УДК 531.1:519.95:513.88

Т.Г. Войтик[1], Г.С. Полетаев[2]

[1]*Одесский национальный морской университет,*

[2]*Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина*

ЛЕВОСТОРОННИЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ТРЕУГОЛЬНЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Для предлагаемого общего подвида матричных уравнений с двумя треугольными неизвестными, при сделанных предположениях, установлена теорема разрешимости. Приведено доказательство. Получены формулы решений. Рассмотрены иллюстративные примеры.

Ключевые слова: *анализ, механика, уравнение, треугольная, матрица, факторизация, проектор.*

Т.Г. Войтік, Г.С. Полєтаєв

ЛІВОСТОРОННІ МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ З ДВОМА ТРИКУГНИМИ НЕВІДОМИМИ

Для пропонованого загального підвиду матричних рівнянь з двома трикутними невідомими, при зроблених припущеннях, встановлено теорема про можливість розв'язання. Наведено доказ. Дано формули рішень. Розглянути илюстративні приклади застосування цих формул.

Ключові слова: *аналіз, механика, рівняння, трикутна, матриця, факторизація, проектор.*

T. Voytik, G. Poletaev

LEFT-SIDED MATRIX EQUATIONS WITH TWO TRIANGULAR UNKNOWNS

We consider the matrix equations of the left-sided general sub forms. Each of these equations has two unknown triangular matrices and an invertible matrix-coefficient. It is assumed that the matrix-coefficient admits a correct factorization. The solvability theorem with formulas of solutions and the proof is given. The example illustrated is considered.

Keywords*: analysis, mechanics, equation,* matrix*, factorization, operator, proector.*

Постановка проблемы. Широко известна роль матричных уравнений. В простейшем виде они возникают в разных теоретических и прикладных задачах, связанных с решением систем линейных алгебраических уравнений. Например, в механике, физике, электротехнике, гидравлике, экономике. При этом посредством матричных уравнений могут моделироваться взаимосвязи между совокупностями известных и неизвестных величин. В сообщении ниже продолжается публикация результатов о специальных матричных уравнениях (уравнениях-моделях), возникающих в математике, некоторых задачах механики [1-6]. Под матричным уравнением-моделью здесь понимается любое матричное уравнение, выражающее взаимосвязь известных и неизвестных в исходной прикладной задаче величин. Считается, что смысл матриц, посредством которых матричное уравнение-модель записано, вполне определен заранее. Известные до работ второго из авторов методы могут оказаться неприменимы или не эффективны для исследования матричного уравнения-модели и представления его решения. Например, когда в теории или прикладных задачах искомые матрицы должны быть треугольными. Или когда правая часть матричного уравнения, обычно известная, оказывается таковой лишь частично. Это относится и к рассматриваемым далее уравнениям. Стало быть, разработка общих подходов к исследованию таких уравнений, указание условий их разрешимости и отыскание возможных формул представления их решений являются актуальными. Отметим также, что теория изучаемых далее матричных уравнений обладает рядом общих черт с теорией задач, родственных известной задаче Римана (Римана-Гильберта-Привалова) для аналитических функций. Последние обстоятельства также подтверждают актуальность исследования предлагаемых ниже уравнений.

Анализ исследований и публикаций. Абстрагируясь от возможных для рассматриваемых в статье уравнений интерпретаций прикладного характера, их можно трактовать, как своеобразные матричные аналоги задачи Римана - Гильберта и интегральных уравнений, эквивалентных уравнению типа Винера - Хопфа. В предлагаемом ниже виде, рассматриваемые матричные уравнения, впервые, появились в исследованиях второго автора. Близкие вопросы и уравнения изучались в его работах и примере с прикладной интерпретацией, а также в последующих совместных с Л.И. Солдатовым [1-3]. Точные методы исследования задачи Римана – Гильберта восходят, в частности, к работам И.И. Привалова, Ф.Д. Гахова, Н.И. Мусхилишвили, Ю.И. Черского, М.Г. Крейна, Э.И. Зверовича и многих других. Как и интегральные уравнения типа Винера-Хопфа [7-9], другие уравнения типа свертки, а также матричные уравнения из [1-3, 6] и

© Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев

родственного типа Римана - Гильберта - Привалова задача [10, 11], рассматриваемые ниже матричные уравнения с двумя треугольными неизвестными [4, 6, 12] допускают изучение на основе результатов или, непосредственно, подходов, развиваемых для соответствующих уравнений в абстрактных кольцах с факторизационными парами [9, 13-16]. Последние уравнения, в свою очередь, можно плодотворно исследовать, опираясь на основы теории колец и функционального анализа, при существенном использовании решений вопросов обратимости и факторизации разных видов по факторизационной паре подколец. Исследования этих уравнений в записанном виде до работ автора, отсутствовали.

Цель статьи. Целью работы является установление теоремы существования с формулами решений для абстрактных матричных уравнений с неизвестными нижней X^+ и верхней Y_- треугольными матрицами и обратимой матрицей-коэффициентом вида:

$$X^+A + Y = B \quad . \tag{1}$$

- демонстрация проекторного метода на примере рассматриваемых матричных уравнений (1) с указанием компактной легко обозримой процедуры их исследования, в соответствующих предположениях.

Для достижения поставленной цели:

разработан, отличающийся алгебраичностью, новый подход;

– с помощью соответствующих элементов этого подхода, при сделанных предположениях, доказана общая теорема о разрешимости с формулами решений;

– разобран иллюстративный пример.

Результаты развивают и дополняют [6]. Будем использовать далее основные положения, обозначения и определения из [1-4, 6].

Общие положения. Факторизация

Как отмечено [1-3, 6], родственные (1) и связанные с ними уравнения возникают, в частности, при изучении специальных новых задач механики для совокупностей одинаковых по геометрическим и физическим характеристикам тел. Они возникают также при исследовании общих видов и приложений, обнаруженных сравнительно недавно, одночленных однопроекторных второго порядка уравнений в кольце с факторизационной парой. Абстрактные уравнения из работ [9, 13, 16] связывают уравнения (1) с интегральными типа Винера-Хопфа [7, 8], а также с задачей нахождения двух рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по линейному соотношению на контуре в виде сомкнутой вещественной оси [10, 11].

Обозначения и определения. Следуя [1-4, 6, 9], обозначим $R_{n\times n}$ кольцо вещественных числовых квадратных матриц размера $n\times n,\ n\geq 2,\ n\in N$; $R^+_{n\times n},\ R^-_{n\times n}$ - подкольца нижних, верхних треугольных из $R_{n\times n}$; - $R^0_{n\times n} := R^+_{n\times n}\cap R^-_{n\times n}$, $R^{\mp}_{n\times n} = \left(R_{n\times n}\right)_{\pm}\oplus R^0_{n\times n}$, соответственно. Результат применения соответствующих проекторов к матрицам, а также принадлежность матрицы из $R_{n\times n}$ подмножеству $R^{\mp,0}_{n\times n}$, $\left(R_{n\times n}\right)_{\pm}$ [1-4, 6] будем отмечать знаками +, -, 0, соответственно. Устанавливается, что $R_{n\times n}$; $n\geq 2, n\in N$ - кольцо с факторизационной парой $(R^+{}_{n\times n}, R^-{}_{n\times n})$ [5, 9, 13-16] (Ср. [14]).

Факторизация. Важную роль при построении формул для матриц – решений рассматриваемых уравнений играют нормированные правильные правые факторизации по факторизационной паре ($R^+_{n\times n},\ R^-_{n\times n}$). А, именно, разложения матрицы A^{-1} на обратимые в соответствующих подкольцах $R^+_{n\times n},\ R^-_{n\times n}$ треугольные и диагональный множители [1-5, 6, 9, 12-17]:

$$A^{-1} = T^- S^0 \Gamma^+, \tag{2}$$

где матрицы - сомножители $T^{-} \in R^{-}_{n\times n}; S^{0} \in R^{0}_{n\times n}; \Gamma^{+} \in R^{+}_{n\times n}; n \geq 2,\ n \in \mathrm{N}$. Нормирование осуществляется условием: $\Gamma^{0} = T^{0} = E$, где E - единичная матрица кольца $R_{n\times n}$. Некоторые условия существования нормированной правильной факторизации матриц из $R_{n\times n}$ по факторизационной паре (иначе, по подкольцам) ($R^{+}_{n\times n}$, $R^{-}_{n\times n}$) можно сформулировать на основе соответствующих результатов [5, 9, 13, 14]. Устанавливается, что правая нормированная правильная факторизация единственна [9, 13-16].

Постановка задачи. Будем рассматривать следующую ***Задачу.*** «*Для заданных матрицы – коэффициента* $A\in R_{n\times n}; n\geq 2,\ n\in \mathrm{N}$ *и матрицы - правой части* $B\in R_{n\times n}$, *найти пару матриц* $X^{+} \in R^{+}_{n\times n}, Y_{-} \in (R_{n\times n})_{-}$, *удовлетворяющую уравнению* (1) **».**

Результаты исследования.

Используя подготовленную базу, приведём условия существования, формулы решений уравнений вида (1), а, стало быть, *Задачи* **в** $R_{n\times n}$ **и пример.**

Главный результат. При соответствующей правой нормированной правильной факторизации обратной матрицы (2) разрешимость ***Задачи*** и уравнений вида (1) характеризует следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $A\in R_{n\times n}; n\geq 2,\ n\in \mathrm{N}$ *неособенная матрица. Для того чтобы при всевозможных матрицах – правых частях* $B\in R_{n\times n}$, *как бы ни были они выбраны, каждое из соответствующих уравнений (1) было в* $R_{n\times n}$ *однозначно разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы обратная для* A *матрица* A^{-1} *допускала в* $R_{n\times n}$ *нормированную правильную правую факторизацию (2) по факторизационной паре подколец (*$R^{+}_{n\times n}$, $R^{-}_{n\times n}$*). Если нормированная правильная правая факторизация (2) имеет место, то при любой правой части* $B\in R_{n\times n}$, *единственное решение* $X^{+} \in R^{+}_{n\times n}, Y_{-} \in (R_{n\times n})_{-}$ *уравнения (1), ей соответствующее, можно определить через множители факторизации (2) и эту правую часть по формулам:*

$$X^{+} = [B^{+}T^{-}]^{+}S^{0}\Gamma^{+}, \qquad Y_{-} = B_{-} + ([B^{+}T_{-}]_{-})[(T^{-})^{-1}]^{-}. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть условия теоремы выполнены и при любой из всевозможных правых частей $B\in R_{n\times n}$ уравнение (1) однозначно разрешимо в $R_{n\times n}$. Обозначим существующее, при этом, единственное решение уравнения (1) с $B = E \in R_{n\times n}$, где E - единичная матрица, через ($X^{+}_{E} \in R^{+}_{n\times n}, Y_{E-} \in (R_{n\times n})_{-}$). Тогда заключаем, что $X^{+}_{1E}A + Y_{1E-} = E.$ Отсюда и условий доказываемой части утверждения, вытекает существование требуемых обратных матриц в соответствующих подкольцах $R^{+}_{n\times n}$, $R^{-}_{n\times n}$ и правильной, правой факторизации по факторизационной паре подколец ($R^{+}_{n\times n}$, $R^{-}_{n\times n}$):

$$A^{-1} = [(E - Y_{E-})^{-1}]^{-} X^{+}_{E}, \tag{4}$$

Факторизация (4), порождает нормированную правильную правую факторизацию по подкольцам $R^{+}_{n\times n}$, $R^{-}_{n\times n}$:

$$A^{-1} = [(E - Y_{E-})^{-1}]^{-} X^{0}_{E}[(X^{0}_{E})^{-1} X^{+}_{E}]^{+}.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть при условиях теоремы имеет место нормированная правильная правая факторизация (2) по факторизационной паре подколец ($R^{+}_{n\times n}$, $R^{-}_{n\times n}$). Тогда, при любой фиксированной матрице $B \in R_{n\times n}$, правые части формул (3) имеют смысл и определяют некоторые матрицы $X^+ \in R^+_{n\times n}$ и $Y_- \in (R_{n\times n})_-$ из требуемых подколец. Подстановкой этих матриц в левую часть уравнения (1), убеждаемся, что $(X^+ \in R^+_{n\times n};\ Y_- \in (R_{n\times n})_-)$ - искомое решение уравнения (1) и ***Задачи,*** соответствующее этой правой части B.

Действительно,

$$X^+A + Y_- = [B^+T^-]^+ S^0 \Gamma^+ (\Gamma^+)^{-1} (S^0)^{-1} (T^-)^{-1} + B_- + ([B^+T_-]_-)[(T^-)^{-1}]^- =$$
$$= [B^+T^-]^+ (T^-)^{-1} + B_- + ([B^+T_-]_-)[(T^-)^{-1}]^- = \{[B^+T^-]^+ + [B^+T_-]_-\} (T^-)^{-1} + B_- =$$
$$= \{B^+T^-\} (T^-)^{-1} + B_- = B^+T^- (T^-)^{-1} + B_- = B^+ + B_- = B.$$

Достаточность установлена.

Докажем ***единственность*** решения от противного. Пусть при общих условиях теоремы, нормированной правильной правой факторизации (2) по факторизационной паре подколец $(R^+_{n\times n}, R^-_{n\times n})$ и некоторой правой части $B \in R_{n\times n}$ уравнение (1) имеет в $R_{n\times n}$ два решения $(X^+ \in R^+_{n\times n};\ Y_- \in (R_{n\times n})_-)$ и $(X_1^+ \in R^+_{n\times n};\ Y_{1-} \in (R_{n\times n})_-)$. Тогда, очевидно,

$$(X^+ - X_1^+)A = Y_{1-} - Y_-; (X^+ - X_1^+)(\Gamma^+)^{-1}(S^0)^{-1}(T^-)^{-1} = Y_{1-} - Y_-;$$
$$(X^+ - X_1^+)(\Gamma^+)^{-1}(S^0)^{-1} = (Y_{1-} - Y_-)T^-.$$

Левая часть последнего равенства является матрицей из $R^+_{n\times n}$, а правая - матрицей из $(R_{n\times n})_-$. Следовательно, обе они равны нулевой матрице из $R_{n\times n}$:

$$(X^+ - X_1^+)(\Gamma^+)^{-1}(S^0)^{-1} = 0;\ (Y_{1-} - Y_-)T^- = 0.$$

Умножая справа: первое из последних двух равенств на произведение матриц $S^0\Gamma^+$, а второе - на матрицу $(T^-)^{-1}$, получаем: $X^+ - X_1^+ = 0;\ Y_{1-} - Y_- = 0.$ Следовательно,

$$X^+ = X_1^+\ ;\ Y_{1-} = Y_-.$$

Единственность, а с нею и теорема полностью, доказана.

Следствие 1. При условиях теоремы и *нормированной правильной правой факторизации в* $R_{n\times n}$ *(2) по факторизационной паре подколец* $(R^+_{n\times n}, R^-_{n\times n})$ *единственное решение* $X_E^+ \in R^+_{n\times n}, Y_{E-} \in (R_{n\times n})_-$ *уравнения (1) с правой частью* $B = E \in R_{n\times n}$, где E - единичная матрица, *можно определить через множители факторизации (2) по следующим формулам:*

$$X_E^+ = S^0\Gamma^+\ , \qquad Y_{E-} = T_-[(T^-)^{-1}]^- (= T_-(T^-)^{-1}). \tag{5}$$

Решения, соответствующие единичной матрице в правой части, важны в общей теории разрешимости рассматриваемого вида уравнений с треугольными неизвестными матрицами. Так проявляется одно из свойств соответствующих абстрактных уравнений в кольце с факторизационной парой подколец. С помощью формул решений (3) можно установить представления и некоторых других специальных решений. В частности, соответствующих правым частям из подколец $R_{n\times n}$.

Пример 1. Пусть требуется найти пару треугольных матриц $X^+ \in R^+_{3\times 3}; Y_- \in (R_{3\times 3})_-$ из $R_{3\times 3}$ - решение уравнения (1), а, стало быть, и ***Задачи***, если:

$$A=\begin{pmatrix}15 & 0 & -10\\ 0 & 5 & 0\\ -5 & 0 & 5\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}10\alpha & 0 & 10\\ 0 & 10\alpha & 0\\ 10\beta & 0 & 10\alpha\end{pmatrix};\ \alpha,\ \beta\ \text{- числа.}$$

Для решения находим, последовательно, обратную матрицу, её факторизацию и соответствующие факторы, а также используемые в (3) произведения и результаты применений проекторов:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{15} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$\Gamma^{+}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & 1\end{pmatrix};S^{0}=\begin{pmatrix}\frac{1}{15} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{5}\end{pmatrix},T^{-}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$(T^{-})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};S^{0}\Gamma^{+}=\begin{pmatrix}\frac{1}{15} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{5} & 0\\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5}\end{pmatrix};$$

$$[B^{+}T^{-}]^{+}=\begin{pmatrix}10\alpha & 0 & 0\\ 0 & 10\alpha & 0\\ 10\beta & 0 & 10\alpha+\frac{20}{3}\beta\end{pmatrix};[B^{+}T^{-}]_{-}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{20}{3}\alpha\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Реализуя формулы (3), вычисляем элементы искомого решения уравнения (1) в $R_{3\times 3}$ и ***Задачи.*** Получаем:

$$X^{+}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha+2\beta & 0 & 6\alpha+4\beta \end{pmatrix}, Y_{-}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 10+\frac{20}{3}\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Подстановкой, можно убедиться, что это действительно искомое решение.

Пример 2. **Пусть в уравнении (1) с матрицей-коэффициентом:**

$$A=\begin{pmatrix} 15 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

правая часть равна единичной матрице из $R_{3\times 3}$**.**

Легко видеть, что этот случай получается из предыдущего при $\alpha=\frac{1}{10}, \beta=0$.

Из формул (6) следует решение уравнения (1) в такой постановке:

$$X_{E}^{+}=\begin{pmatrix} \frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}; \quad Y_{E-}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот же результат, получается, по формулам (5) непосредственно.

Выводы и перспективы

При сделанных предположениях, установлена общая теорема существования и единственности решений уравнений вида (1) с формулами их представлений через правую часть и факторизационные множители обратной для матрицы-коэффициента. Реализация этой теоремы даёт возможность проекторного подхода и точный метод решения конкретных уравнений (1). Стало быть, и поставленной выше *Задачи.* Предложенные в ней формулы отличает обозримость. Подготовлена база для проведения, в перспективе, исследований в направлении изучения связи решений, а также случаев разрешимости уравнений (1), когда факторизации (2) не является правильной. Особое место в этой перспективе соответствует прикладным задачам, моделирование которых может опираться на связь с уравнениями вида (1). Как и ожидалось, полученное в *Примере 1* решение уравнения (1) отличается от решения подобного ему правостороннего уравнения с теми же исходными известными матрицами A, B. Это обстоятельство - следствие некоммутативности соответствующих подколец матриц.

Литература

1. Полетаев Г.С. О постановках, матричных моделях некоторых обратных задач механики балок и представлениях факторизованных матриц влияния // Матем. моделир. в образовании, науке и промышленности. - С.-Пб. - С.146 - 148.

2. Полетаев Г.С., Солдатов Л.И. О задачах механики и уравнениях с неизвестной треугольной матрицей и проекторами // Соврем. методы проектирования машин. Расчет, конструирование и технология изготовления / Сб. научных трудов – Вып. 1. в 3-х т. – Т. 2 – Мн.: УП «Технопринт». – 477 с. – С. 244 – 249.

© Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев

3. Полетаев Г.С., Солдатов Л.И. О моделировании некоторых задач механики матричными уравнениями с треугольными неизвестными // Нелинейная динамика механических и биологических систем / Межвузовский научный сборник. Саратовский гос. техн. университет, вып. 2. – Саратов. – С. 133 – 136.

4. Войтик Т.Г., Полетаев Г.С. Уравнения с неизвестными треугольными матрицами, связанные с однопроекторными второго порядка // Шістнадцята міжнародна наукова конф. ім. акад. М. Кравчука, 14 -15 травня 2015 р., Київ. Матеріали конференції ІІ. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. - С. 82 – 84.

5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 549 с.

6. Войтик Т.Г., Полетаев Г.С. Матричные уравнения с двумя треугольными неизвестными //НАУКОВІ НОТАТКИ. – Вип. 49. - Луцьк, 2015. – С. 13 – 16.

7. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. - М.: Наука, 1978.- 296с.

8. Крейн, М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. – 1958. – Вып. 5(83). – С. 3–120.

9. Полетаев Г.С. Об уравн. и сист. одного типа в кольцах с факторизационными парами. – Киев, 1988. – 20 с. – (Препринт / АН УССР. Ин.-т матем.:88.31).

10. Войтик Т.Г., Полетаев Г. С., Яценко С.А. Нахождение двух рац. функций с полюсами из полуплоскостей по линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом // Глушковські читання. НТУУ «КПІ», Київ. - С. 74-77.

11. Войтик Т.Г., Полетаев Г.С., Яценко С.А. Метод нахожд. рац. функций с полюсами из разных полуплоск. по уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом //НАУКОВІ НОТАТКИ. – Вип. 54. - Луцьк, 2016. – С. 65 – 70.

12. Войтик Т.Г., Полетаев Г.С. Уравнения с нижней и верхней неизвестными треугольными матрицами и взаимно обратными коэффициентами // Сімнадцята міжнародна наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, 19-20 травня 2016 р., Київ. Матеріали конференції ІІ. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. - С. 68-71.

13. Полетаев Г. С. Об однопроекторн. II порядка уравн. с правильно факторизуемыми коэфф. в кольце с факторизацион. парой // Вестник Херсон. гос. техн. ун-та. – 2000. - № 2 (8). – С. 191–195.

14. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators I: Algebraic Theory and Examples // J. Funct. Anal. – 1972. – 9, № 3. – P. 262 – 295.

15. Полетаев Г. С. Абстракт. аналог парн. уравн. типа свертки в кольце с факторизационной парой // Укр. матем. журн. – 1991, т. 43, № 9. – С. 1201 – 1213.

16. Полетаев Г.С. Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары // Математика в сучасному технічному університеті. Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції 24-25 грудня 2015 року. Київ. – 2016. – С. 85-88.

17. Войтик, Т. Г. Обоснование условий однозначной разрешимости матричных уравнений с двумя треугольными неизвестными и взаимно обратными коэффициентами / Т. Г.Войтик, Г. С. Полетаев // Technology Audit and Productions Reserves. - 2016. - № 4/2(30). - P. 73-77.

Стаття надійшла до редакції 10.05.2017

© Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев