

УДК 629.113

Р.В. Пазин*Луцький національний технічний університет***ДО РОЗРОБКИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ АВТОПОЇЗДА КАТЕГОРІЇ O2
З ТРИВІСНИМ ПРИЧЕПОМ**

Показано, що відмінності у конструкціях автопоїздів з причепами категорії O2 у більшості випадків визначаються відмінностями у конструкції причинних ланок, оскільки конструкція тягових автомобілів залишається незмінною. З урахуванням цього автопоїзд, що розглядається, представлений двома модульними ланками. Диференціальні рівняння руху автопоїзда складені на основі загальних теорем механіки: про зміну головного вектора і головного моменту кількості руху. Отримані рівняння будуть використані для визначення показників стійкості автопоїзда у різних режимах руху.

Ключові слова: автопоїзд, тривісний причіп, математична модель.

Р.В. Пазин**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АВТОПОЕЗДА КАТЕГОРИИ O2 С
ТРЕХОСНЫХ ПРИЦЕПОМ**

Показано, что отличия в конструкциях автопоездов с прицепами категории O2 в большинстве случаев определяются отличиями в конструкции прицепных звеньев, поскольку конструкция тяговых автомобилей остается неизменной. С учетом этого рассматриваемый автопоезд представлен двумя модульными звеньями. Дифференциальные уравнения движения автопоезда составлены на основе общих теорем механики: об изменении главного вектора и главного момента количества движения. Полученные уравнения будут использованы для определения показателей устойчивости автопоезда в разных режимах движения.

Ключевые слова: автопоезд, трехосный причеп, математическая модель.

R. Pazyu**BEFORE THE FILLING OF THE MATHEMATICAL MODELS OF THE AUTOGRAPH BY
CATEGORY O2 BY THE TRIPLE PRINCIPLE**

It is rotined that differences in the constructions of lorry convoys with the trailers of category O2 in most cases are determined differences in the construction of the towed links, as a construction of hauling cars remains unchanging. Taking into account it the examined lorry convoy is presented two module links. Worked out differential equations of motion of lorry convoy an on the basis of general theorems of mechanics: about the change of main vector and main moment-of-momentum. The got equalizations will be utilized for determination of indexes of firmness of lorry convoy in the different modes of motion.

Keywords: trailer, three-axle trailer, mathematical model.

Вступ. При проектуванні нових чи модернізації існуючих автомобілів, враховуючи тенденцію їх експлуатації в комплексі з різними причіпними модулями, проблематичним є прогнозування експлуатаційних властивостей вказаних автотранспортних засобів (АТЗ), зокрема стійкості і керованості руху.

Особливістю проектування функціональних систем, забезпечуючих стійкість та керованість АТЗ (наприклад, рульове керування, підвіска, тощо), є паралельні процеси їх конструювання, оптимізації і моделювання динаміки транспортного засобу в цілому при багатокритеріальності інколи протирічних задач.

Характеристики стійкості та керованості, як відомо, визначаються комбінацією експлуатаційних, масово-геометричних і конструктивних параметрів модулів АТЗ. В загальному випадку бажані сполучення вказаних параметрів з точки зору стійкості та керованості навіть для одного і того ж транспортного засобу в діапазоні експлуатаційних навантажень і швидкостей руху бувають різними. Як, наслідок, є складність отримання на ранніх стадіях створення АТЗ точних конструктивних параметрів і кількісних показників за критеріями стійкості та керованості руху.

Очевидно, що необхідно мати комплексну методику, яка б на стадії проектування давала змогу знайти оптимальне рішення. Така методика повинна моделювати стаціонарні і перехідні процеси прямолінійного та криволінійного рухів АТЗ, дозволяти отримувати оціночні показники на основі яких можливо судити про властивості транспортних засобів за критеріями стійкості та керованості.

Теоретичні засади методики базуються на основі математичних моделей прямолінійного та керованого рухів автомобіля і автопоїзда. Тому метою роботи є розробка математичної моделі автопоїзда категорії O2 з тривісним причепою. На основі отриманих диференціальних рівнянь

збуреного руху автопоїзда планується отримання границь стійкості прямолінійного руху та траєкторій характерних точок ланок автопоїзда.

Огляд літературних джерел. Автомобіль, а тим більше автопоїзд (АТЗ) – це складна механічна система, що складається з багатьох елементів, які з'єднані різноманітними зв'язками. В процесі руху АТЗ відбуваються взаємні переміщення його окремих елементів, що буде впливати на стійкість руху.

Вивчення параметрів руху АТЗ з урахуванням усіх зв'язків між його окремими елементами являє собою задачу великої складності. Тому при дослідженні стійкості руху АТЗ замінюється розрахунковою моделлю.

Успішне розв'язання питання про курсову стійкість руху АТЗ залежить від правильного вибору розрахункової схеми, яка б найбільш повно відображала найважливіші фактори, що впливають на цю експлуатаційну властивість, і від точності оцінки сил взаємодії пневматичної шини з дорогою [1].

Теоретично модель автомобіля повинна якнайбільш повно відображати реальний АТЗ. Дослідження автомобіля як системи кількох тіл, що з'єднані голономними і неголономними зв'язками, приводить до вивчення складної механічної системи з великою кількістю ступенів свободи, яка описується системою диференціальних рівнянь високого порядку. Наприклад, у роботах [2], [3], [4] автомобіль поданий у вигляді складної, багатомасової просторової математичної моделі, в якій враховані всі ступені свободи кузова і руху невідвіснених мас щодо нього. В розрахункову схему були включені також кінематичні характеристики передньої і задньої підвісок, що визначають геометричні зв'язки, які накладаються на рух невідвіснених мас відносно кузова; рульове керування розглядалося у вигляді трьохмасової системи (два керованих колеса і рульове колесо), з'єднаних між собою пружними зв'язками. Враховано також сухе тертя і зазори і рульовому приводі, а також вплив кутів установки коліс і нелінійності підвіски (обмежувачі ходу ресор, несиметричність характеристик амортизаторів, сухе тертя тощо). В результаті система була описана дуже складною системою диференціальних рівнянь сімнадцятого порядку. В даному випадку питання про дослідження курсової стійкості руху являється дуже складним (якщо неможливим), навіть зважаючи на сучасний розвиток обчислювальної техніки та наявності великої кількості спеціальних математичних програм.

В роботі [5] відзначається, що ускладнення математичної моделі не завжди дає позитивний ефект, оскільки при визначенні масових розмірів (маси, моменти інерції) і характеристик зв'язків неминучі похибки, сполучення яких призводить до неточностей при визначенні кінцевих результатів. Крім того, практичне використання подібних розрахункових схем потребує попереднього аналітичного і, особливо, експериментального визначення великої кількості конструктивних параметрів автомобіля і шин. Тому при дослідженні стійкості руху АТЗ дедалі частіше використовують плоскі моделі з урахуванням нелінійного відведення коліс його осей.

Результати дослідження. Находженню залежності бічної сили, як функції кута відведення, присвячено велику кількість теоретичних і експериментальних досліджень.

Найбільше поширення на сьогодні при визначенні бічних сил отримала аксіоматика І. Рокара і залежності Д.А.Антонова.

І. Рокар у роботі [6] запропонував визначати бічну силу як:

$$Y = k_0 \arctg c \delta; \quad Y = k_0 t h c \delta; \quad Y = k \delta - k' \delta^3 + k'' \delta^5 - \dots; \quad Y = \frac{k \delta}{\sqrt{1 + x^2 \delta^2}}; \quad x = \frac{k}{\varphi z},$$

де c - коефіцієнт пропорційності;

k - коефіцієнт опору відведення;

δ - кут відведення;

φ - коефіцієнт поперечного ковзання;

z - розмір вертикального навантаження на колесо.

Для всіх апроксимацій важливо, щоб функція $Y=f(\delta)$ була не парною і визначалася як сума знакозмінного ряду.

Д.А. Антонов у роботі [7] запропонував наступне рівняння:

$$q = \frac{k_{yR \neq 0}}{k_{yR = 0}} = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R_N \varphi} \right)^2} \quad (1)$$

$$Y = \sqrt{(\varphi R_N)^2 - R^2} \quad (2)$$

де q - коефіцієнтів корекції опору відведення при впливі тангенціальних сил;

$k_{yR \neq 0}$ - коефіцієнт опору відведення при дії тангенціальних сил на колеса автомобіля;

$k_{yR = 0}$ - теж при відсутності тангенціальних сил;

R - гальмівна сила.

Крім того, Д.А. Антонов запропонував також таке рівняння для визначення бічної сили:

$$aY = \text{arctg} b \delta, \quad (3)$$

$$Y = \frac{2\varphi R_N}{\pi} \text{arctg} \left(\frac{k_{y0} \pi}{2\varphi R_N} \delta \right), \quad (4)$$

$$\text{де } a = \frac{\pi}{2\varphi R_N}; \quad b = k_{y0} \frac{\pi}{2\varphi R_N}.$$

У тій же роботі [7] Д.А. Антонов визначив бічну силу як:

$$Y = q k_{y0\delta} \delta, \quad (5)$$

$$\text{де } q = q_N q_T q_\varphi q_\gamma q_{\approx} q_{zp} q_{zy} q_{ny},$$

q_N - коефіцієнт впливу на відведення перерозподілу нормальних опорних реакцій; q_T - коефіцієнт впливу тягових і гальмівних сил; q_γ - коефіцієнт кута нахилу площини колеса до опорної поверхні; $q_{ш}$ - коефіцієнт тиску повітря в шині; q_{zy} - коефіцієнт відведення задніх керованих коліс; q_{ny} - коефіцієнт несталого відведення; q_φ - коефіцієнт урахування якості дорожнього покриття; q_{\approx} - коефіцієнт урахування коливань колеса виникаючих при русі по нерівній поверхні; q_{zp} - у випадку руху колеса по ґрунтовій дорозі.

За умови експлуатації автомобіля по дорогах із твердим покриттям і при номінальному тиску повітря в шині можна прийняти:

$$q_{\approx} = q_{zp} = q_{zy} = q_{ny} = q_\gamma = q_{ш} = 1 \quad (6)$$

Тоді одержимо:

$$Y = q_N q_T q_\varphi k_{y0\delta} \delta \quad (7)$$

$k_{y0\delta}$ - екстремальне значення коефіцієнта k_{y0} в залежності від номінальної реакції в контактні колеса з опорною поверхнею.

У результаті проведення розрахункового аналізу по основним залежностям $Y = f(\delta)$ бічної сили від кута відведення коліс автором роботи [6] було зроблено висновок, що з використанням

нелінійної теорії відведення результати більш близькі до експериментальних даних, чим при застосуванні лінійної теорії відведення. Однак при малих кутах відведення $\delta = 4 - 5^\circ$ при $\varphi = 0,6$ і $\delta = 2 - 2,5^\circ$ при $\varphi = 0,2 - 0,3$ зміна відношення порівняно невелика і може вважатися постійною /тобто $\frac{Y}{\delta} = k_y = \text{const}$ /, а залежність, отже, лінійною.

Але, як показують експериментальні дослідження, залежність бічної реакції Y від кута відведення може бути як монотонною, так і з падаючими ділянками (рис. 1) [8].

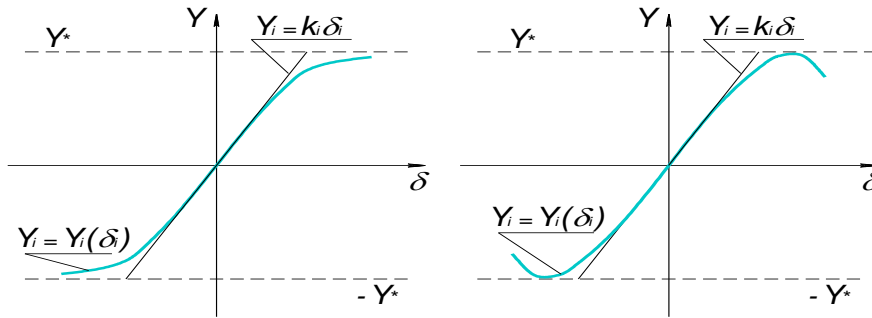


Рис. 1 - Монотонна (а) залежність і залежність з падаючими ділянками (б) бічної реакції від кута відведення

Нелінійний характер залежності $Y_i = Y_i(\delta_i)$ вказує на те, що лінійна гіпотеза відведення справедлива лише для досить малих величин кутів відведення й у цьому випадку конкретною реалізацією монотонної залежності бічної реакції, як функції кута відведення, може бути нелінійна залежність виду [9]:

$$Y = \frac{k \cdot \delta}{\sqrt{1 + \left(\frac{k \cdot \delta}{\varphi \cdot G_k}\right)^2}}, \quad (8)$$

де k – коефіцієнт бічного відведення, обумовлений тангенсом кута нахилу лінійної частини кривій;

φ – коефіцієнт зчеплення між шиною й опорною поверхнею;

G_k – нормальне навантаження на колесо, Н.

Виходячи з того, що безрозмірна величина бічної реакції визначається співвідношенням:

$$\bar{Y} = \frac{Y}{G_k}, \quad (9)$$

яку при використанні графо-аналітичного методу Певзнера більш зручно представити в безрозмірному вигляді:

$$\bar{Y} = \frac{\bar{k} \cdot \delta}{\sqrt{1 + \left(\frac{\bar{k} \cdot \delta}{\varphi}\right)^2}}, \quad (10)$$

де \bar{k} – безрозмірний коефіцієнт бічного відведення, обумовлений тангенсом кута нахилу лінійної частини кривої (надалі знак безрозмірності опущений) [9].

Характер кривої, яка представлена залежністю (10), можна також реалізувати у вигляді арктангенсоїди:

$$Y = k_0 \arctg(c\delta), \quad (11)$$

де k_0 – безрозмірний коефіцієнт, що задає максимальне значення безрозмірної реакції відведення (визначає горизонтальну асимптоту) і знаходиться із співвідношення:

$$k_0 = \frac{2\varphi}{\pi}; \quad (11)$$

c – безрозмірний коефіцієнт, значення якого залежить від кута нахилу лінійної частини кривої і визначається співвідношенням:

$$c = \frac{k}{k_0}. \quad (12)$$

Значення максимальної сили зчеплення в безрозмірному вигляді \bar{Y}^* , для цих аналітичних апроксимацій, визначаються із залежності:

$$\bar{Y}^* = \frac{Y^*}{G_k} = \varphi, \quad (13)$$

де Y^* – значення максимальної сили зчеплення колеса в бічному напрямку, Н.

Крім того, якщо залежності між силами, що діють на одне колесо і кутами його бічного відведення ще можна в деякому діапазоні вважати лінійними, то для залежностей між силами, що діють на вісь автомобіля, і кутами відведення осі, розміри цього діапазону зменшуються (інтервал лінійності значно скорочується). Це пояснюється впливом на кути відведення осей кінематики підвіски, характеристики рульового керування і перерозподілу нормальних реакцій [10].

У цьому випадку зазначені залежності найбільше повно розкриваються аналітичними апроксимаціями, у яких реакції відведення $Y_i = Y_i(\delta_i)$ (у безрозмірному виді) є емпіричними нелінійними функціями кутів бічного відведення δ (1.10 або 1.11) і являють собою сумарну бічну реакцію кожної осі:

$$Y_i = k_0 \arctg(c_i \delta_i);$$

$$Y_i = \frac{k_i \cdot \delta_i}{\sqrt{1 + \frac{k_i^2 \cdot \delta_i^2}{\varphi_i^2}}}, \quad (14)$$

де δ_i – кут відведення i – тої осі;

φ_i – коефіцієнт зчеплення коліс на i – тій осі.

Наявність на колесі тягових або гальмівних сил призводить до зміни коефіцієнту опору відведення [12], [13]. Модель взаємодії колеса з опорною поверхнею, запропонована Е. Фіала [11], проте наявність функції sign (сігнум), що має розрив та квадратичні члени в апроксимації моделі Фіала не дозволяють використовувати певний математичний апарат при дослідженні стійкості. Щоб уникнути цієї проблеми у роботі [14] запропонована нова математична форма моделі взаємодії колеса з опорною поверхнею, що зберігає всі основні особливості моделі Фіала:

$$\begin{cases} \bar{Y} = \frac{A \cdot t}{(t^2 + 1)} \\ \delta = \frac{t}{B \sqrt{1 - \left(\frac{t}{C}\right)^2}} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{B\delta}{\sqrt{1 + \left(\frac{B\delta}{C}\right)^2}}. \quad (15)$$

Коефіцієнти A , B , C , що входять в формулу (15), пов'язані з характеристиками залежності бічної сили ($\bar{Y}_{\delta_{\max}}$, δ_{\max} , $\bar{Y}'|_{\delta=0}$):

$$\bar{Y}_{\delta_{\max}} = \mu = \frac{1}{2}A; \quad \delta_{\max} = \delta_Y^* = \frac{1}{B\sqrt{1 - \frac{1}{C^2}}}; \quad Y'|_{\delta=0} = \bar{k}_Y = AB. \quad (16)$$

У роботі Пацейки [11] наведено значення характерних параметрів $(\bar{Y}_{\delta_{\max}}, \delta_{\max}, \bar{Y}'|_{\delta=0})$, які можливо використати для визначення бічної сили і стабілізуючого моменту (зважаючи на те, що вони подані у безрозмірній формі):

$$\begin{cases} \mu = 0.9226 \\ \delta_{\max} = 0.1647 \\ \bar{k}_Y = 14.593 \end{cases} \Rightarrow A = 1,8452; B = 7,9087; C = 1,5623.$$

Залежність стабілізуючого моменту від бічної сили представлена у вигляді [14]

$$M(\delta) = \frac{A_2 \delta}{(B_2 \delta^4 + 1)}; \quad (17)$$

$$\text{де } A_2 = \bar{k}_M = \frac{2}{3}R_2 \bar{k}_Y; \quad B_2 = \frac{27}{256} \left(\frac{\bar{k}_M}{M^{\max}} \right)^4.$$

Отримані залежності бічної сили і стабілізуючого моменту у плямі контакту шини з опорною поверхнею будуть використані у математичній моделі автопоїзда з тривісним причепом категорії O_2 .

Основні кінематичні і динамічні властивості автопоїзда з тривісним причепом з наближеними осями, як єдиної механічної системи тіл, залежать від фізичних явищ, що виникають при русі всіх його елементів і взаємодії останніх між собою. В свою чергу, ці явища визначаються геометрією і структурою автопоїзда.

Відмінності у конструкціях автопоїздів з причепами категорії O_2 у більшості випадків визначаються відмінностями у конструкції причіпних ланок, оскільки конструкція тягових автомобілів залишається незмінною.

Автопоїзд, що розглядається, рис.3, складається із двох модульних ланок, які, в свою чергу, складаються із кінематично незалежних елементів – тягового автомобіля і причепа. За модульної побудови автопоїзда несуча система причепа спирається на свій візок. У ведучій ланки передня вісь має керовані колеса, кути повороту яких θ_1 і θ_1' , причому $\theta_1 > \theta_1'$. Колеса задньої осі тягового автомобіля - неповоротні, розташовані позаду його центра мас.

Введемо наступні позначення:

$\Sigma = Oxy$ – плоска інерціальна система декартових координат; $C_{(x,y)\Sigma}$, m , I – центр мас, маса і центральний момент інерції тягового автомобіля щодо вертикальної осі;

$C_{(x,y)\Sigma}$, m_1 , I_1 – те ж саме для причепа;

$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ – курсові кути ланок автопоїзда;

φ_1 – кут складання кінематично незалежних ланок автопоїзда;

v, u – поздовжня і бокова проекції швидкості точки C , тобто проекції швидкості точки C на осі рухомої системи координат, безпосередньо пов'язаної з тяговим автомобілем.

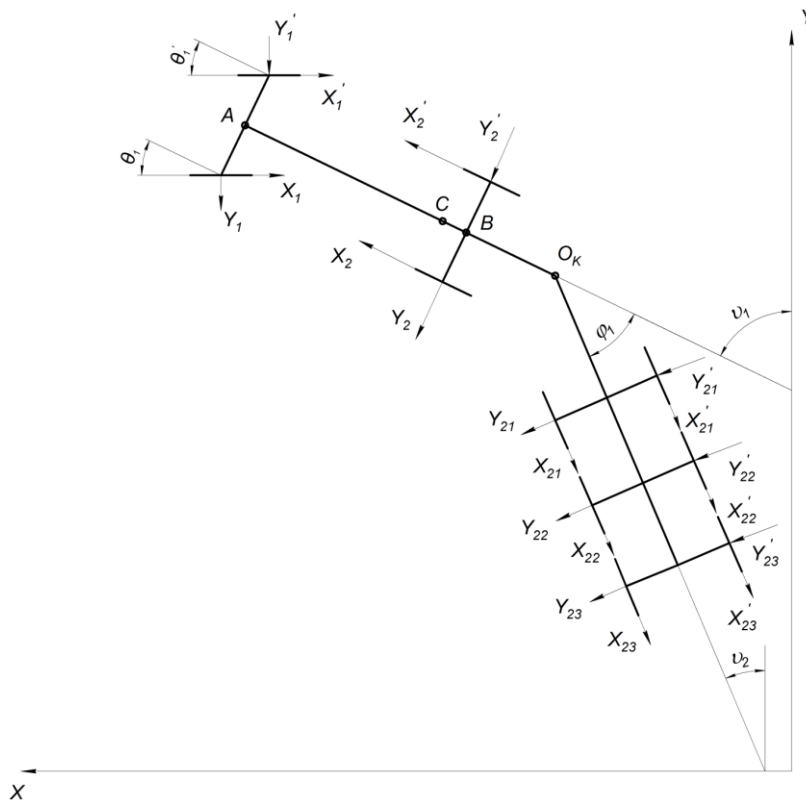


Рис. 3 – Розрахункова схема автопоїзда на неусталеному повороті

$M_k = f(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ – момент опору повороту причепа;

X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} – поздовжні, бокові і вертикальні реакції опорної поверхні на колеса автопоїзда.

Геометричні параметри автопоїзда:

$a = CA, b = CB, c = CO_1$;

$d_1 = O_1C_1, c_1 = C_1O_2, l_1 = d_1 + c_1$.

При складанні диференціальних рівнянь руху автопоїзда з тривісним причепом приходиться знаходити компроміс між двома протилежними обставинами: по-перше, математична модель плоскопаралельного руху автопоїзда повинна по можливості, найбільш повно і детально враховувати особливості реального автопоїзда; по-друге, складність моделі не повинна бути надто високою, так як це значно знижує потенційні можливості її аналізу.

Введемо для подальшого розгляду наступні системи координат:

$Oxuz$ – система координат, що пов'язана з опорною поверхнею;

x_0y_0 – система координат, що пов'язана з ведучою ланкою;

x_1y_1 – система координат, що пов'язана з причепом.

Припустимо далі, що:

- складові елементи модульного автопоїзда є абсолютно жорсткі тіла;
- вантаж на причепі розташований так, що центри мас ланок, а також тягово-зчпний пристрій, що з'єднує їх, розташовані у вертикальній площині симетрії ланок;
- основною траєкторією руху автопоїзда є траєкторія центра мас тягового автомобіля;
- автопоїзд рухається по рівній горизонтальній опорній поверхні;
- взаємодія коліс з опорною поверхнею проявляється через реакції опорної поверхні, які є функціями кутів відведення;
- поворотними є тільки передні колеса тягового автомобіля, кути повороту яких рівні між собою, тобто $\theta_1 = \theta_2 = \theta$;
- гіроскопічні моменти і моменти від неурівноважених обертових мас не враховуються;
- на автопоїзд діють наступні сили: сили опору коченню X_{ij} , сили опору бічному відведенню шин Y_{ij} , вертикальні реакції опорної поверхні Z_{ij} , сили інерції P_i , момент опору повороту причепа M_i .

Визначимо кути відведення коліс автопоїзда. Для цього розглянемо кінематику плоскопаралельного руху автопоїзда. Як відомо, кінематика плоскопаралельного руху твердого тіла приводиться до кінематики прямої на площині. Траєкторії кінців відрізка прямої, що незмінно пов'язана з плоским тілом, однозначно визначає траєкторії усього тіла. Тому, якщо А – довільна точка тіла, О – полюс, $\bar{\omega}$ - кутова швидкість руху навколо полюса, \bar{V}_{OA} - швидкість точки А відносно полюса О, то

$$\bar{V}_A = \bar{V}_O + \bar{V}_{OA}; \quad \bar{V}_{OA} = \bar{\omega} \times \overline{OA}. \quad (18)$$

Для центра мас тягового автомобіля можемо, відповідно, записати

$$\bar{V}_C = \bar{V}_O + \bar{V}_{OC}; \quad \bar{V}_{OC} = \bar{\omega} \times \overline{OC}. \quad (19)$$

Для причепа відомий вектор \bar{V}_{O1} швидкості точки зчіпки O_1 і напрямок швидкості центра мас C_1 цієї ланки: $\bar{V}_{C1} \parallel \overline{C_1O_1}$. Цих відомостей достатньо, для того щоб визначити швидкості усіх точок причепа, зокрема

$$\bar{V}_{C1} = \bar{V}_{O1} + \bar{V}_{O1C1}; \quad \bar{V}_{O1C1} = \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1C_1}; \quad \bar{V}_{O1C1} \perp \overline{O_1C_1}; \quad \bar{\omega}_1 = \bar{\dot{\vartheta}}_1. \quad (20)$$

Позначимо через x, y, z координати центра мас тягового автомобіля в нерухомій системі координат $Oxyz$. Розкладемо вектори швидкості і прискорення точки С за плоскопаралельного руху тягового автомобіля по нерухомому базису \bar{i}, \bar{j} і рухомому \bar{i}_0, \bar{j}_0 (орти осей x, y і відповідно x_0, y_0). Отримаємо

$$\bar{V}_C = \bar{i} \times \dot{x} + \bar{j} \times \dot{y} = \bar{i}_0 \times V + \bar{j}_0 \times U; \quad \bar{w}_C = \bar{i}_0 w_{x0} + \bar{j}_0 w_{y0}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{де } V &= \dot{x} \cos \vartheta + \dot{y} \sin \vartheta, & U &= -\dot{x} \sin \vartheta + \dot{y} \cos \vartheta, \\ w_x &= \dot{V} \cos \vartheta + \dot{y} \sin \vartheta, & w_y &= \dot{U} + \omega \times V, & \omega &= \dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

Вектори швидкостей точок причепа отримаємо у відповідності до закону розподілу лінійних швидкостей за плоскопаралельного руху, полюсами обертання будемо вважати точку зчіпки O_k :

$$\bar{V}_{Ok} = \bar{V}_{Ck} + \bar{\omega}_k \times \overline{C_kO_k} = \bar{i}_k V_k + \bar{j}_k (U_k - \omega_k C_k). \quad (21)$$

З іншого боку

$$\bar{V}_{Ok} = \bar{V}_{Ck} + \bar{\omega}_k \times \overline{C_kO_k} = \bar{i}_k V_k + \bar{j}_k (U_k - \omega_k C_k).$$

У відповідності до таблиці косинусів кутів [16] знаходимо

$$\bar{V}_{Ok} = \bar{i}_k [V_k \cos \varphi_k - (U_k - \omega_k C_k) \sin \varphi_k] + \bar{j}_k [V_k \sin \varphi_k + (U_k - \omega_k C_k) \cos \varphi_k].$$

Тому

$$\begin{aligned} V_k &= V \cos \varphi_k - (U - \omega C) \sin \varphi_k, \\ U_k + \omega_k d_k &= V \sin \varphi_k + (U - \omega C) \cos \varphi_k, \end{aligned}$$

Тобто

$$U_k = V \sin \varphi_k + (U - \omega C) \cos \varphi_k - \omega_k d_k. \quad (22)$$

Позначимо через \bar{i}_k, \bar{j}_k орти осей x_k, y_k для векторів швидкостей і прискорень центру мас причепа, що здійснює плоскопаралельний рух.

Отримаємо

$$\bar{V}_{Ck} = \bar{i}_k V_k + \bar{j}_k U_k, \quad \bar{w}_{Ck} = \bar{i}_k w_{Xk} + \bar{j}_k w_{Yk}.$$

В свою чергу

$$w_{Xk} = \dot{V}_k - \omega_k U_k, \quad w_{Yk} = \dot{U}_k + \omega_k V_k, \quad \omega_k = \dot{\varphi}_k = \omega - \sum_{i=1}^k \dot{\varphi}_i \quad (23)$$

У кожному конкретному випадку з використанням поздовжньої і поперечної складових швидкості тягового автомобіля отримаємо для причепа

$$\begin{cases} V_1 = V \cos \varphi_1 - (U - \omega c) \sin \varphi_1, \\ U_1 = V \sin \varphi_1 + (U - \omega c) \cos \varphi_1 - (\omega - \dot{\varphi}_1) d_1 \\ \omega_1 = \omega - \dot{\varphi}_1; \end{cases} \quad (24)$$

Величини V, U, ω, φ_1 , знаходяться із динамічних рівнянь автопоїзда. Координати центра мас і курсовий кут автомобіля тягача визначаються за допомогою кінематичних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \vartheta - U \sin \vartheta, \\ \dot{y} = V \sin \vartheta + U \cos \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = \omega. \end{cases} \quad (25)$$

Абсциси і ординати будь-якої точки автопоїзда можна знайти за допомогою кінцевих рівнянь. Для координат характерних точок (точок, що описують траєкторії ланок автопоїзда) отримаємо:

- для тягового автомобіля:

$$\begin{cases} x_A = x + a \cos \vartheta, \\ y_A = y + a \sin \vartheta; \end{cases} \quad \begin{cases} x_B = x + b \cos \vartheta, \\ y_B = y + b \sin \vartheta; \end{cases}$$

- для причепа:

$$\begin{cases} x_{O1} = x - c \cos \vartheta, \\ y_{O1} = y - c \sin \vartheta; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{O2} = x_{O1} - l_1 \cos(\vartheta - \varphi_1), \\ y_{O2} = y_{O1} - l_1 \sin(\vartheta - \varphi_1); \end{cases} \quad (26)$$

Кути відведення визначимо у відповідності до схеми, що наведена на рис.4. Для тягового автомобіля з передніми керованими колесами отримаємо:

$$\operatorname{tg}(\theta_1 - \delta_1) = \frac{(\bar{V}_N)_{Y_o}}{(\bar{V}_N)_{X_o}}, \quad \operatorname{tg}(\theta_1 - \delta_1') = \frac{(\bar{V}_N')_{Y_o}}{(\bar{V}_N')_{X_o}}. \quad (27)$$

Швидкості точок контакту коліс з опорною поверхнею визначаються такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \bar{V}_N &= \bar{V}_C + \bar{\omega} \times (\bar{CA} + \bar{AM} + \bar{MN}) + \dot{\theta} \times \bar{MN} = \bar{i}_o [V - \omega(H + \varepsilon \cos \theta_1) - \\ &- \dot{\theta}_1 \varepsilon \cos \theta_1] + \bar{j}_o [U + \omega(a - \varepsilon \sin \theta_1) - \dot{\theta}_1 \varepsilon \sin \theta_1], \\ \bar{V}_N' &= \bar{i}_o [V + \omega(H + \varepsilon \cos \theta_1') + \dot{\theta}_1 \varepsilon \cos \theta_1'] + \bar{j}_o [U + \omega(a - \varepsilon \sin \theta_1') - \dot{\theta}_1' \varepsilon \sin \theta_1']. \end{aligned} \quad (28)$$

З урахуванням останніх співвідношень запишемо вирази, що визначають кути відведення коліс тягового автомобіля:

$$\delta_1 = \theta_1 - \arctg \frac{U + \omega(a - \varepsilon \sin \theta_1) - \dot{\theta}_1 \varepsilon \sin \theta_1}{V - \omega(H + \varepsilon \cos \theta_1) - \dot{\theta}_1 \varepsilon \cos \theta_1}, \quad (29)$$

$$\delta_1' = \theta_1' - \arctg \frac{U + \omega(a - \varepsilon \sin \theta_1') - \dot{\theta}_1' \varepsilon \sin \theta_1'}{V - \omega(H + \varepsilon \cos \theta_1') - \dot{\theta}_1' \varepsilon \cos \theta_1'}.$$

Для задньої осі тягового автомобіля з неповоротними колесами:

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{(\bar{V}_2)_{Y_0}}{(\bar{V}_2)_{X_0}}, \quad \operatorname{tg} \delta_2' = \frac{(\bar{V}_2')_{Y_0}}{(\bar{V}_2')_{X_0}}. \quad (30)$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} \bar{V}_2 &= \bar{V}_C + \bar{\omega} \times (\bar{C}\bar{B} + \bar{B}\bar{P}) = \bar{i}_o (V - \omega H) + \bar{j}_o (U + b\omega), \\ \bar{V}_2' &= \bar{i}_o (V + \omega H) + \bar{j}_o (U - b\omega), \end{aligned} \quad (31)$$

отримаємо

$$\delta_2 = \arctg \frac{-U + b\omega}{V - \omega H}, \quad \delta_2' = \arctg \frac{-U + b\omega}{V + \omega H} \quad (i=1,2) \quad (32)$$

Знайдемо кути відведення коліс причепа, рис.4, б. Центри коліс осей причепа позначені через D_{ij} (лівий борт) і D_{ij}' (правий борт) ($j=\bar{1}, \bar{3}$), що відповідає його трьом осям. Для швидкостей точок D_{ij}, D_{ij}' маємо:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{D_{2j}} &= \bar{V}_{C_2} + \bar{\omega}_2 \times (\bar{C}_2 \bar{B}_{2j} + \bar{B}_{2j} \bar{D}_{2j}) + \dot{\theta}_2 \times \bar{B}_{2j} \bar{D}_{2j} = \\ &= \bar{i}_2 [V_2 - H(\omega_2 - \dot{\theta}_{2j}) \cos \theta_{2j}] + \bar{j}_2 [(U_2 - \omega_2 b_{2j}) + H(\omega_2 - \dot{\theta}_{2j}) \sin \theta_{2j}], \\ \bar{V}_{D_{2j}'} &= \bar{i}_2 [V_2 + H(\omega_2 - \dot{\theta}_{2j}) \cos \theta_{2j}] + \bar{j}_2 [(U_2 - \omega_2 b_{2j}) - \\ &- H(\omega_2 - \dot{\theta}_{2j}) \sin \theta_{2j}], \end{aligned} \quad (33)$$

$(j=\bar{1}, \bar{3}).$

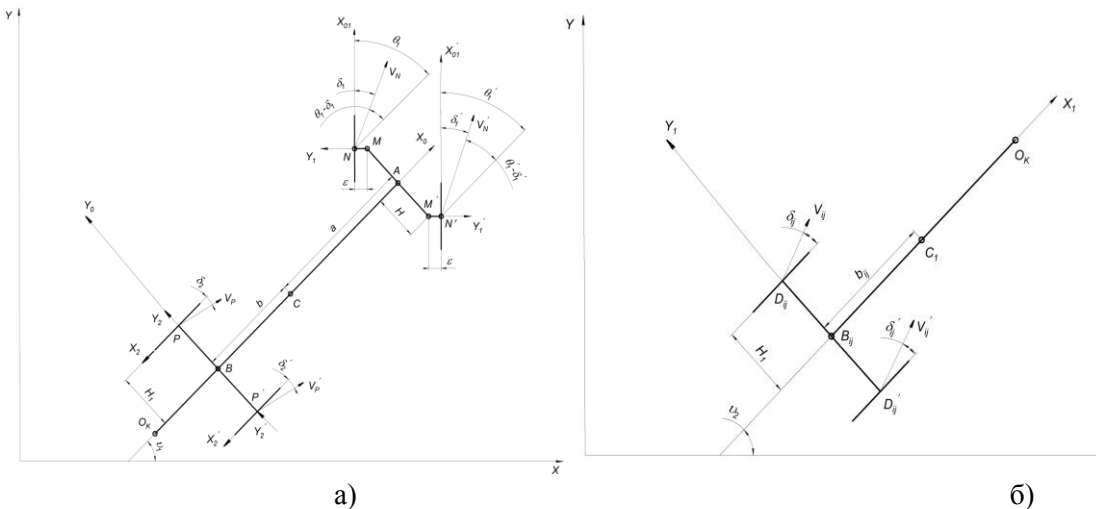


Рис. 4 – До визначення кутів відведення коліс тягового автомобіля (а) і причепа (б)

Так як для цієї групи осей

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_{2j} + \delta_{2j}) &= \frac{-(\bar{V}_{D2j})_{Y2}}{(\bar{V}_{D2j})_{X2}}, \\ \operatorname{tg}(\theta_{2j} + \delta'_{2j}) &= \frac{-(\bar{V}_{D2j}')_{Y2}}{(\bar{V}_{D2j}')_{X2}}, \quad j = (\bar{1}, \bar{3}) \end{aligned} \quad (34)$$

то приймаючи до уваги (11), вирази для кутів відведення осей причепа можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} \delta_{2j} &= -\theta_{2j} - \operatorname{arctg} \frac{(U_2 - \omega_2 b_{2j}) + H(\omega_2 - \dot{\theta}_{2j}) \sin \theta_{2j}}{V_2 - H(\omega_2 - \dot{\theta}_{2j}) \cos \theta_{2j}}, \\ \delta'_{2j} &= -\theta_{2j} - \operatorname{arctg} \frac{(U_2 - \omega_2 b_{2j}) - H(\omega_2 - \dot{\theta}_{2j}) \sin \theta_{2j}}{V_2 + H(\omega_2 - \dot{\theta}_{2j}) \cos \theta_{2j}}, \end{aligned} \quad (35)$$

Для отримання диференціальних рівнянь руху автопоїзда, що складається із двовісного тягового автомобіля і тривісного причепа, скористаємося загальними теоремами механіки: про зміну головного вектора \bar{K} і головного моменту \bar{G} кількості руху [15]. Якщо записати закон зміни кількості руху і кінетичного моменту в рухомій системі координат, а потім спроектувати їх на осі, безпосередньо пов'язані з тяговим автомобілем, то отримаємо рівняння поздовжньої і поперечної швидкості центра мас і кутової швидкості тягового автомобіля:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial V} - \omega \frac{\partial T}{\partial U} &= F_{X_0}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial V} - U \frac{\partial T}{\partial V} + V \frac{\partial T}{\partial \omega} &= M_g. \end{aligned} \quad (36)$$

Для того, щоб описати рух причепа скористаємося рівняннями Лагранжа другого роду для кута складання автопоїзда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} = M_{\varphi k} \quad (37)$$

Тоді

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial V} - \omega \frac{\partial T}{\partial U} &= F_{X_0}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial U} + \omega \frac{\partial T}{\partial V} &= F_{Y_0}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} - U \frac{\partial T}{\partial V} + V \frac{\partial T}{\partial U} &= M_g + M_1, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= (M_{\varphi 1} + M_1), \end{aligned} \right. \quad (38)$$

Тут узагальнюючі сили по відповідним координатам і моменти представлені наступним чином:

$$\begin{aligned} F_{X_0} &= -(X_1 \cos \theta_1 + Y_1 \sin \theta_1 + X'_1 \cos \theta'_1 + Y'_1 \sin \theta'_1) - \sum_{i=1}^2 (X_2 + X'_2) - \sum_{j=1}^3 (X_{2j} + X'_{2j}) \times \\ &\times \cos \varphi_1 - (Y_{2j} + Y'_{2j}) \sin \varphi_1); \end{aligned}$$

$$F_{y_0} = (Y_1 \cos \theta_1 - X_1 \sin \theta_1 + Y_1' \cos \theta_1' - X_1' \sin \theta_1') - \sum_{i=1}^2 (Y_2 + Y_2') - \sum_{j=1}^3 [X_{2j} + X_{2j}'] \times \sin \varphi_1 + (Y_{2j} + Y_{2j}') \cos \varphi_1 J; \quad (39)$$

$$M_g = H (X_1 \cos \theta_1 + Y_1 \sin \theta_1 - X_1' \cos \theta_1' - Y_1' \sin \theta_1') + \varepsilon (X_1 + X_1') + a (Y_1 \cos \theta_1 - X_1 \sin \theta_1 + Y_1' \cos \theta_1' - X_1' \sin \theta_1') + (X_2 - X_2') H_1 - (Y_2 + Y_2') b_2 + \sum_{j=1}^3 c [(X_{2j} + X_{2j}') \sin \varphi_1 + (Y_{2j} + Y_{2j}') \cos \varphi_1] - [(l_1 - d_2 - b_{2j}) \times (Y_{2j} + Y_{2j}') J];$$

$$M_{\varphi_1} = [l_1 - (d_2 + b_{2j})] \times (Y_{2j} + Y_{2j}').$$

Кінетична енергія автопоїзда, що має у своєму складі тяговий автомобіль і тривісний причіп, визначиться як

$$T = \frac{1}{2} (mV_C^2 + I\dot{\theta}^2 + m_1V_{C1}^2 + I_1\dot{\theta}_1^2) = \frac{1}{2} \{m(V^2 + U^2) + I\omega^2 + I_1(\omega - \dot{\varphi}_1)^2 + m_1[V \cos \varphi_1 - (U - \omega \varepsilon) \sin \varphi_1]^2\} \quad (40)$$

З урахуванням узагальнюючих сил і моментів та кінетичної енергії диференціальні рівняння автопоїзда з тривісним причепом записані у вигляді:

- для поздовжньої швидкості центра мас тягового автомобіля

$$(m + m_1)(\dot{V} - U\omega) + c\omega^2 m_1 - [m_1 d_1 [(\dot{\omega} - \ddot{\varphi}_1) \sin \varphi_1 - (\omega - \dot{\varphi}_1)^2 \cos \varphi_1] =$$

$$= -(X_1 \cos \theta_1 + Y_1 \sin \theta_1 + X_1' \cos \theta_1' + Y_1' \sin \theta_1') - (X_2 + X_2') - \sum_{j=1}^3 [(X_{2j} + X_{2j}') \times \cos \varphi_1 - (Y_{2j} + Y_{2j}') \sin \varphi_1 J];$$

- для поперечної швидкості центра мас тягового автомобіля

$$(m + m_1)(\dot{U} - V\omega) - c\omega^2 m_1 - [m_1 d_1 \times [(\dot{\omega} - \ddot{\varphi}_1) \cos \varphi_1 + (\omega - \dot{\varphi}_1)^2 \sin \varphi_1] =$$

$$= -(X_1 \sin \theta_1 - Y_1 \cos \theta_1 + X_1' \sin \theta_1' - Y_1' \cos \theta_1') + (Y_2 + Y_2') - \sum_{j=1}^3 (X_{2j} + X_{2j}') \times \sin \varphi_1 + (Y_{2j} + Y_{2j}') \cos \varphi_1;$$

- для кутової швидкості тягового автомобіля

$$I\omega + [\dot{\omega} \varepsilon - (U + V\omega)] c m_1 + c m_1 d_1 \times [(\dot{\omega} - \ddot{\varphi}_1) \cos \varphi_1 + (\omega - \dot{\varphi}_1)^2 \sin \varphi_1] =$$

$$= H (X_1 \cos \theta_1 + Y_1 \sin \theta_1 - X_1' \cos \theta_1' - Y_1' \sin \theta_1') + \varepsilon (X_1 + X_1') + a (Y_1 \cos \theta_1 - X_1 \sin \theta_1 + Y_1' \cos \theta_1' - X_1' \sin \theta_1') + [(X_2 - X_2') H_1 - (Y_2 + Y_2') b] - c \sum_{j=1}^3 [(X_{2j} + X_{2j}') \sin \varphi_1 + (Y_{2j} + Y_{2j}') \times \cos \varphi_1 J];$$

- для причепа

$$[I_1 + m_1 d_1^2] \times (\dot{\omega} - \ddot{\varphi}_1) + m_1 d_1 \times [(V - U\omega + c\omega^2) \times \sin \varphi_1 + (V\omega - \dot{U} - c\omega^2) \times \cos \varphi_1] = l_1 \sum_{j=1}^3 [(Y_{2j} + Y_{2j}') + M_1]. \quad (41)$$

Для знаходження траєкторій тягового автомобіля і причепа до динамічних рівнянь (41) слід додати кінематичні рівняння (25). Отримані рівняння будуть використані для визначення показників стійкості автопоїзда у різних режимах руху.

Висновки. Отримані залежності бічної сили і стабілізуючого моменту у плямі контакту шини з опорною поверхнею у формі Фіала. Показано, що відмінності у конструкціях автопоїздів з причепами категорії O_2 у більшості випадків визначаються відмінностями у конструкції причіпних ланок, оскільки конструкція тягових автомобілів залишається незмінною. З урахуванням цього автопоїзд, що розглядається, представлений двома модульними ланками. Диференціальні рівняння руху автопоїзда складені на основі загальних теорем механіки: про зміну головного вектора і головного моменту кількості руху. Отримані рівняння будуть використані для визначення показників стійкості автопоїзда у різних режимах руху.

Література.

1. Сахно В.П., Зав'ялова Л.І., Вакулич А.В., Сондак В.М. Про методи дослідження стійкості руху автомобіля у випадку значної розмірності вектора його стану // Вісник Центрального наукового центру Транспортної академії України. – 2000. – Вип. 3. – С. 83 – 85.
2. Добрин А.С. Дульцев В.С. Об устойчивости движения многоосных автомобилей относительно заданной траектории // Труды семинара по устойчивости и управляемости автомобилей. – М.: НАМИ, 1968. – Вып. 2. – С. 27 – 39.
3. Люст В.Я. Разработка методов расчета параметров устойчивости прямолинейного движения трехосных автомобилей. – Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 1969. – 23 с.
4. Сахно В.П., Вербицкий В.Г., Макаров В.А. Идентификация критического множества управляемых параметров модели автомобиля // Автомобильный транспорт: Сб. науч. трудов. – Харьков: ХНАДУ, 2003. – Вып. 13. – С.162 – 165.
5. Аксенов П.В. Многоосные автомобили. – М.: Машиностроение, 1989. – 279 с.
6. Рокар И. Неустойчивость в механике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 317 с.
7. Антонов Д.А. Расчет устойчивости движения многоосных автомобилей. – М.: Машиностроение, 1984. – 168 с.
8. Хребет В.Г. Динамика маятниковых многозвенных систем с качением: Дис. ... канд. физ. – мат. наук: 01.02.01. – К., 1993. – 121 с.
9. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Бифуркации стационарных состояний в системах с качением при постоянных силовых возмущениях // Прикл. математика и механика. – 1994. – №5 – С. 165 – 170.
10. Вербицкий В.Г. Бифуркационные множества и катастрофы в многообразии стационарных состояний пневмоколесных машин // Прикл. механика. – 1995. – №3. – С. 89 – 95.
11. Fiala E. Seitenkrafte am rollenden Luftreifen / E. Fiala . VDI - Zeitschrift. - 1954.-№96. - S. 973-979. (92).
12. Вербицкий В. Г. До визначення нової математичної форми моделі Фіала пружного колеса / В.Г. Вербицкий, А.М. Єфименко, Р.А. Кулієв, Ю.М. Стрільник // Вісник СевНТУ: зб. наук. пр.. Вип. 134/2012. Серія: Машиноприладобудування та транспорт. – Севастополь, 2012. - С. 127 – 130.
13. Вербицкий В.Г. К определению характеристик силового взаимодействия упругого пневматика с опорной поверхностью при постоянном угле увода /В.Г. Вербицкий, В.А. Банников, А.Н. Ефименко // Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції «Управління високошвидкісними рухомими об'єктами та професійна підготовка операторів складних систем» 27 – 28 листопада 2013 року, Кіровоград. – Вид-во КЛА НАУ, 2013. – С. 237 – 239.
14. Єфименко А. М. До питання аналізу моментів, що діють у силовому полі плями контакту шини з опорною поверхнею / А. М. Єфименко // Вісник Донецької академії автомобільного транспорту. – 2013. - №3. - С. 85 - 89.
15. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 832 с.

Стаття надійшла до редакції 25.04.2018р.