	1;6 5;1,2 10;0,6	148 9,70 –	148 10,1 1,94	170 12,8 2,56	169 4,50 3,76

В табл.2 пораховані величини радіальних переміщень $\tilde{w} \cdot 10^{-2}$ оболонки для різних значень E / G'. При підрахунках приймається, що відношення $E / E' = 1$, $R / \ell_0 = 20$, $\delta = 4$. Порівнюються радіальні переміщення ізотропної та трансверсально-ізотропної оболонок, які знайдені за формулою (11), з точним розв'язком просторової задачі теорії пружності [46] для $\tilde{W}(-h)$ і $\tilde{W}(h)$ (числа в дужках).

Таблиця2.

Значення переміщень $\tilde{w} \cdot 10^{-2}$

$\frac{2h}{R}$	n	$E / G' = 0$	$E / G' = 2,6$	$E / G' = 20$	
		Класична теорія	Формула (11)	Формула (11)	Точний розв'язок
0,05	10	0,268	0,299	0,573	0,558 (0,474)
0,10	5	0,446	0,476	0,871	0,866 (0,649)
0,25	2	0,514	0,482	0,922	0,922 (0,448)

З табл.2 видно, що пониження зсувної жорсткості оболонки приблизно у вісім разів веде до збільшення радіальних переміщень $\tilde{w}$ на 20-90% (у залежності від товщини оболонки). Крім того, спостерігається поява досить значного ефекту обтиснення. Цей ефект можна наближено врахувати, якщо скористатись відповідними формулою [20]. У даному випадку, до результатів колонок, знайдених за формулою (11) необхідно відповідно додати величини $0,0081\, h / \ell_0$; -$0,0019\, h / \ell_0$.

Висновки. Аналіз числових даних, представлених у табл.1,2, свідчить, що запропонований варіант прикладної теорії оболонок дозволяє отримувати результати, котрі лежать в інтервалі величин, знайдених на основі точного розв'язку просторової задачі теорії пружності. Разом з тим, аналіз відповідних рівнянь рівноваги та розрахункових формул [20] показує, що для оболонок середньої товщини $(1/10 \leq 2h / R \leq 1/5)$ вплив ефектів поперечного обтиснення може значно зрости при збільшенні відношень E / E'.

Список використаних джерел:

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. -М.:Наука, 1974. –446 с.

2.Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. - М.: Машиностроение, 1988. - 272 с.

3.Ващенко-Захарченко М.Е. Символическое исчисление и приложение его к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений. – Киев, 1962. -102 с. Векуа И.Н. Вариационные принципы построения теории оболочек.-Тбилиси: Изд-во Тбилисс. Ун-та, 1970.– 15с.

4.Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике. Избранные труды. - М.: Изд. АН СССР, 1962. - Т.I. - 784 с.

5.Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1976. - 512 с.

6.Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. - К.: Наукова думка, 1987.-216с

7.Гузь А.Н., Чернишенко И.С., Чехов Вал. Н., Чехов Вик. Н., Шнеренко К.И. Методы расчета оболочек. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – К.: Наукова думка, 1980. Т.1. - 636 с.

8.Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. - К.: Изд. АН УССР, 1963. - 354 с.

9. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М., Гостехиздат, 1955. -492 с..

10. Максимович В.Н. Напряженное состояние неравномерно нагретых нагруженных по граничным поверхностям пластин. – Прикладная математика и механіка. Том 43. – М., 1979. С. 1065-1072.

11. Максимович В.М., Шваб'юк В.І., Ротко С.В. Застосування методу неоднорідних розв'язків до розрахунку циліндричних оболонок середньої товщини // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник. – Вип.13. - Луцьк: РВВ ЛДТУ, 2003. - С.181-189.

12. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. –Л.: Гос.союзиздатсудпром, 1962, — 401 с.

13.Пискунов В.Г., Вериженко В.Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. – К.: Будівельник, 1986. - 176

14.Пелех Б.Л. Теория оболочек с низкой сдвиговой жесткостью. - К.: Наукова думка, 1973. - 246 с.

15.Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек.- К.: Наукова думка, 1980. - 216с.

16.Плеханов А.В. Неклассическая теория деформирования ортотропных оболочек // Прикладная механика, 1997, т.33, № 4. – С. 62-66.

17**.** Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. - К.: Вища школа, 1986. - 192 с.

18.Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. -М.: Физматгиз, 1963. - 635с.

19. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. – К.: Наукова думка, 1986. – 170 с.

20. Шваб'юк В.І. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини: монографія / В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко. — Луцьк: ЛНТУ, 2015. — 264 с.

21.Шваб'юк В.І. Варіант узагальненої теорії непологих ортотропних оболонок. // Машинознавство. – 1998. - № 7. - С.2-8.

Рецензенти:

Сулим Георгій Теодорович, професор, д.ф.-м.н., завідувач кафедри механіки Львівського національного університету імені Ів. Франка;

Пастерак Ярослав Михайлович, д.ф.-м.н., доцент кафедри технічної механіки Луцького НТУ.

Стаття надійшла до редакції 04.05.2017