

УДК 539.3, 621.762

І.Є. Андрущак, В.А. Кошелюк

Луцький національний технічний університет

### АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ ТРІЩИН В КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ РОЗШИРЕНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

У роботі наведено сучасні обчислювальні методи для моделювання пошкоджень в композитних матеріалах. Запропоновано новий підхід до моделювання тріщини в ортотропних композитних середовищах за допомогою розширеного методу скінченних елементів (XFEM). Концепція XFEM передбачає поділ розв'язку на частини із використанням розрідженої сітки для опису незбуреного поля за його вузловими значеннями та спеціальних сингулярних доданків, що описують тріщину з кореневою особливістю напружень у її вершинах. Спосіб має здатність досліджувати розкриття тріщини без додавання подвійних вузлів, а генерування сітки для елементів здійснюється незалежно від геометрії тріщини. Крім того, було використано однаковий тип елементів в околі вершини тріщини та для інших частин моделі скінченних елементів, і число вузлів  $i$ , відповідно, ступені вільності значно зменшуються порівняно з класичним методом скінченних елементів.

Розширений метод скінченних елементів (XFEM) застосовано для моделювання процесу розриву та масштабного ефекту у композитних матеріалах, ослаблених отворами або розрізами. Аналіз показує, що результати XFEM добре узгоджуються з експериментальними результатами, що визначають номінальну міцність і добре узгоджуються з аналітичними результатами на основі моделі спільної зони, що дають розкриття тріщини та довжину зони процесу руйнування.

**Ключові слова:** тріщина, композитні матеріали, розширений метод скінченних елементів, коефіцієнт інтенсивності напружень, сітка

И.Э. Андрущак, В.А. Кошелюк

### АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН В КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАСШИРЕННОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе приведены современные вычислительные методы для моделирования повреждений в композитных материалах. Предложен новый подход к моделированию трещины в ортотропных композитных средах с помощью расширенного метода конечных элементов (XFEM). Концепция XFEM предусматривает разделение решения на части с использованием разреженной сетки для описания невозмущенного поля по его узловым значениям и специальных сингулярных слагаемых, описывающих трещину с корневой особенностью напряжений в ее вершинах. Способ имеет возможность исследовать раскрытия трещины без добавления двойных узлов, а генерирования сетки для элементов осуществляется независимо от геометрии трещины. Кроме того, были использованы однотипные элементы в окрестности вершины трещины и для других частей модели конечных элементов, и число узлов  $i$ , соответственно, степени свободы значительно уменьшаются по сравнению с классическим методом конечных элементов.

Расширенный метод конечных элементов (XFEM) был использован для моделирования процесса разрыва и масштабного эффекта в композитных материалах, ослабленных отверстиями или разрезами. Анализ показывает, что результаты XFEM хорошо согласуются с экспериментальными результатами, определяющие номинальную прочность и хорошо согласуются с аналитическими результатами на основе модели обшей зоны, дающие раскрытия трещины и длину зоны процесса разрушения.

**Ключевые слова:** трещина, композитный материал, расширенный метод конечных элементов, коэффициент интенсивности напряжений, сетка

I.Ye. Andrushchak, V.A. Koshelyuk

### THE ANALYSIS OF THE DISTRIBUTION OF CRACKS IN COMPOSITE STRUCTURES USING THE EXPANDED FINITE ELEMENT METHOD

This paper presents some of the most recent and relevant computational techniques for modelling and simulation of damage and/or failure on composite materials. A new approach is proposed to model a crack in orthotropic composite media using the extended finite element method (XFEM). The XFEM uses the concept of partition of unity in addition to meshless basic idea of approximating a field variable by its values at a set of surrounding nodes. The mesh generating is performed without any consideration of crack conformations for elements and the method has the ability of extending the crack without any remeshing. Furthermore, the type of elements around the crack tip is the same as other parts of the finite element model and the number of nodes and consequently degrees of freedom are reduced considerably in comparison to the classical finite element method.

The extended finite element method (XFEM) is implemented to simulate the fracture process and size effect (scale effect) in the composite materials weakened by holes or notches. The analysis shows that XFEM results are in good agreement with the experimental results specifying nominal strength and in good agreement with the analytical results based on the cohesive zone model specifying crack opening displacement and the fracture process zone length.

**Keywords:** crack, composite materials, extended finite element method, stress intensity factor, mesh

**Постановка проблеми.** Композитні матеріали набули широкого використання в промисловості та інженерних спорудах. До основних переваг використання таких матеріалів

відносять ефективно співвідношення міцності до ваги. У той же час композитні матеріали часто піддаються екстремальним механічним і термічним навантаженням, що робить їх чутливими до ушкоджень шляхом утворення тріщин.

Мета усіх досліджень надійності композитних матеріалів полягає в тому, щоб описати процес ініціювання та поширення тріщини, який обумовлює закінчення термін експлуатації композитної конструкції. Значні зусилля були спрямовані на оптимізацію для посилення частини ослабленої конструкції для відновлення її цілісності та, таким чином, забезпечення її надійності. Елементи конструкцій складаються з різноманітних взаємодій шарів композиту та можуть бути проаналізовані у різних масштабах.

Більшість досліджень зосереджено на вивченні композитів у великих масштабах, де композит вважається гомогенним матеріалом із усередненими механічними властивостями. Інші дослідження зосереджені на випадковому характері окремих шарів у мікроскопічному масштабі. На цьому рівні складові матеріалу представлені окремо, тобто структура, що складається з різних шарів, є неоднорідною. Основним недоліком такого підходу є те, що дефекти (пошкодження, тріщини) можуть виникати між шарами та всередині шару. Розповсюдження дефектів в мікромасштабному діапазоні часто може відбуватись на поверхні шару або під кутом. Утворена на поверхнях шарів тріщина може поширюватись вздовж шару або проникати в сусідній. Критерій відхилення такої тріщини до сусіднього матеріалу відрізняється від критерію, що регулює поширення тріщини в однорідному матеріалі. Це перешкоджає надійному прогнозуванню довговічності в обслуговуванні композитних конструкцій. Тому розробка та застосування достовірного числового методу та ефективного підходу до прогнозування траєкторії розповсюдження тріщини, в тому числі проникнення тріщини, можуть бути дуже важливими при вивченні механіки руйнування композитів.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Методики, що широко використовуються для прогнозування утворення та підростання тріщин, включають механіку пошкоджених середовищ [1], [2] або аналіз нагромадження пошкодженої [3]. У цих підходах тріщини не моделюються явним чином, а їх ефект пояснюється локальною модифікацією модулів пружності матеріалу у місцях, які вважаються пошкодженими. Хоча ці підходи є ефективними відносно обчислювальної точності, вони містять ряд недоліків, серед яких чутливість сітки та відсутність можливості аналізу руйнування шару, що є основним фактором, що впливає на розмірний ефект, який спостерігається в тестуванні композитів з відкритими отворами [4].

Метод скінчених елементів (FEM) здатний моделювати загальні граничні умови та складні геометрії. Елементи, що пов'язані з тріщинами, повинні лежати в площині (на берегах тріщини) та задовольняти необхідні умови градації сітки для імітації підростання тріщини. Класичний FEM має фундаментальні труднощі з відтворенням сингулярного поля напружень навколо вершини тріщини. На відміну від цього, розширений метод скінчених елементів (XFEM) спеціально розроблений для підсилення традиційного FEM для вирішення задач, у яких наявні розриви полів переміщень та напружень на окремих розімкнутих контурах, а також які мають відповідні геометричні особливості, зі збереженням усіх переваг скінченно-елементного аналізу.

Розширений метод скінчених елементів успішно використовується для моделювання поверхонь розриву. Основна концепція XFEM полягає у розширенні локального розв'язку шляхом застосування стандарту Partition of Unity (PU) методу кінцевих елементів. У рамках PU довільні функції додаються до стандартного простору поліноміальних скінчених елементів (FE) для покращення апроксимації отриманого числового методу. Розрив навколо тріщини можна моделювати без урахування поверхні тріщини, як геометричної межі для відповідності елементів границі. Також може бути відтворене сингулярне напружене поле поблизу кінця тріщини застосовуючи асимптотичні функції зсуву.

Зокрема, розширений метод скінчених елементів [5], який належить до класу методів дискретизації області, дозволяє моделювати поширення тріщини без зміни сітки шляхом введення двох класів функцій: розривних функцій для врахування розкриття тріщини та асимптотичної апроксимації поблизу вершини для врахування сингулярності напружень в околі вершини тріщини в механіці лінійного пружного руйнування (LEFM). До основних переваг XFEM відносять можливість не оновлювати сітку скінчених елементів для відстеження траєкторії підростання тріщини, а також можливість не дотримуватись заздалегідь визначеної траєкторії. Також тріщини можуть вільно збільшуватись в межах об'ємної ділянки матеріалу без перерахунку сітки, що відповідає геометрії стрибків переміщень поблизу тріщини [5, 6].

**Метою даної роботи** є проведення дослідження та числово-експериментальної перевірки інструменту імітації зростання випадкових тріщин в композитних матеріалах на основі розширеного методу скінчених елементів.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Використання розширеного методу скінчених елементів передбачає відповідний поділ розв'язку на складові, що відповідають локальній концентрації напружень та особливостям у вершинах тріщин. Функції доповнення стандартних функцій форми скінчених елементів формуються з врахуванням особливостей задачі. Зокрема, для задач механіки руйнування тіл із тріщинами у методі XFEM поля переміщень доповнюються розривними функціями, що дають можливість описати стрибок переміщень уздовж поверхні тріщини без оновлення розрахункової сітки, а також за допомогою асимптотичних функцій концентрації напружень, що дають можливість врахувати кореневу особливість поля напружень в околі вершини тріщини з відносно грубими сітками.

Функція доповнення визначається залежністю [7]:

$$u_{xfem} = (X) = \sum_{i \in L} N_i(X) u_i + \sum_{i \in J} N_i(X) H(X) a_i + \sum_{i \in K} \left[ N_i(X) \sum_{\alpha=1}^4 F_{\alpha}(X) b_{i\alpha} \right] \quad (1)$$

Функція доповнення формується таким чином, щоб враховувати будь-які розриви або відомі значення шуканого розв'язку. Було продемонстровано [8], що числово визначені функції концентрації можуть бути використані для імітації довільних тріщин або пошкоджень у композитних або анізотропних матеріалах. Функція Хевісайда визначається як:

$$H(X) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

При моделюванні необхідно враховувати функцію доповнення в околі вершини тріщини або функцію лінії поширення тріщини. Ці функції визначаються елементами першого порядку розкладу Вільямса асимптотичного поля переміщень в околі вершини тріщини в лінійно пружному матеріалі. Асимптотичні поля для ортотропних матеріалів функції доповнення для тріщини визначено як [9]:

$$\{F_{\alpha}\}_{1 \leq \alpha \leq 4}(r, \theta) = \sqrt{r} \left\{ \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)}, \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)} \right\} \quad (3)$$

де  $\theta_1, \theta_2, g_1(\theta), g_2(\theta)$  функції полярного кута  $\theta$  у вершині тріщини, що характеризуються залежностями:

$$g_k(\theta) = \sqrt{(\cos \theta + \mu_{kx} \sin \theta)^2 + (\mu_{ky} \sin \theta)^2} \quad (4)$$

$$\theta_k = \arctan \left( \frac{\mu_{ky} \sin \theta}{\cos \theta + \mu_{kx} \sin \theta} \right)$$

де  $\mu_k = \mu_{kx} + i\mu_{ky}$  корені характеристичного рівняння [10].

Для моделювання поверхні матеріалу, абсолютна величина функції доповнення для тріщини (перша похідна від розриву), що необхідна для характеристики довільної поверхні незалежно від сітки розбиття, визначається як:

$$A(x) = \left| \sum_I \phi_I(x) N_I(x) \right| \quad (5)$$

Величина  $A(x)$  залишається неперервною у просторі переміщень, але забезпечує стрибок у деформаційному полі (слабкий розрив) через поверхню матеріалу.

*Матричне представлення*

У заданій області  $V \in R$  за відомої функції  $f$  необхідно знайти функцію  $u(x, y)$ , яка мінімізує функціонал

$$F(u) = \iint_V f(x, y, u, u'_x, u'_y) dA \quad (6)$$

Використаємо позначення

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dy} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Припускаємо, що границя області  $\partial V = S_1 \cup S_2$  складається з двох частин, що не перетинаються. В частині  $S_1$  значення функції  $u(x, y)$  відоме як функція  $g(x, y)$ , а в іншій частині – обираємо довільно. Вектор зовнішньої нормалі позначаємо через  $\bar{n}$ .

Припускаємо, що функція  $u = u(x, y)$  є оптимальним розв'язком і розглянемо зміни  $w = u(x, y) = \delta \cdot \eta(x, y)$  для довільної функції  $\eta$  та нескінченно малого параметру  $\delta \in R$ . Оскільки величина  $u$  є мінімумом функціоналу  $F$  то обов'язкове виконання умови

$$\frac{\partial}{\partial \delta} F(u + \delta \eta) \Big|_{\delta=0} = 0 \quad (8)$$

Використовуючи лінійну апроксимацію знаходимо

$$\begin{aligned} f(x, y, u + \delta \eta, u'_x + \delta \eta'_x, u'_y + \delta \eta'_y) &\approx \\ \approx f(x, y, u, u'_x, u'_y) + \delta \frac{\partial f}{\partial u} \eta + \delta \frac{\partial f}{\partial u_x} \eta_x + \delta \frac{\partial f}{\partial u_y} \eta_y \end{aligned} \quad (9)$$

Таким чином

$$F(u + \delta \eta) \approx F(u) + \delta \iint_V \left( \frac{\partial f}{\partial u} \eta + \frac{\partial f}{\partial u_x} \eta_x + \frac{\partial f}{\partial u_y} \eta_y \right) dA \quad (10)$$

При мінімізації  $F$  при  $\delta = 0$  знаходимо

$$0 = \iint_V \frac{\partial f}{\partial u} \eta + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_x} \\ \frac{\partial f}{\partial u_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} dA \quad (11)$$

Теорему розбіжності можна записати як

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla f \cdot \nabla g dA &= \iint_{\partial S} f \nabla g \cdot \bar{n} ds - \iint_S f \Delta g dA \\ \iint_S f (\operatorname{div} \bar{v}) dA &= \iint_{\partial S} f \cdot \bar{v} \cdot \bar{n} ds - \iint_S \operatorname{grad} f \cdot \bar{v} dA \end{aligned} \quad (12)$$

Отримаємо

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_V \frac{\partial f}{\partial u} \eta + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_x} \\ \frac{\partial f}{\partial u_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} dA = \\
&= \iint_V \eta \frac{\partial f}{\partial u} + \eta \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial u_y} \right) dA + \oint_V \eta \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_x} \\ \frac{\partial f}{\partial u_y} \end{pmatrix} \cdot \bar{n} ds = \\
&= \iint_V \eta \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial u_y} \right) dA + \oint_V \eta \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_x} \\ \frac{\partial f}{\partial u_y} \end{pmatrix} \cdot \bar{n} ds
\end{aligned} \tag{13}$$

Таким чином фундаментальний розв'язок обчислення варіацій для двох змінних можна представити як

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x} + \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial u_y} &= 0 \quad (x, y) \in V \\
u(x, y) &= g(x, y) \quad (x, y) \in S_1 \\
\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_x} \\ \frac{\partial f}{\partial u_y} \end{pmatrix} \cdot \bar{n} &= 0 \quad (x, y) \in S_2
\end{aligned} \tag{14}$$

Підставивши у рівність (14) потенціал Ху-Вашидзу та здійснивши скінчено-елементну апроксимацію отримаємо розрахункові рівняння МСЕ, що можна подати у матричному вигляді. Систему лінійних рівнянь у глобальній формі для XFEM можна записати як:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{15}$$

де  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  характеризує матрицю жорсткості, вектор ступенів свободи вузла та вектор зовнішніх сили, відповідно. Глобальна матриця жорсткості  $\mathbf{K}$  визначається як:

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ij}^{uu} & \mathbf{k}_{ij}^{uh} & \mathbf{k}_{ij}^{ut} \\ \mathbf{k}_{ij}^{hu} & \mathbf{k}_{ij}^{hh} & \mathbf{k}_{ij}^{ht} \\ \mathbf{k}_{ij}^{tu} & \mathbf{k}_{ij}^{th} & \mathbf{k}_{ij}^{tt} \end{bmatrix} \tag{16}$$

де  $\mathbf{k}_{ij}^{rs} = \int_{V^e} (\mathbf{B}_i^r)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^s dV$  при  $(r, s = u, h, t)$

Матриця функції форми та вектор зовнішніх зусиль [11]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_i^u &= \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i^h = \begin{bmatrix} (N_i H)_x & 0 \\ 0 & (N_i H)_y \\ (N_i H)_y & (N_i H)_x \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i^{t\alpha} = \begin{bmatrix} (N_i F_\alpha)_x & 0 \\ 0 & (N_i F)_y \\ (N_i F)_y & (N_i F)_x \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_i^t &= [\mathbf{B}_i^{t1} \quad \mathbf{B}_i^{t2} \quad \mathbf{B}_i^{t3} \quad \mathbf{B}_i^{t4}] \\
\mathbf{F}_i^e &= \{ \mathbf{f}_i^u \quad \mathbf{f}_i^h \quad \mathbf{f}_i^{t1} \quad \mathbf{f}_i^{t2} \quad \mathbf{f}_i^{t3} \quad \mathbf{f}_i^{t4} \}^T
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\text{де } \mathbf{f}_i^h = \int_{\partial V} N_i H \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{V^e} N_i H \mathbf{b} dV \quad \mathbf{f}_i^{\alpha} = \int_{\partial V} N_i F_\alpha \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{V^e} N_i F_\alpha \mathbf{b} dV \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

Особливості композитної структури

Загальний вираз напружено-деформованого стану анізотропної структури можна представити через компоненти напружень та деформацій:

$$\sigma_{ij} = \mathbf{D}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \varepsilon_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \sigma_{kl} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (18)$$

Для більш зручного представлення можна використовувати вираз у формі компонентів

$$\sigma_i = d_{ij} \varepsilon_j \quad \varepsilon_i = c_{ij} \sigma_j \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (19)$$

Для ортотропних матеріалів, що мають взаємно ортогональні площини пружної симетрії вираз (19) набуде форми:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Розрахунок коефіцієнту інтенсивності напружень

Коефіцієнт інтенсивності напружень (SIF) є одним з основних показників механіки руйнування для вимірювання інтенсивності поля напружень в околі вершини тріщини та оцінки наявних пошкоджень. Оцінку коефіцієнта інтенсивності напружень при накладанні різних мод руйнування для міжфазної тріщини між двома ортотропними матеріалами можна здійснити за допомогою J – інтегралу. Для визначення J – інтегралу використовують залежність:

$$J = \int_G \left( W \delta_{1,j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j dG \quad (21)$$

де  $G$  – довільний контур в околі вершини тріщини,  $W$  – густина енергії деформації, що визначається як  $W = (1/2) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$  для лінійно-пружних матеріалів,  $n_j, j$  – компоненти зовнішньої нормалі  $G$ . Цей контурний інтеграл можна перетворити у відповідний інтеграл по поверхні.

У методі інтеграла взаємодії використовуються допоміжні поля, що накладаються на існуючі поля для виконання граничних умови (рівняння рівноваги та граничні умови на поверхні тріщини) при визначенні коефіцієнту інтенсивності напруженості змішаного режиму. Сумарний інтеграл стану двох полів можна визначити як:

$$J^s = J + J^{aux} + M \quad (22)$$

де  $J$  та  $J^{aux}$  визначають існуюче та допоміжне поле напружень, а  $M$  характеризує інтеграл взаємодії:

$$M = \int_A \left[ \sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{(1,2)} \delta_{1,j} \right] q_j dA \quad (23)$$

Для лінійно-пружного стану  $W^{(1,2)}$  знаходимо як:

$$W^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij} \right) \quad (24)$$

де верхній індекс  $aux$  характеризує допоміжний стан.

Чисельний приклад

Центральна тріщина в композитній пластині. Розглянемо центральну тріщину між двома ортотропними матеріалами. Нескінченна пластинка піддається розтягу з напруженням  $\sigma_{22}^0$ . Властивості матеріалу описують  $E_T = E_z = 10.8 GPa$ ,  $E_L = 137 GPa$ ,  $G_{zL} = G_{TL} = 5.65 GPa$ ,  $G_{zT} = 3.36 GPa$ ,  $\nu_{zL} = \nu_{TL} = 0.238$ ,  $\nu_{zT} = 3.36$  де  $L, T, Z$  характеризують повздовжній, поперечний та у напрямку поширення тріщини відповідно. При розбитті методом XFEM використано модель з 250 елементами та 268 вузлами.

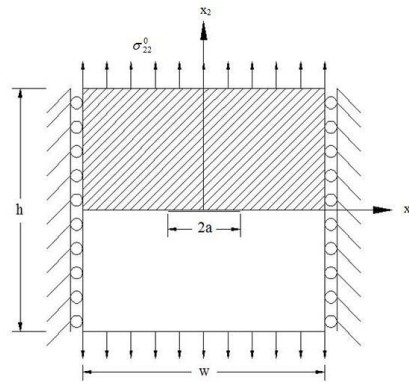


Рис. 1. Міжфазна тріщина двох ортотропних матеріалів

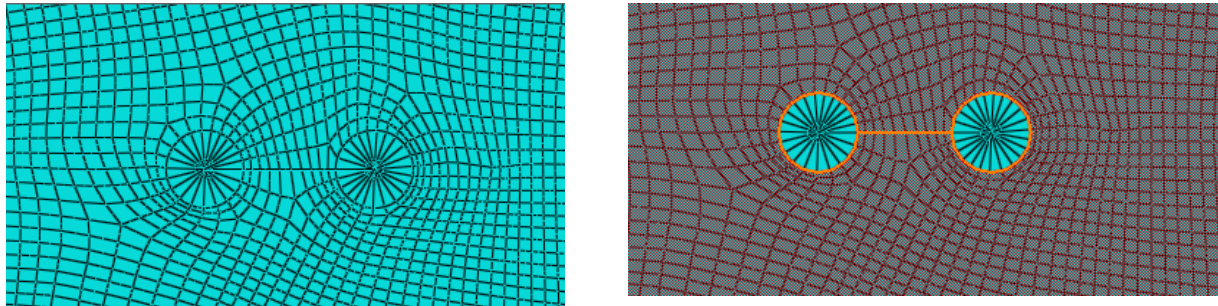
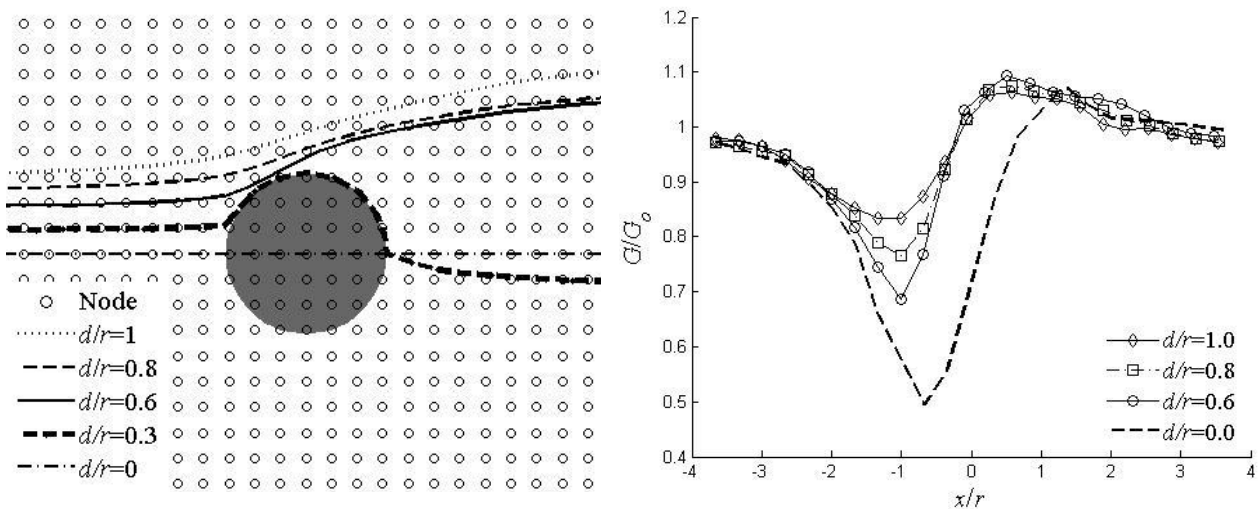


Рис. 2. Модель XFEM

Рис. 3. Поширення тріщини та варіація нормалізованого вивільнення енергії для різних співвідношень  $d/r$ 

**Висновок** Задача моделювання тріщин в композитних структурах досліджувалась з використанням розширеного підходу скінченно-елементного аналізу. Модель було дискретизовано методом розширеного кінцевого елемента, що дозволяє вивчення траєкторії поширюваних тріщин незалежно від фонові сітки. Методологія XFEM передбачає дискретизацію без будь-яких розривів. Ортотропний асимптотичний зсув тріщини поля, а також розривні функції Heaviside було застосовано для концентрації скінченного елемента в околі вершини тріщини. Аналітичні рішення для поля зсуву було використано для отримання асимптотичних функцій тріщини. Фактори інтенсивності напруженості змішаного режиму (SIF) визначається на основі  $J$  – інтегралу взаємодії.

Досліджено вплив геометрії тріщини, орієнтації матеріалу та кількох шарів. Поряд з тим була розглянута композиційна структура, що містить отвори. Встановлено, що у тонкому одно напрямленому композитному матеріалі траєкторія тріщини не впливає на близькість до дефектів (отворів) на відміну від ізотропних матеріалів. Було виявлено зростання тріщини вздовж напрямку

волокна в будь-який час незалежно від існуючих дефектів (отворів). Отримані результати добре узгоджуються з іншими наявними чисельними або (напів) аналітичними методами.

### Література

1. Roberto C. Pavan, Guillermo J. Creus, and Samir Maghous. A simplified approach to continuous damage of composite materials and micromechanical analysis. *Composite Structures*, 91(1):84 – 94, 2009.
2. C.T. McCarthy, R.M. O'Higgins, and R.M. Frizzell. A cubic spline implementation of non-linear shear behaviour in three-dimensional progressive damage models for composite laminates. *Composite Structures*, 92(1):173 – 181, 2010.
3. P. Kerfriden, J. C. Passieux, and S. P. A. Bordas. Local/global model order reduction strategy for the simulation of quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(2):154–179, 2012.
4. R.M. O'Higgins, M.A. McCarthy, and C.T. McCarthy. Comparison of open hole tension characteristics of high strength glass and carbon fibre-reinforced composite materials. *Composites Science and Technology*, 68:2770–2778, 2008.
5. T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45:601–620, 1999.
6. Qian, Zhen-dong, Jing Hu.: Fracture properties of epoxy asphalt mixture based on extended finite element method, *Journal of Central South University* 19.11 (2012): 3335.
7. Mo' es N., Dolbow J., Belytschko T.: A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, No. 1, 1999, pp. 132-150.
8. Alexander Menk and Stphane P. A. Bordas. A robust preconditioning technique for the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(13):1609–1632, 2011.
9. A Asadpoure and S Mohammadi. Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:2150–2172, 2007.
10. Cahill, L.M.A., Natarajan, S., Bordas, S.P.A., O'Higgins, R.M., McCarthy, C.T., An Experimental /Numerical investigation into the main driving force for crack propagation in uni-directional fibre reinforced composite laminae, *Composite Structures* (2013)
11. S.H. Ebrahimi, S. Mohammadi, A. Asadpoure. An Extended Finite Element (XFEM) Approach for Crack Analysis in Composite Media. *International Journal of Civil Engineering*. Vol. 6, No. 3, September 2008 pp 198 – 207

Стаття надійшла до редакції 15.12.2018