

УДК 539.3

О.А. Мікуліч, В.І. Шваб'юк*Луцький національний технічний університет***ВЗАЄМОДІЯ СЛАБКИХ УДАРНИХ ХВИЛЬ З ТУНЕЛЬНИМИ ПОРОЖНИНАМИ У АУКСЕТИК-СЕРЕДОВИЩАХ**

У роботі розроблено аналітико-числовий метод дослідження напруженого стану пінистих середовищ з від'ємним коефіцієнтом Пуассона, що послаблені тунельними порожнинами довільного перерізу за дії слабких ударних хвиль. У рамках псевдоконтинууму Коссера при використанні перетворення Фур'є за часом та модифікації методу граничних інтегральних рівнянь записані інтегральні рівняння першої основної задачі. Для визначення кільцевих напружень на границі порожнин побудовані аналітичні залежності. На основі розробленого методу досліджено зміну з часом кільцевих напружень у пінистих ауксетик-середовищах за різних значень від'ємного коефіцієнту Пуассона.

Ключові слова: пінисті ауксетики, напружений стан, нестационарна задача.

Е.А. Микулич, В.И. Швабьюк*Луцкий национальный технический университет***ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН С ТУННЕЛЬНЫМ ПОЛОСТЯМИ В АУКСЕТИК-СРЕДАХ**

В работе разработан аналитико-численный метод исследования напряженного состояния пенистых сред с отрицательным коэффициентом Пуассона, ослаблены туннельными полостями произвольного сечения за действия слабых ударных волн. В рамках псевдоконтинуума Коссера при использовании преобразования Фурье по времени и модификации метода граничных интегральных уравнений записаны интегральные уравнения первой основной задачи. Для определения кольцевых напряжений на границе полостей построены аналитические зависимости. Используя разработанный метод исследовано изменение во времени кольцевых напряжений в пенистых ауксетик-средах при различных значениях отрицательного коэффициента Пуассона.

Ключевые слова: пенистые ауксетики, напряженное состояние, нестационарная задача.

O.A. Mikulich, V.I. Shvabyuk*Lutsk National Technical University***INTERACTION OF WEAK SHOCK WAVES WITH TUNNEL CAVITIES IN AUXETIC MEDIA**

This paper proposes the novel analytic numerical method for investigation of the dynamic stress state of foam medium with negative Poisson's ratio with tunnel cavities of the different cross-section under the action of weak shock waves. Applying Fourier transforms for time variable and modification of boundary integral equation method the integral equation for the first exterior problem of Cosserat continuum with constrained micro-rotations are written. The analytical dependencies for determination of dynamic hoop stresses are built. On the basis of the developed method, the time dependence of hoop stresses in auxetic foam medium with tunnel cavities was investigated for different values of negative Poisson's ratio.

Keywords: foam auxetics, stress state, non-stationary problem.

Постановка проблеми. У останні роки істотно зріс інтерес до розробки методів отримання матеріалів з від'ємним коефіцієнтом Пуассона — ауксетиків. Такі дослідження зумовлені широкими перспективами використання цих матеріалів у медицині, військовій промисловості, ракетобудуванні.

Особлива здатність ауксетик-матеріалів розширюватися за розтягу у напрямку, перпендикулярному до прикладеної сили, пояснюється їх шарнірно-подібною структурою.

Такі специфічні властивості ауксетиків відкривають широкі перспективи їх використання у медицині: для виготовлення перев'язувальних матеріалів, що розподіляють ліки при збільшенні ран, виготовленні судинних стентів.

Поряд із методами створення ауксетик-матеріалів, зростає необхідність розробки підходів до дослідження їх напруженого стану, особливо за динамічних та імпульсних навантажень. Численні експерименти показують, що використання апарату класичної теорії пружності до дослідження таких матеріалів дає значні похибки. Для ефективної оцінки їх напруженого стану слід враховувати внутрішній момент кількості руху мікрочастинок, який не можна описати у рамках апарату класичної теорії пружності.

У роботі для дослідження динамічного напруженого стану ауксетик-середовищ використано апарат моментної теорії пружності Коссера зі стисненим обертанням – псевдоконтинууму Коссера [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Велика кількість експериментальних досліджень присвячена вивченню специфічних властивостей матеріалів із від'ємним коефіцієнтам Пуассона,

що відсутні у класичних матеріалах. Так, у роботі Evans К.Е. [2] показано, що модуль зсуву ауксетиків може істотно перевищувати їх об'ємний модуль пружності. Це діаметрально протилежно у порівнянні з класичними матеріалами.

Значна кількість робіт присвячена створенню ауксетик-матеріалів та вивченню їх пружних характеристики у рамках моментної теорії пружності Коссера. У роботах Lakes R. S. [3-8] описано основний метод отримання пінистих ауксетиків, що полягає у всесторонньому стиску вихідного пінистого середовища з нагрівом до температури розм'якшення та подальшого охолодження до кімнатної температури. Аналіз мікроструктури отриманих пінистих ауксетиків показав (рис. 1), що у процесі отримання матеріалу ребра пор прогинаються усередину, тому за розтягу таких тіл поперечний переріз збільшується [9].

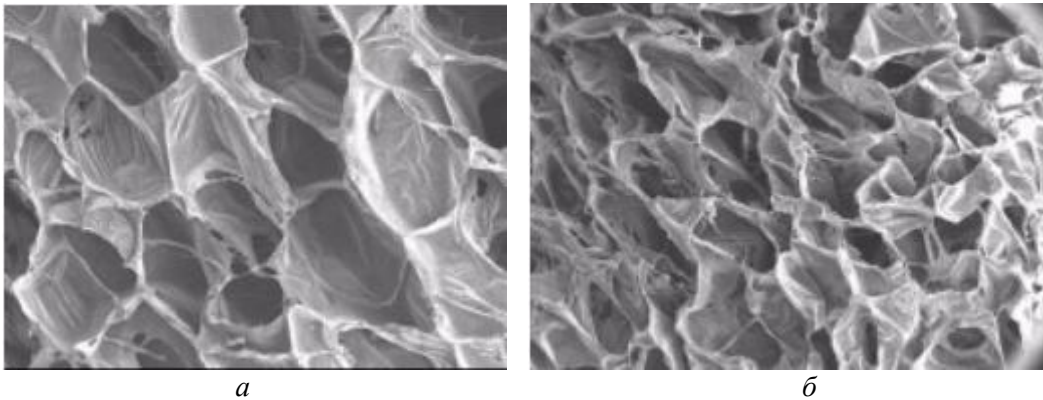


Рис. 1. Аналіз мікроструктури пінистих середовищ з додатнім (а) та від'ємним (б) коефіцієнтом Пуассона [9]

Значна кількість робіт Lakes R. S. та ін. присвячена дослідженню пружних характеристик отриманих матеріалів з від'ємним коефіцієнтом Пуассона.

Метою дослідження є розробка аналітико-числового методу розрахунку динамічного напруженого стану пінистих середовищ із від'ємним коефіцієнтом Пуассона, що послаблені порожнинами довільного перерізу на основі рівнянь моментної теорії пружності зі стисненим обертанням.

Постановка завдань. Розглянемо пружне ізотропне пінисте ауксетик-середовище з тунельною порожниною сталого довільного перерізу. Віднесемо його до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$, яку розмістимо у центрі ваги тіла так, щоб вісь Ox_3 співпадала з віссю порожнини середовища (рис. 2).

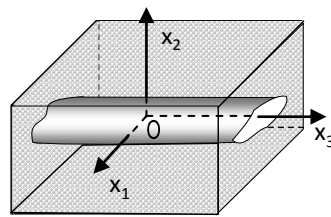


Рис. 2. Моделювання об'єкту дослідження

Дослідимо концентрацію напружень на границі тунельної порожнини у пінистому середовищі з від'ємним коефіцієнтом Пуассона за дії пружної падаючої хвилі, що рухається у напрямку зростаючих значень x_1 , яка, аналогічно до [12], задається наступними потенціалами:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0 f\left(\frac{c_1}{a}t + \frac{x_1}{a}\right), \quad \Psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1)$$

де $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ — швидкість хвиль розширення, λ, μ — сталі Ляме, a — деякий характерний розмір, t — час.

Вибір методів дослідження. Відповідно [10], при моделюванні пінистих матеріалів форма комірок вибирається у формі стрижневої конструкції з комірками у вигляді правильних многокутників (рис. 3, а). На основі описаного у роботах Lakes R. S. методу отримання ауксетик-

матеріалів їх структура може бути змодельована у вигляді многокутників з увігнутими зв'язками (рис. 3, б).

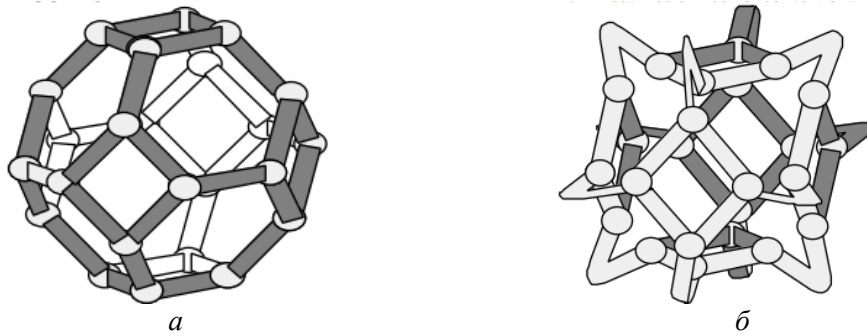


Рис. 3. Ідеалізована структура пінистого матеріалу з додатнім (а) та від'ємним (б) коефіцієнтом Пуассона [10]

Із аналізу деформацій у пінистому середовищі з від'ємним коефіцієнтом Пуассона видно, що за дії навантаження кожна мікрочастинка середовища здійснює не тільки поступальне, а і обертальне переміщення. Кожне мікрообертання частинок середовища пов'язане з їх поступальним переміщенням. Крім того, мікрочастинки пінистого середовища не можуть здійснювати мікрообертання без переміщень (рис. 2).

Тому, у роботі для дослідження напруженого стану ауксетик-середовищ із тунельними порожнинами використано апарат моментного континууму Коссера зі стисненим обертанням [1], де вектор макро- і мікроповоротів співпадають, причому

$$\varpi = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}, \quad (2)$$

де \mathbf{u} — вектор переміщень, ϖ — вектор повороту. Зазначимо, що \mathbf{u} і ϖ є неперервними функціями.

Для плоскої задачі моментного псевдоконтинууму Коссера рівняння руху записується у вигляді:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (3)$$

де u_j — компоненти векторів переміщень, b_j — компоненти вектора об'ємних сил, ρ — густина середовища, σ_{ij} — силові напруження, що з урахуванням (2) у псевдоконтинуумі Коссера визначаються [2]:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{mm} + 2\mu e_{ij} + \frac{\gamma + \varepsilon}{4} \epsilon_{ijk} \Delta \varpi_k, \quad (4)$$

де $\lambda, \mu, \gamma, \varepsilon$ — пружні характеристики середовища у континуумі Коссера, $e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, ϵ_{ijk} — антисиметричний тензор Леві-Чівіта [6].

Викладення основного матеріалу. Для розв'язання поставленої задачі використаємо розроблений у [13] метод, що ґрунтується на сумісному застосуванні перетворення Фур'є за часом та модифікації методу граничних інтегральних рівнянь для псевдоконтинууму Коссера. Граничні умови задачі мають у області Фур'є-зображень вигляд:

$$\hat{\sigma}_n|_L = \hat{\sigma}_n^*(\mathbf{x}, \omega), \quad \hat{\tau}_{sn}|_L = \hat{\tau}_{sn}^*(\mathbf{x}, \omega), \quad (5)$$

де $\hat{\sigma}_n^*(\mathbf{x}, t)$, $\hat{\tau}_{sn}^*(\mathbf{x}, t)$ — Фур'є-зображення відомих на границі функцій, що визначаються з

урахування (1), $\hat{f}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt$, $i = \sqrt{-1}$.

Відповідно до розробленого модифікованого методу граничних інтегральних рівнянь [13] потенціальне зображення для переміщень у випадку першої основної задачі виберемо у вигляді:

$$\hat{u}_k(\mathbf{x}, \omega) = \int_L p_j(\mathbf{x}^0, \omega) \cdot U_{jk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0, \omega) dL(\mathbf{x}^0), \quad (6)$$

де p_1, p_2 — невідомі потенціальні функції, $\mathbf{x}^0 = \{x_1^0; x_2^0\}$, U_{jk}^* — зображення фундаментальних функцій для переміщень [13], що побудовані з урахуванням умов випромінювання Зоммерфельда [14].

Відповідно до [13], задовольняючи у області Фур'є-зображень граничні умови (5), інтегральні рівняння задачі запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(q)/2 + \mathbf{v.p.} \int_L (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\zeta + f_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{q} d\bar{\zeta}) &= \hat{\sigma}_n^*; \\ \mathcal{G}_1 \operatorname{Im} q / 2 + \mathbf{v.p.} \int_L (g_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\zeta + g_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{q} d\bar{\zeta}) &= \hat{\tau}_{sn}^*; \end{aligned} \quad (7)$$

де $pds = -iqd\zeta$, $p = p_1 + ip_2$ — невідома функція, $\zeta = x_1^0 + ix_2^0$. $\mathcal{G}_1 = 1 - (\omega l / c_\tau)^2$, $c_\tau = \sqrt{\mu / \rho}$ — швидкість хвиль зсуву, $l = \sqrt{(\gamma + \varepsilon) / (4\mu)}$ — масштабний фактор, f_j, g_j — відомі функції [13]. Тут інтеграли розуміються у сенсі їх головного значення ($\mathbf{v.p.}$).

Система інтегральних рівнянь (7) розв'язувалася числово на основі підходу, розвинутого у [14], що ґрунтується на сумісному використанні методу механічних квадратур та колокації. При цьому для інтегралів, що містять особливості типу Коші, використано квадратурні формули підвищеної точності.

Після визначення невідомих функцій з системи (7), відповідно до [13], розрахунок кільцевих напружень на границі порожнини проводиться на основі формул:

$$\hat{\sigma}_\theta = \mathcal{G}_2 \operatorname{Re} q / 2 + \mathbf{v.p.} \int_L (h_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\zeta + h_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{q} d\bar{\zeta}) + \hat{\sigma}_\theta^*, \quad (8)$$

де $\mathcal{G}_1 = (1 - (c_\tau / c_l)^2)$, h_j — відомі функції [13], $\hat{\sigma}_\theta^*$ — відомі функції, що визначаються на основі (4).

Оригінали кільцевих напружень знаходилися з використанням дискретного оберненого перетворення Фур'є:

$$\sigma_\theta(T_k) = \frac{1}{T} \sum_{n=-K}^{K-1} \left(\hat{\sigma}_\theta(\omega_n) \exp\left(2\pi i \frac{n \cdot k}{K}\right) - \hat{\sigma}_\theta(\omega_n) \right), \quad (9)$$

де K — кількість елементів дискретної вибірки, $\omega_n = 2\pi n / T$ — частоти вибірки, $T_k = kT / K$, $k = 0..K - 1$ — фіксовані моменти часу.

За числових розрахунків представлення (9) обчислювалося на основі алгоритму швидкого дискретного перетворення Фур'є [16] при $K = 2^m$, де m — ціле додатне число.

Числовий аналіз напруженого стану акустик-середовищ. Числові розрахунки виконаємо для випадку, коли падаюча хвиля задається у вигляді слабкого ударного імпульсу [15]. Фур'є-зображення потенціалу падаючої у напрямі Ox_1 хвилі матиме вигляд:

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}, \omega) = \varphi_0 \frac{a}{c_1} \tilde{f}_* \left(\frac{\omega a}{c_1} \right) e^{\frac{i\omega x_1}{c_1}}; \quad \hat{\Psi}(\mathbf{x}, \omega) = 0,$$

де $\tilde{f}_*(\omega)$ — Фур'є-зображення модуляції імпульсу, що за числових розрахунків приймалася у формі слабкої ударної хвилі [17]:

$$f_*(\tau) = p_* \tau^{n_*} e^{-\alpha_* \tau}, \quad \tau > 0;$$

де p_*, n_*, α_* — сталі, $\tau = c_1 t / a$ — безрозмірний часовий параметр.

У [10], за різних умов стиснення та температури нагріву отримано пінисті ауксетик-матеріали з різними значеннями коефіцієнта Пуассона. У роботі, використовуючи експериментально отримані значення пружних характеристик для пінистих поліуретанів із від'ємним коефіцієнтом Пуассона, проведено розрахунок кільцевих напружень на границі тунельної циліндричної порожнини радіусу a .

На рис.4 наведено результати розрахунку відносних кільцевих напружень для «стисненого» пінистого поліуретану з густиною $\rho = 25 \text{ кг/м}^3$, модулем Юнга $E = 85 \text{ кПа}$, модулем зсуву $G = 115 \text{ кПа}$, коефіцієнтом Пуассона $\nu = -0,26$ та масштабним фактором $l = 1,2 \text{ мм}$. На рис. 5 показано відповідні значення відносних кільцевих напружень для пінистого поліуретану з від'ємним

коефіцієнтом Пуассона $\nu = -0,13$, густиною $\rho = 18 \text{ кг/м}^3$, модулем Юнга $E = 20 \text{ кПа}$, модулем зсуву $G = 45 \text{ кПа}$, масштабним фактором $l = 2,2 \text{ мм}$. За розрахунків вважалося, що $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / \sigma_0$, де $\sigma_0 = 1 \text{ МПа}$.

Для числових розрахунків було вибрано 512 елементів дискретної вибірки для швидкого дискретного перетворення Фур'є та 80 вузлових точок на границі порожнини. При заданні модуляції імпульсу з часом було вибрано наступні параметри: $p_* = 30$; $n_* = 2$; $\alpha_* = 4$. Дослідження проводилися для інтервалу безрозмірного часового параметра $\tau \in [0, 8c_l / a]$.

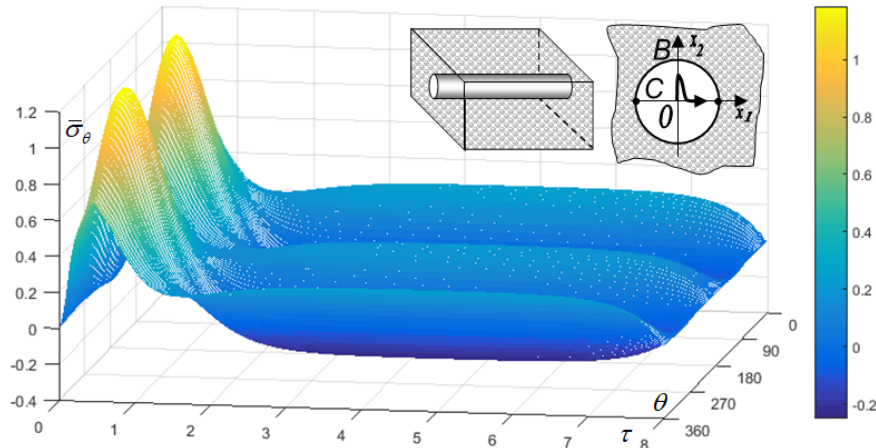


Рис. 4. Розподіл відносних кільцевих напружень у пінистому ауксетик-середовищі з коефіцієнтом Пуассона $\nu = -0,26$

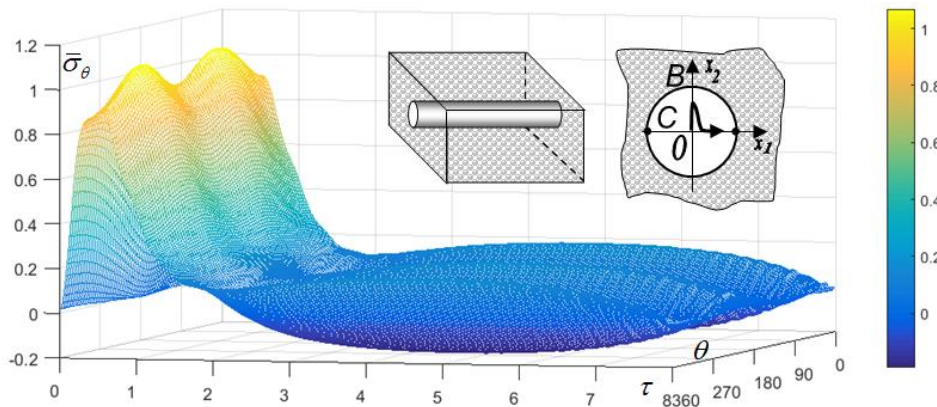


Рис. 5. Розподіл відносних кільцевих напружень у пінистому ауксетик-середовищі з коефіцієнтом Пуассона $\nu = -0,13$

З рис. 4 та 5 видно, що максимальні значення динамічних кільцевих напружень виникають у точці B границі порожнини. Вони становлять $1,185\sigma_0$ для випадку $\nu = -0,26$ та $1,07\sigma_0$ — для $\nu = -0,13$. Максимальні значення кільцевих напружень у точці C , що спричинені впливом відбитих від границі порожнини хвиль, становлять $0,65\sigma_0$ та $0,93\sigma_0$ для $\nu = -0,26$ і $\nu = -0,13$ відповідно.

Числові розрахунки показали, що після проходження слабкої ударної хвилі кільцеві напруження на границі порожнини змінюють знак та затухають. Тобто використання апарату псевдоконтинууму Коссера дає можливість враховувати знакозмінний характер кільцевих напружень. Узгодження отриманих результатів із основними принципами хвильової механіки підтверджує достовірність розробленого методу.

Висновки. В статті модифіковано аналітико-числову методику дослідження поширення пружних хвиль у пінистих середовищах із від'ємним коефіцієнтом Пуассона, що послаблені тунельними порожнинами сталого перерізу. У рамках псевдоконтинууму Коссера, з

використанням перетворення Фур'є за часом та методу інтегральних рівнянь, побудовано інтегральні рівняння першої основної задачі, ядра яких мають особливості типу Коші.

Точність запропонованого методу забезпечується визначенням зображень кільцевих напружень на границі порожнини на основі аналітично-побудованих залежностей.

Розвинений метод можна використовувати для повного аналізу перебігу нестационарних хвильових процесів у пінистих середовищах із від'ємним коефіцієнтом Пуассона, визначивши переміщення на основі залежностей (6).

Список використаних джерел:

1. A. R. Hadjefandiari, G. F. Dargush Couple stress theory for solids // International Journal of Solids and Structures. — 2011. — Vol. 48, Is. 18. — P. 2496-2510.
2. Evans K.E. Auxetic polymers: a new range of materials // Endeavour. — 1991. — Vol. 15, No. 4. — P. 170-174.
3. Kurashige M., Sato M. and Imai K. Mandel and Cryer Problems of Fluid-Saturated Foams with Negative Poisson's Ratio // Acta Mechanica. — 2005. — Vol. 175, No. 1-4. — P. 25-43.
4. C.P. Chen, R.S. Lakes Dynamic wave dispersion and loss properties of conventional and negative Poisson's ratio polymeric cellular materials // Journal of Cellular Polymers. — 1989.—8. — P. 343-359.
5. Lakes R. S. Experimental Micro Mechanics Methods for Conventional and Negative Poisson's Ratio Cellular Solids as Cosserat Continua // Journal of Engineering Materials and Technology. —1991. — Vol. 113. — P. 148-155.
6. Lakes R. S. Physical Meaning of Elastic Constants in Cosserat, Void, and Microstretch Elasticity // Journal of Mechanics of Materials and Structures. —2016. — Vol. 11, No. 3. — P. 217-229.
7. Brandel B., Lakes R.S. Negative Poisson's ratio polyethylene foams // Journal of Material Science. — 2001. — Vol. 36. — P. 5885-5893.
8. Rueger Z., Lakes R.S. Cosserat elasticity of negative Poisson's ratio foam: experiment, Smart Materials and Structures. — 2016. — Vol. 25. — P. 100-108.
9. Brandel B., Lakes R. S. Negative Poisson's ratio polyethylene foams // Journal of Materials Science. — 2001. — Vol. 36. — P. 5885-5893.
10. Friis E.A., Lakes R.S., Park. J.B. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials // Journal of Material Science. — 1988. — Vol. 23. — P. 4406-4414.
11. Hadjefandiari A.R., Dargush G.F. Boundary element formulation for plane problems in couple stress elasticity. // International Journal for Numerical Methods in Engineering . — 2011. — vol. 89. — PP 618–636.
12. Г.Н. Савин, Н.А. Шульга. Динамическая плоская задача моментной теории упругости. // Прикладная механика. — 1967. — т. 3, вып. 6. — С. 216-221.
13. Шваб'юк В.І., Мікуліч О.А., Шваб'юк В.В. Напружений стан пінистих середовищ із тунельними порожнинами при нестационарному динамічному навантаженні // Проблемы прочности. — 2017. — 6. — С. 99-110.
14. Савин Н.Г. Распределение напряжений около отверстий. — К.: Наукова думка, 1968. —888 с.
15. О.А. Mikulich, V.I. Shvabjuk Interaction of weak shock waves with rectangular meshes in plates. // Odes'kyi Politehnychnyi Universytet. PRATSI. — 2016. vol. 2(49). — PP. 104-110.
16. Т. В. Сидорова, Т. В. Зыкова, К. В. Сафонов. О модификации быстрого одномерного преобразования Фурье по алгоритму Кули–Тьюки. // Вестник СибГАУ. —2015. — Т. 16, № 2. — С. 360–363
17. Я. Пастернак, Г. Сулим, Р. Пастернак . Концентрація динамічних напружень біля тонких пружних включень за умови антиплоскої деформації. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2013. — вип. 18. — С. 157 -164.

Стаття надійшла до редакції 23.03.2018