

УДК 621.647.23

**С.Б. Ковальчук, О.В. Горик***Полтавська державна аграрна академія, Полтава, Україна***ПРИРОДНА СИСТЕМА КООРДИНАТ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ КОМПОЗИТНИХ БРУСІВ ІЗ НЕЗМІННИМИ ЛІНІЙНИМИ РОЗМІРАМИ ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗІВ**

*У роботі подано математичне обґрунтування криволінійної циліндричної ортогональної системи координат, яка є природною для композитного бруса із незмінними лінійними розмірами поперечних перерізів, та отримано загальні аналітичні співвідношення для визначення її параметрів. Наведено приклади застосування запропонованої системи координат для отримання рівнянь теорії пружності для брусів із параболічною, еліптичною та косинусоїдальною віссю.*

*Ключові слова:* криволінійний брус; криволінійна плоска вісь; природна система координат; сімейство кривих; еквідистанта; рівняння теорії пружності.

*Форм. 40. Рис. 5. Літ. 22*

**С.Б. Ковальчук, О.В. Горик****ЕСТЕСТВЕННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ БРУСЬЕВ С НЕИЗМЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ РАЗМЕРАМИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ**

*В работе дано математическое обоснование криволинейной цилиндрической ортогональной системы координат, которая является естественной для композитного бруса с неизменными линейными размерами поперечных сечений, и получены общие аналитические соотношения для определения ее параметров. Приведены примеры применения предложенной системы координат для получения уравнений теории упругости для брусьев с параболической, эллиптической и косинусоидальной осью.*

*Ключевые слова:* криволинейный брус; криволинейная плоская ось; естественная система координат; семейство кривых; эквидистанта; уравнения теории упругости.

**S. Kovalchuk, O. Goryk****NATURAL COORDINATE SYSTEM FOR CURVILINEAR COMPOSITE BARS WITH STATIONARY LINEAR DIMENSIONS OF CROSS SECTIONS**

*It is known that there are some solutions of the elasticity theory for the tasks of composite bars deformation that are obtained only for multilayer bars with a rectilinear and circular axis, which impedes the efficient design of composite structures with curvilinear rod elements. The goal of this work is the mathematical justification and determination of parameters of the curvilinear cylindrical orthogonal coordinate system, which is natural for composite bars with stationary linear dimensions of cross sections over the length. The coordinate system is based on a one-parameter family of cylindrical surfaces evenly spaced from the base curve (the axis of a bar) and families of planes that are orthogonal to them. Two ways of parameterization of the proposed coordinate system are considered: by the coordinate of the cross section of a bar and by the angle between the cross section and the axis of the auxiliary Cartesian coordinate system, allowing one to take into account the features of axes of various shapes. General analytical relations for determining the parameters of the natural coordinate system by analytically given equation of the axis of a bar have been obtained for the types of parameterization mentioned above. Using these relations, we received the equations of the elasticity theory in the natural coordinate system for bars with a curvilinear plain axis of an arbitrary shape and stationary linear dimensions of cross sections. Some certain examples of implementation of the equations obtained for the bars with a parabolic, elliptic and cosinusoidal axis are given. The theoretical framework developed in this paper allows us to expand the possibility of applying the equations of the elasticity theory and relations for internal force factors for curvilinear composite bars in the natural coordinate system for solving a wide range of applied problems.*

*Keywords:* curvilinear bar; curvilinear flat axis; natural coordinate system; curve family; equidistant; equations of the theory of elasticity.

**Постановка проблеми.** Передові розробки сучасного будівництва та машинобудування неможливо уявити без застосування композитних матеріалів, які дозволяють значно знизити вагу конструкцій і одночасно підвищити їх міцність та надійність. Значну частину будь-якої конструкції складають стержні (бруси, балки) різної форми. Незважаючи на це аналітичні теорії деформування композитних брусів, особливо криволінійних, значно поступаються у розвитку теоріям деформування неоднорідних пластин і оболонок, яким присвячена велика кількість фундаментальних праць, зокрема [1-4].

Деформування пружних однорідних криволінійних стержнів добре вивчене, однак класична теорія деформування, основи якої висвітлені, наприклад, у [5], не може бути застосована до композитних стержнів. Причиною цього є неоднорідність структурної будови композитних брусів, значна піддатливість деформаціям поперечного зсуву і обтиснення та анізотропія фізико-механічних властивостей композитних матеріалів, що не можуть бути враховані в рамках класичної теорії для ізотропних однорідних стержнів.

Відомі аналітичні моделі деформування криволінійних композитних брусів, наприклад [6-9], дозволяють враховувати вплив згаданих властивостей на параметри деформування. Однак вони побудовані із використанням певних спрощень розподілу компонент напружено-деформованого стану (НДС), що знижує точність їх визначення і звужує границі застосування моделей.

Точні розв'язки теорії пружності отримані тільки для криволінійних брусів із круговою віссю і дозволяють враховувати як анізотропію матеріалу [10] та і дискретно-змінну [11-14] або неперервну [15-17] неоднорідність. Однак, такі розв'язки не дозволяють розглядати бруси із іншою формою осі і обмежені у можливості врахування зовнішніх навантажень різного типу.

Відсутність точних розв'язків задач теорії пружності для криволінійних брусів із відмінною від кругової формою осі зумовлена, зокрема, складністю описання їх геометрії, структури та граничних умов у відомих системах координат. Virішити дану проблему дозволяє застосування природної криволінійної системи координат [18], у якій поздовжні волокна та поперечні перерізи співпадають із координатними поверхнями.

Для композитного бруса із криволінійною плоскою віссю довільної форми у природній системі координат авторами у [19] отримані рівняння теорії пружності, у [20] побудовані залежності для внутрішніх силових факторів, а у [21, 22] – співвідношення для моделювання зосереджених та розподілених навантажень. Разом, згадані рівняння та залежності складають теоретичну основу для розв'язання задач деформування криволінійних брусів із віссю довільної форми. Однак, розглянуті у роботах [18-22] приклади ортогональних криволінійних циліндричних систем координат, окрім циліндричної кругової, не спроможні описати криволінійні композитні бруси із сталими вздовж осі лінійними розмірами поперечного перерізу і окремих фаз, як цього вимагають більшість реальних конструкцій.

**Мета статті:** виконати математичне обґрунтування та отримати співвідношення для визначення параметрів природної системи координат для криволінійних неоднорідних брусів із плоскою віссю довільної форми, що мають незмінні лінійні розміри та структурну будову поперечних перерізів.

**Виклад основного матеріалу.** У природній криволінійній системі координат  $НΞΥ$  [18], поздовжні поверхні  $Π_ζ$  ( $ζ=1,2$ ) криволінійного бруса (рис. 1) разом із усіма його поздовжніми волокнами належать до однопараметричного сімейства координатних циліндричних поверхонь  $Π_ζ^g$ . Аналогічно, торцеві поверхні  $T_ζ$  разом із усіма поперечними перерізами належать до однопараметричного сімейства координатних циліндричних поверхонь  $T_η^f$ . Проекції поверхонь  $Π_ζ^g$  та  $T_η^f$  на координатну площину  $XOZ$  допоміжної прямокутної системи координат  $XYZ$  складають однопараметричні сімейства кривих (рис. 1), відповідно:

$$g_ζ(x, z, ξ) = 0, \quad f_η(x, z, η) = 0, \quad (1)$$

де  $η, ξ$  – довільні дійсні сталі (параметри сімейств кривих).

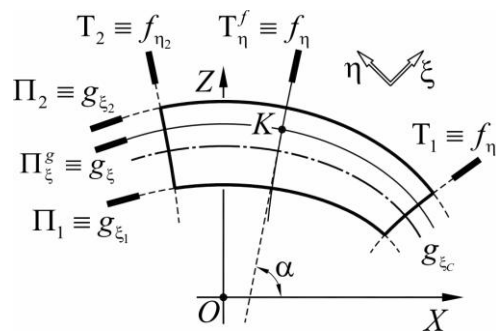


Рис. 1. Схема криволінійного бруса

Зв'язок між координатами довільної точки  $K(x, y, z)$  у допоміжній системі  $XYZ$  та координатами точки  $K(η, ξ, y)$  у природній криволінійній системі  $НΞΥ$ :

$$x = ω_x(η, ξ), \quad y = y, \quad z = ω_z(η, ξ). \quad (2)$$

Вирази для диференціала дуги на довільних кривих сімейств  $g_ξ$  та  $f_η$ :

$$ds_{\xi} = L_{\eta} d\eta, \quad ds_{\eta} = L_{\xi} d\xi, \quad (3)$$

де  $L_{\xi}, L_{\eta}$  – коефіцієнти Ламе системи координат НЄУ [18]:

$$L_{\eta} = \sqrt{1 + \kappa^2} \left| \frac{\partial \omega_z}{\partial \eta} \right|, \quad L_{\xi} = \sqrt{1 + \kappa^2} \left| \frac{\partial \omega_x}{\partial \xi} \right|, \quad \kappa = \frac{\partial \omega_z}{\partial \xi} / \frac{\partial \omega_x}{\partial \xi} = - \frac{\partial \omega_x}{\partial \eta} / \frac{\partial \omega_z}{\partial \eta} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

Виходячи із властивостей взаємно ортогональних сімейств  $g_{\xi}$  та  $f_{\eta}$ , має місце рівність

$$- \frac{\partial \omega_z}{\partial \xi} / \frac{\partial \omega_x}{\partial \eta} = \frac{\partial \omega_x}{\partial \xi} / \frac{\partial \omega_z}{\partial \eta} = \lambda. \quad (5)$$

Необхідно відмітити, що в (4)  $\alpha$  є кутом між дотичною до кривої  $f_{\eta}$  (проекція поперечного перерізу на  $XOZ$ ) та додатним напрямом осі  $OX$  і у загальному випадку є функцією двох змінних:  $\alpha = \alpha(\eta, \xi)$  (рис. 1).

Отримані у [19, 20] рівняння теорії пружності та залежності для внутрішніх силових факторів пружності для довільної циліндричної криволінійної системи координат для свого застосування потребують не самого аналітичного описання систем координат, а тільки їх параметрів, таких як коефіцієнти Ламе  $L_{\xi}$  та  $L_{\eta}$ , відношення  $\lambda$ , функція  $\alpha(\eta, \xi)$  або коефіцієнт  $\kappa = \operatorname{tg}(\alpha)$ . Тому використати згадані рівняння та залежності можна без аналітичного описання твірних сімейств кривих  $g_{\xi}$  та  $f_{\eta}$ , лише знаючи їх необхідні параметри.

Поставимо задачу формально вибудувати та отримати необхідні параметри природної криволінійної системи координат, яка дозволяє описати криволінійний композитний брус із сталими вздовж осі жорсткості лінійними розмірами та структурою поперечних перерізів.

Для цього розглянемо ділянку композитного дискретно-неоднорідного бруса із постійною структурою, яка залишається незмінною вздовж деякої плоскої кривої  $g_{\xi_0} \equiv g_{\xi_c}$ , що належить площині  $XOZ$ , не має самоперетинів і є однозначною на розглядуваній ділянці (рис. 2).

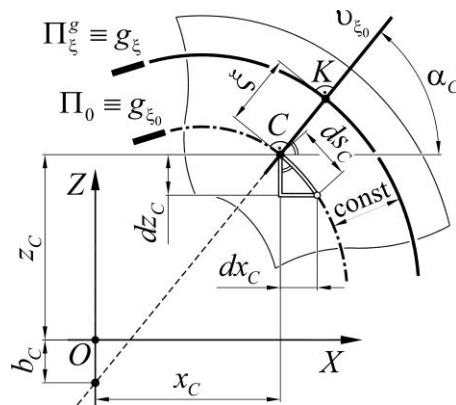


Рис. 2. Схема ділянки криволінійного бруса із постійними розмірами поперечного перерізу вздовж осі

Нехай  $g_{\xi_0}$  на розглядуваній ділянці є гладкою кривою, що може бути описана аналітично у вигляді рівняння:

$$g_{\xi_0} = \psi_0(x) - z = 0, \quad (6)$$

де  $\psi_0(x) = \psi_0$  – безперервна функція змінної  $x$ , що має принаймні першу та другу безперервні похідні.

У випадку, коли лінійні розміри фаз композитного бруса та їх розташування вздовж і відносно осі  $g_{\xi_0}$  є незмінними, проекція  $g_{\xi}$  кожного поздовжнього волокна на площину  $XOZ$  повинна бути кривою рівновіддаленою (паралельною) відносно осі  $g_{\xi_0}$ .

Нехай відстань між деякою точкою  $C(x_C, z_C)$  кривої  $g_{\xi_0}$  та точкою  $K(x_K, z_K)$  довільної кривої  $g_{\xi}$ , що лежать на перетині даних кривих спільною нормаллю  $\nu_{\xi_0}$ , дорівнює  $\xi$  (рис. 2). Тоді координати точки  $K$  можна пов'язати із координатами точки  $C$  наступними співвідношеннями:

$$x_K = x_C + \xi \cos \alpha_C, \quad z_K = z_C + \xi \sin \alpha_C. \quad (7)$$

Параметр  $\xi$  є величиною нормального зміщення точок кривої  $g_\xi$  до суміщення із базовою кривою  $g_{\xi_0}$  і може набувати від'ємних та додатних значень, а також дорівнювати нулю, причому  $g_{\xi_0} = g_\xi|_{\xi=0}$ . Далі вважатимемо, що додатні значення  $\xi$  відраховуються в обраному напрямку вектора бінормалі кривої  $g_{\xi_0}$ .

Для кута  $\alpha_C$  між нормаллю  $v_{\xi_0}$  та додатнім напрямом осі  $OX$  (рис. 2), із урахуванням (6) можна записати:

$$\alpha_C = \operatorname{arctg} \left( \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=x_C} \right) + \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

Підставивши (8) до співвідношень (7) отримаємо

$$x_K = x_C - \frac{\xi}{\sqrt{1 + \left( \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=x_C} \right)^2}} \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=x_C}, \quad z_K = \psi_0 \Big|_{x=x_C} + \frac{\xi}{\sqrt{1 + \left( \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=x_C} \right)^2}}. \quad (9)$$

Першому співвідношенню (9) надамо наступний вигляд

$$\left( \xi^2 + (x_K - x_C)^2 \right) \left( \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=x_C} \right)^2 + (x_K - x_C)^2 = 0. \quad (10)$$

У випадку аналітично заданої функції  $\psi_0$ , співвідношення (10) перетворюється на рівняння відносно  $x_C$ . Розв'язком даного рівняння буде залежність  $x_C = x_C(x_K, \xi)$ , яка дозволяє позбутись у другому співвідношенні (9) координати  $x_C$  і отримати залежність між координатами довільної точки  $K$  кривої  $g_\xi$ :  $\psi(x_K, \xi) = z_K|_{x_C=x_C(x_K, \xi)}$ . Тоді шукане рівняння паралельної кривої можемо записати у вигляді

$$g_\xi = \psi(x_K, \xi) \Big|_{x_K=x} - z = 0. \quad (11)$$

Рівняння кривої (11) у розгорнутому вигляді, навіть для простої функції базової кривої  $g_{\xi_0}$ , буде дуже громіздким. Однак для встановлення параметрів криволінійної системи координат, побудованої на основі  $g_\xi$ , отримувати рівняння (11) у завершеному вигляді не потрібно.

Криві (11) складають однопараметричне сімейство паралельних кривих  $g_\xi(x, z, \xi) = 0$  із параметром  $\xi$  і для формальної побудови природної криволінійної системи координат залишається знайти ортогональне йому сімейство кривих  $f_\eta$ .

Довільна нормаль  $v_{\xi_0}$  до осі  $g_{\xi_0}$  очевидно буде перпендикулярною і до решти кривих сімейства  $g_\xi$  (рис. 2), а її рівняння матиме наступний вигляд

$$v_{\xi_0} = z - x \operatorname{tg} \alpha_C + b_C = 0, \quad \text{або} \quad v_{\xi_0} = (z - z_C) - (x - x_C) \operatorname{tg} \alpha_C = 0. \quad (12)$$

Припустимо, що нормалі  $v_{\xi_0}$  в усіх точках деякої ділянки осі  $g_{\xi_0}$  можуть бути об'єднані у однопараметричне сімейство прямих

$$f_\eta(x, z, \eta) \equiv v_{\xi_0} = (z - z_C) - (x - x_C) \operatorname{tg} \alpha_C = 0. \quad (13)$$

Для цього необхідно встановити відповідність параметра  $\eta$  до деякого параметра рівняння нормалі  $v_{\xi_0}$ . Згідно (12) у якості таких параметрів можна розглядати координати  $x_C$  чи  $z_C$ , кут  $\alpha_C$  чи його тангенс  $\operatorname{tg} \alpha_C$ , або параметр  $t$ , якщо крива  $g_{\xi_0}$  задана параметрично. Це дозволяє розглядати різні способи параметризації сімейства  $f_\eta$ , що в окремих випадках дозволяє спростити вигляд рівнянь теорії пружності та інших залежностей у природній системі координат.

*Параметризація за координатою поперечного перерізу бруса.* Така параметризація природної системи координат відповідає випадку, коли у якості параметра сімейства  $f_\eta$  прийнята координата  $x_C$  чи  $z_C$  точки осі бруса.

Розглянемо випадок, коли

$$\eta \equiv x_C. \quad (14)$$

Тоді, підставивши (6) та (8) до (13), отримаємо

$$f_\eta = z + \frac{x - \eta}{\frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}} - \psi_0 \Big|_{x=\eta} = 0. \quad (15)$$

Встановимо параметри  $L_\xi$ ,  $L_\eta$ ,  $\alpha$ ,  $\kappa$  та  $\lambda$  для системи координат побудованої на однопараметричних сімействах кривих (11) та (15).

Враховавши (14) у співвідношеннях (9) та (8) із урахуванням (2) отримаємо

$$\omega_x = \eta - \frac{\xi}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}\right)^2}} \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}, \quad \omega_z = \psi_0 \Big|_{x=\eta} + \frac{\xi}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}\right)^2}}. \quad (16)$$

Підставивши (16) до третього співвідношення (4), матимемо

$$\kappa = \frac{\partial \omega_z}{\partial \xi} / \frac{\partial \omega_x}{\partial \xi} = -1 / \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}, \quad (17)$$

звідки

$$\alpha = -\arctg\left(1 / \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}\right). \quad (18)$$

Співвідношення (17) і (18) підтверджують очевидну властивість побудованої системи координат:  $\alpha = \alpha(\eta)$  – кут між дотичною до поперечного перерізу та віссю  $OX$  залежить тільки від координати  $\eta$ .

Підставивши (16) і (17) до двох перших співвідношень (4) отримаємо

$$L_\xi = 1, \quad L_\eta = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}\right)^2}} \left| \frac{\partial(\psi_0 \Big|_{x=\eta})}{\partial \eta} - \frac{\frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}\right)}{\left(1 + \left(\frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right| \xi. \quad (19)$$

Враховавши, що

$$\frac{\partial \psi_0 \Big|_{x=\eta}}{\partial \eta} = \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}, \quad \frac{d}{d\eta} \left(\frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}\right) = \frac{d^2 \psi_0}{dx^2} \Big|_{x=\eta},$$

друге співвідношення (19) можна перетворити до такого вигляду

$$L_\eta = \left| \frac{1}{\sin \alpha} \left(1 - \operatorname{sgn} \left(\frac{d^2 \psi_0}{dx^2} \Big|_{x=\eta}\right) \frac{\xi}{r_0}\right) \right|, \quad (20)$$

де  $r_0 = r_0(\eta)$  – радіус кривизни базової кривої  $g_{\xi_0}$ :

$$r_0 = \frac{1}{\left| \frac{d^2 \psi_0}{dx^2} \Big|_{x=\eta} \right|} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta}\right)^2} \right)^3. \quad (21)$$

Співвідношення (20) є узагальненим для базової кривої  $g_{\xi_0}$  із довільним знаком кривизни. У випадку показаному на рис. 2, кривизна  $g_{\xi_0}$  є від'ємною і якщо на розглядуваній ділянці вона не змінює знак, то  $\sin \alpha \geq 0$ , відповідно

$$L_\eta = \frac{1}{\sin \alpha} \left(1 + \frac{\xi}{r_0}\right).$$

Необхідно відмітити, що розбиттям базової кривої на ділянки у точках перегину і належним вибором допоміжної системи координат  $XYZ$  для кожної такої ділянки, можна завжди досягти умов, у яких буде справедливим дане співвідношення.

Підставивши (16) до (5) і виконавши подібні перетворення, отримаємо для параметра  $\lambda$

$$\lambda = -\frac{\partial \omega_z}{\partial \xi} / \frac{\partial \omega_x}{\partial \eta} = -\frac{\sin \alpha}{1 - \operatorname{sgn} \left( \frac{d^2 \psi_0}{dx^2} \Big|_{x=\eta} \right) \xi} r_0. \quad (22)$$

Співвідношення (16)-(21) і (22) дозволяють визначити всі необхідні параметри розглядуваної природної системи координат по заданому рівнянню базової кривої  $g_{\xi_0}$ . Аналогічно, можна отримати співвідношення для випадку параметризації сімейства  $f_\eta$  за координатою  $z_C$  точки базової кривої  $g_{\xi_0}$ , прийнявши  $\eta \equiv z_C$ .

*Параметризація за кутом нахилу поперечного перерізу бруса.* Такий спосіб параметризації природної системи координат відповідає випадку, коли у якості параметра сімейства  $f_\eta$  прийнято кут нахилу нормалі до базової кривої  $g_{\xi_0}$ :

$$\eta \equiv \alpha_C = \alpha. \quad (23)$$

З урахуванням (23), рівняння (13) сімейства  $f_\eta$  набуде вигляду

$$f_\eta(x, z, \eta) = (z - z_C) - (x - x_C) \operatorname{tg} \eta = 0. \quad (24)$$

Аналогічно розглянутому вище випадку визначимо параметри  $L_\xi$ ,  $L_\eta$ ,  $\kappa$  та  $\lambda$  для природної системи координат.

Врахувавши (23) у співвідношеннях (7) отримаємо

$$\omega_x = x_C(\eta) + \xi \cos \eta, \quad \omega_z = \psi_0 \Big|_{x=x_C(\eta)} + \xi \sin \eta. \quad (25)$$

Підставивши (25) до третього співвідношення (4) із урахуванням (9), матимемо

$$\kappa = \frac{\sin \eta}{\cos \eta} = \operatorname{tg} \eta = -1 / \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=x_C(\eta)}. \quad (26)$$

З урахуванням (25) і (26) коефіцієнти Ламе в (4) набудуть вигляду

$$L_\xi = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \eta} |\cos \eta| = 1, \quad (27)$$

$$L_\eta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \eta} |\cos \eta| \left| \frac{1}{\cos \eta} \frac{d\psi_0}{dx_C(\eta)} \frac{dx_C(\eta)}{d\eta} + \xi \right| = \left| \frac{1}{\cos \eta} \frac{d\psi_0}{dx_C(\eta)} \frac{dx_C(\eta)}{d\eta} + \xi \right|.$$

Врахувавши, що

$$\cos \eta = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=x_C(\eta)} \right)^2}} \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=x_C(\eta)}, \quad \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=x_C(\eta)} = \frac{1}{\frac{dx_C(\eta)}{d\eta}} \frac{d\psi_0}{d\eta} \Big|_{x=x_C(\eta)},$$

друге співвідношення (27) перетворимо так

$$L_\eta = \left| \xi - \operatorname{sgn} \left( \frac{dx_C(\eta)}{d\eta} \right) \sqrt{\left( \frac{dx_C(\eta)}{d\eta} \right)^2 + \left( \frac{d\psi_0}{d\eta} \Big|_{x=x_C(\eta)} \right)^2} \right| = \left| \xi - \operatorname{sgn} \left( \frac{dx_C(\eta)}{d\eta} \right) \frac{ds_C}{d\eta} \right|, \quad (28)$$

де  $ds_C = \sqrt{\left( dx_C(\eta) \right)^2 + \left( d\psi_0 \Big|_{x=x_C(\eta)} \right)^2}$  – довжина приросту дуги базової кривої  $g_{\xi_0}$ .

Однак, приріст довжини дуги

$$ds_C = r_0(\eta) d\eta,$$

що дозволяє записати (28) в остаточному вигляді

$$L_\eta = \left| \xi - \operatorname{sgn} \left( \frac{dx_C(\eta)}{d\eta} \right) r_0(\eta) \right|. \quad (29)$$

Порівнюючи (28) та (29), для радіуса кривизни  $r_0$  можемо записати

$$r_0(\eta) = \sqrt{\left(\frac{dx_c(\eta)}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\psi_0|_{x=x_c(\eta)}}{d\eta}\right)^2} = \left|\frac{dx_c(\eta)}{d\eta}\right| \sqrt{1 + \left(\frac{d\psi_0|_{x=x_c(\eta)}}{dx_c(\eta)}\right)^2} = \left|\frac{1}{\sin \eta} \frac{dx_c(\eta)}{d\eta}\right|. \quad (30)$$

Підставивши (25) до (5), із урахуванням (30) отримаємо

$$\lambda = -\frac{\partial \omega_z}{\partial \xi} / \frac{\partial \omega_x}{\partial \eta} = \frac{1}{\xi - \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\sin \eta} \frac{dx_c(\eta)}{d\eta}\right) r_0}. \quad (31)$$

Необхідно відмітити, що параметризація за кутом нахилу поперечного перерізу бруса дозволяє отримати простіші співвідношення для параметрів природної системи координат, але водночас має важливий недолік. За наявності точок перегину з'являється неоднозначна залежність сімейства  $f_\eta$  від параметра  $\eta$ , оскільки одному куту нахилу  $\alpha = \eta$  може відповідати декілька прямих сімейства. Тому, у випадку застосування такого способу параметризації виникає необхідність розбиття базової кривої на ділянки без точок перегину, в межах яких кут нахилу нормалі монотонно тільки зростає або тільки спадає.

**Результати дослідження.** Отримані вище співвідношення для параметрів  $\alpha, k, \lambda$  та коефіцієнтів  $L_\eta, L_\xi$  природної системи координат, побудованої на сімействі паралельних кривих, разом із результатами роботи [19] дозволяють отримати рівняння теорії пружності для криволінійного композитного стержня із незмінними по довжині лінійними розмірами та структурою поперечного перерізу.

З урахуванням (19) та (27), незалежно від розглянутих вище способів параметризації природної системи координат, рівняння теорії пружності, отримані у [19], спрощуються до такого вигляду

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\eta y}}{\partial y} + 2\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tau_{\xi\eta} + \mu^p \left( F_\eta^V - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ \lambda \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi y}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} (\sigma_\xi - \sigma_\eta) + \mu^p \left( F_\xi^V - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ \lambda \frac{\partial \tau_{\eta y}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\xi y}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tau_{\xi y} + \mu^p \left( F_y^V - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ \varepsilon_\eta &= \lambda \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tilde{u} \right), \quad \varepsilon_\xi = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta\xi} &= \lambda \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tilde{w} \right) + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi}, \quad \gamma_{\xi y} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}, \quad \gamma_{y\eta} = \lambda \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}, \\ \varepsilon_\eta &= \frac{\sigma_\eta}{\mu_\eta^E} - \frac{\mu_{\xi\eta}^V \sigma_\xi}{\mu_\xi^E} - \frac{\mu_{y\eta}^V \sigma_y}{\mu_y^E} + \mu_\eta^9 T, \quad \gamma_{\eta\xi} = \frac{1}{\mu_{\eta\xi}^G} \tau_{\eta\xi}, \\ \varepsilon_\xi &= \frac{\sigma_\xi}{\mu_\xi^E} - \frac{\mu_{y\xi}^V \sigma_y}{\mu_y^E} - \frac{\mu_{\eta\xi}^V \sigma_\eta}{\mu_\eta^E} + \mu_\xi^9 T, \quad \gamma_{\xi y} = \frac{1}{\mu_{\xi y}^G} \tau_{\xi y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{\mu_y^E} - \frac{\mu_{\eta y}^V \sigma_\eta}{\mu_\eta^E} - \frac{\mu_{\xi y}^V \sigma_\xi}{\mu_\xi^E} + \mu_y^9 T, \quad \gamma_{y\eta} = \frac{1}{\mu_{y\eta}^G} \tau_{y\eta}, \end{aligned} \quad (34)$$

де  $F_\eta^V, F_\xi^V, F_y^V$  – компоненти вектора об'ємних сил;  $\tilde{w}, \tilde{u}, \tilde{v}$  – компоненти вектора переміщень;  $\mu^p = \mu^p(\xi)$  – функція розподілу густини у поперечному перерізі неоднорідного бруса;

$\mu_a^S = \mu_a^S(\xi)$  – функції розподілу модулів пружності, модулів зсуву, коефіцієнтів Пуассона та

коефіцієнтів температурного розширення;  $T$  – інтенсивність температурного поля у розглядуваній точці бруса.

Для плоскої задачі теорії пружності матимемо

$$\lambda \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \xi} + 2\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tau_{\xi\eta} + \mu^p \left( F_\eta^V - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (35)$$

$$\lambda \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} (\sigma_\xi - \sigma_\eta) + \mu^p \left( F_\xi^V - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \right) = 0,$$

$$\varepsilon_\eta = \lambda \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tilde{u} \right), \quad \varepsilon_\xi = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \quad \gamma_{\eta\xi} = \lambda \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \tilde{w} \right) + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi}, \quad (36)$$

$$\varepsilon_\eta = \frac{\sigma_\eta}{\mu_\eta^E} - \frac{\mu_{\xi\eta}^V \sigma_\xi}{\mu_\xi^E} - \frac{\mu_{y\eta}^V \sigma_y}{\mu_y^E} + \mu_\eta^g T, \quad \varepsilon_\xi = \frac{\sigma_\xi}{\mu_\xi^E} - \frac{\mu_{y\xi}^V \sigma_y}{\mu_y^E} - \frac{\mu_{\eta\xi}^V \sigma_\eta}{\mu_\eta^E} + \mu_\xi^g T, \quad \gamma_{\eta\xi} = \frac{1}{\mu_{\eta\xi}^G} \tau_{\eta\xi}. \quad (37)$$

У випадку застосування параметризації за координатою поперечного перерізу бруса, параметри  $\lambda$  та  $\partial\alpha/\partial\eta$  у рівняннях (32)-(37) визначаються співвідношеннями (22), (18) і (21)

$$\lambda = - \frac{\left( 1 - \operatorname{sgn} \left( \frac{d^2 \psi_0}{dx^2} \Big|_{x=\eta} \right) \xi \right) r_0^{-1}}{\sqrt{1 + \left( \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta} \right)^2}}, \quad \frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{\frac{d^2 \psi_0}{dx^2} \Big|_{x=\eta}}{1 + \left( \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta} \right)^2}, \quad r_0 = \frac{\left( \sqrt{1 + \left( \frac{d\psi_0}{dx} \Big|_{x=\eta} \right)^2} \right)^3}{\left| \frac{d^2 \psi_0}{dx^2} \Big|_{x=\eta} \right|}. \quad (38)$$

Застосування параметризації за кутом нахилу поперечного перерізу бруса згідно (31), (23) та (30) призводить до суттєвого спрощення співвідношень для коефіцієнтів

$$\lambda = \frac{1}{\xi - \operatorname{sgn} \left( \frac{1}{\sin \eta} \frac{dx_c(\eta)}{d\eta} \right) r_0}, \quad \frac{d\alpha}{d\eta} = 1, \quad r_0 = \left| \frac{1}{\sin \eta} \frac{dx_c(\eta)}{d\eta} \right|. \quad (39)$$

Співвідношення (38), (39) і відповідно рівняння (32)-(37) можуть бути конкретизовані для певної форми осі бруса. Наведемо ряд прикладів такої конкретизації.

*Параболічна вісь.* Розглянемо брус із параболічною віссю (рис. 3), що задана рівнянням  $g_{\xi_0} = z - a_2 x^2 - a_0 = 0$ , де  $a_2, a_0 = \text{const}$ .

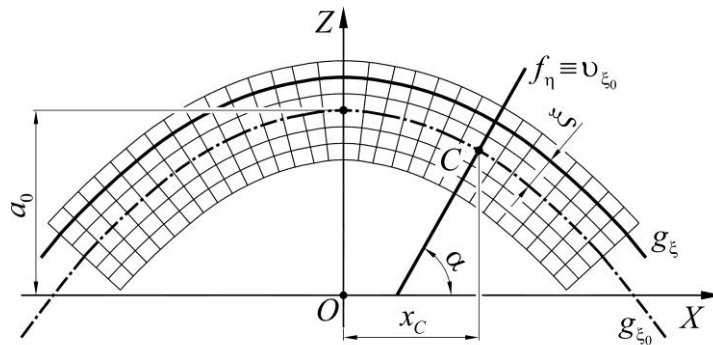


Рис. 3. Схема бруса із параболічною віссю ( $a_2 < 0, a_0 > 0$ )

Згідно (17)-(19), (21), (32) та (22) матимемо наступні параметри природної системи координат із параметризацією за координатою поперечного перерізу ( $x_c = \eta$ ):

$$\kappa = - \frac{1}{2a_2 \eta}, \quad \alpha = - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2a_2 \eta} \right), \quad \frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{2a_2}{1 + 4a_2^2 \eta^2}, \quad r_0 = \frac{1}{2|a_2|} \left( \sqrt{1 + 4(a_2 \eta)^2} \right)^3,$$



$$L_{\xi} = 1, L_{\eta} = \left| \frac{\left( \sqrt{1+4a_2^2\eta^2} \right)^3 - 2a_2\xi}{1+4(a_2\eta)^2} \right|, \lambda = \frac{\operatorname{sgn}(a_2\eta) \left( 1+4(a_2\eta)^2 \right)}{\left( \sqrt{1+4(a_2\eta)^2} \right)^3 - 2a_2\xi}.$$

Застосування даних співвідношень у (32)-(37) дозволяє отримати рівняння теорії пружності для бруса із параболічною віссю у завершеному вигляді.

Для встановлення параметрів природної системи координат із параметризацією за кутом нахилу поперечного перерізу необхідно встановити залежність  $x_c = x_c(\eta)$ , що можна зробити розв'язавши (26) відносно даної функції.

У випадку параболічної базової кривої згідно (26) матимемо

$$\operatorname{tg} \eta = -1 \left/ \frac{d}{dx} (a_2 x^2 + a_0) \right|_{x=x_c(\eta)}, \quad x_c(\eta) = -\frac{1}{2a_2 \operatorname{tg} \eta}, \quad \frac{d}{d\eta} x_c(\eta) = \frac{1}{2a_2 \sin^2 \eta}.$$

Тоді, відповідно до (23), (26), (27), (29)-(31) матимемо наступні параметри відповідної природної системи координат

$$\alpha = \eta, \quad \kappa = \operatorname{tg} \eta, \quad r_0 = \frac{1}{2|a_2| \sin^3 \eta}, \quad L_{\xi} = 1, \quad L_{\eta} = \left| \xi - \frac{1}{2a_2 \sin^3 \eta} \right|, \quad \lambda = \frac{1}{\xi - \frac{1}{2a_2 \sin^3 \eta}}.$$

*Еліптична вісь.* Нехай брус має еліптичну вісь (рис. 4), задану рівнянням  $g_{\xi_0} = z - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = 0$ ,  $a, b > 0$ .

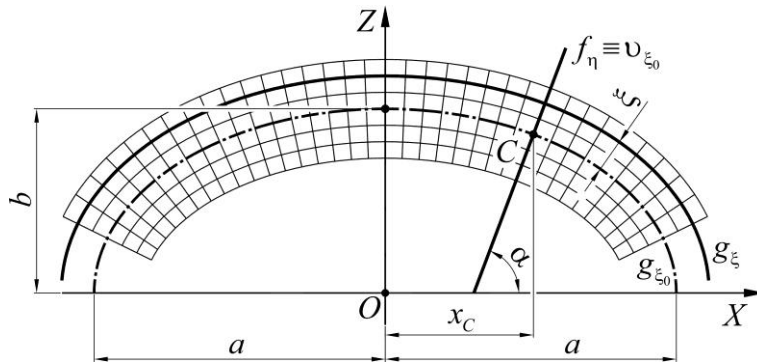


Рис. 4. Схема бруса із еліптичною віссю

Аналогічно попередньому прикладу, із використанням (17)-(19), (21), (32) та (22) отримаємо наступні співвідношення для параметрів природної системи координат із параметризацією за координатою поперечного перерізу ( $x_c = \eta$ ):

$$\kappa = \frac{a\sqrt{a^2 - \eta^2}}{b\eta}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{a\sqrt{a^2 - \eta^2}}{b\eta} \right), \quad \frac{d\alpha}{d\eta} = -\frac{a^3 b}{\sqrt{a^2 - \eta^2} (a^4 + (b^2 - a^2)\eta^2)},$$

$$L_{\xi} = 1, \quad L_{\eta} = \left| \frac{\left( \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)\eta^2} \right)^3 + a^4 b \xi}{a\sqrt{a^2 - \eta^2} (a^4 + (b^2 - a^2)\eta^2)} \right|, \quad \lambda = -\frac{a\sqrt{a^2 - \eta^2} (a^4 + (b^2 - a^2)\eta^2)}{\operatorname{sgn}(\eta) \left( \left( \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)\eta^2} \right)^3 + a^4 b \xi \right)}.$$

Для природної системи координат із параметризацією за кутом нахилу поперечного перерізу, згідно (26), у випадку  $x > 0$  матимемо:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{bx}, \quad x_c(\eta) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \eta}}, \quad \frac{d}{d\eta} x_c(\eta) = -\frac{a^2 b^2 \operatorname{tg} \eta (1 + \operatorname{tg}^2 \eta)}{\left( \sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \eta} \right)^3}, \quad 0 \leq \eta < \frac{\pi}{2}.$$

Тоді, із використанням (23), (26), (27), (29)-(31) отримаємо наступні співвідношення

$$\alpha = \eta, \kappa = \operatorname{tg} \eta, r_0 = \left| \frac{a^2 b^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \eta)}{\cos \eta (\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \eta})^3} \right|, L_\xi = 1, L_\eta = |\xi + r_0|, \lambda = \frac{1}{\xi + r_0}, 0 \leq \eta < \frac{\pi}{2}. \quad (40)$$

Якщо  $x < 0$ , згідно (26)

$$x_c(\eta) = -\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \eta}}, \quad \frac{d}{d\eta} x_c(\eta) = \frac{a^2 b^2 \operatorname{tg} \eta (1 + \operatorname{tg}^2 \eta)}{(\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \eta})^3}, \quad \frac{\pi}{2} < \eta \leq \pi,$$

однак  $\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\sin \eta} \frac{dx_c(\eta)}{d\eta}\right) = -1$  на проміжку  $\frac{\pi}{2} < \eta \leq \pi$  і співвідношення для параметрів

природної системи координат залишаються аналогічними (40).

Також можна показати, що для еліптичного кільця, якщо напрям нормалі  $v_{\xi_0}$  не змінюється при переході через  $\eta = \pi$ , параметри природної системи координат на усьому проміжку  $0 < \eta < 2\pi$  матимуть вигляд

$$\alpha = \eta, \kappa = \operatorname{tg} \eta, L_\xi = 1, L_\eta = |\xi + r_0|, \lambda = \frac{1}{\xi + r_0}, 0 \leq \eta < 2\pi,$$

де  $r_0 = r_0(\eta)$  – радіус кривизни, що визначається згідно (40).

*Косинусоїдальна вісь.* Нехай брус має косинусоїдальну вісь (рис. 5), задану рівнянням  $g_{\xi_0} = z - a \cos(bx) = 0, a, b > 0$ .

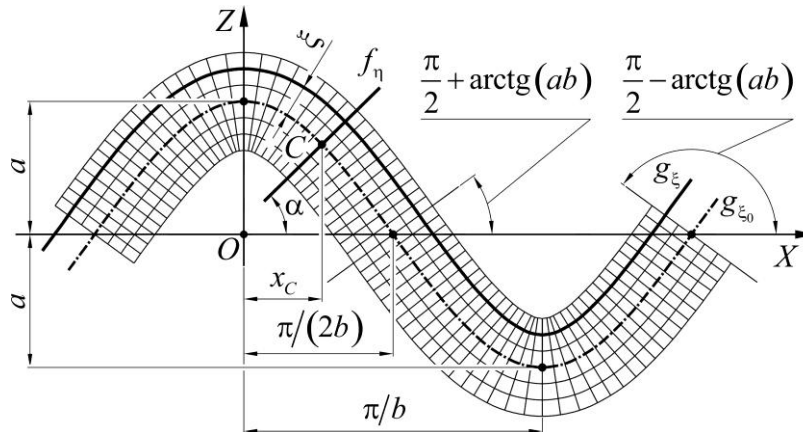


Рис. 5. Схема бруса із косинусоїдальною віссю

У випадку параметризації природної системи координат за координатою перерізу, згідно (17)-(19), (21), (32) та (22) отримані наступні співвідношення для її параметрів

$$\kappa = \frac{1}{ab \sin(b\eta)}, \alpha = \arctan\left(\frac{1}{ab \sin(b\eta)}\right), \frac{d\alpha}{d\eta} = -\frac{ab^2 \cos(b\eta)}{1 + a^2 b^2 \sin^2(b\eta)}, r_0 = \frac{(\sqrt{1 + a^2 b^2 \sin^2(b\eta)})^3}{|-ab^2 \cos(b\eta)|},$$

$$L_\eta = \left| \frac{(\sqrt{1 + a^2 b^2 \sin^2(b\eta)})^3 + ab^2 \cos(b\eta) \xi}{1 + a^2 b^2 \sin^2(b\eta)} \right|, \lambda = -\frac{1 + a^2 b^2 \sin^2(b\eta)}{(\sqrt{1 + a^2 b^2 \sin^2(b\eta)})^3 + ab^2 \cos(b\eta) \xi}.$$

Параметризацію природної системи координат за кутом нахилу нормалі до базової кривої в даному випадку можна застосувати лише для додатної або від'ємної півхвилі косинусоїди, оскільки діапазон зміни кута  $(\pi/2 - \arctg(ab) \leq \alpha \leq \pi/2 + \arctg(ab))$  однаковий в обох випадках. Розглянемо додатну півхвилю на проміжку  $-\pi/(2b) < x < \pi/(2b)$ . Згідно (26) для природної системи координат із параметризацією за кутом нахилу нормалі, матимемо:

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{1}{ab \sin(bx)}, \quad x_c(\eta) = \frac{1}{b} \arcsin\left(\frac{1}{ab \operatorname{tg} \eta}\right), \quad \frac{dx_c(\eta)}{d\eta} = -\frac{1}{b |\operatorname{tg} \eta| \sin^2 \eta \sqrt{a^2 b^2 \operatorname{tg}^2 \eta - 1}}.$$

Тоді, відповідно до (23), (26), (27), (29)-(31) матимемо наступні параметри природної системи координат

$$\alpha = \eta, \quad \kappa = \operatorname{tg} \eta, \quad r_0 = \frac{|\operatorname{tg} \eta|}{b |\sin^3 \eta| \sqrt{b^2 a^2 \operatorname{tg}^2 \eta - 1}}, \quad L_\xi = 1, \quad L_\eta = |\xi + r_0|, \quad \lambda = \frac{1}{\xi + r_0}.$$

Аналогічно наведеним прикладам можуть бути отримані завершені рівняння теорії пружності для брусів з іншою формою осі.

**Висновки.** Таким чином, побудовано криволінійну систему координат на основі однопараметричного сімейства еквідистант базової кривої, заданої аналітично, яка є природною для криволінійного бруса із незмінними лінійними розмірами поперечних перерізів.

Розглянуто два способи параметризації побудованої системи координат: за координатою поперечного перерізу бруса (за координатою точки базової кривої) та за кутом нахилу поперечного перерізу (кутом між нормаллю до базової кривої і віссю абсцис допоміжної прямокутної системи координат), для яких отримано співвідношення для визначення основних параметрів природної системи координат.

Із застосуванням отриманих співвідношень були уточнені рівняння просторової та плоскої задач лінійної теорії пружності для дискретно-неоднорідного композитного бруса із плоскою віссю довільної форми і незмінними лінійними розмірами поперечних перерізів.

Наведені приклади визначення параметрів природної системи координат та коефіцієнтів у рівняннях теорії пружності у випадку параболічної, еліптичної та косинусоїдальної базової кривої показали, що найбільш простий вигляд статичні та геометричні рівняння набувають у випадку параметризації природної системи координат за кутом нахилу поперечного перерізу бруса. Однак, застосування параметризації за координатою перерізу дозволяє розглядати випадки брусів із віссю у формі періодичних кривих без розбиття їх на ділянки між точками перегину.

Отримані співвідношення та рівняння складають основу для побудови розв'язків задач теорії пружності та моделей пружного деформування криволінійних брусів постійної структури та розмірів поперечних перерізів, із аналітично заданою поздовжньою віссю довільної форми.

### Список використаних джерел:

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
2. Алфатов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
3. Шваб'юк В. І., Ротко С. В. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини. Луцьк: РВВ Луцького НТУ, 2015. 264 с.
4. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
5. Светлицкий В. А. Механика стержней. В 2-х ч. Часть 1. Статика. М.: «Высшая школа», 1987. 320 с.
6. Ascione L., Fraternali F. A penalty model for the analysis of curved composite curved beams. *Computers & Structures*. 1992. 45(5/6). P. 985-999.
7. Lin K. C., Hsieh C. M. The closed form general solutions of 2-D curved laminated beams of variable curvatures. *Composite Structures*. 2007. 79(4), P. 606-618.
8. Luu A.-T., Kim N.-I., Lee J. Bending and buckling of general laminated curved beams using NURBS-based isogeometric analysis. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2015. 54. P. 218-231.
9. Thurnherr C., Groh R. M. J., Ermanni P., Weaver P. M. Higher-order beam model for stress predictions in curved beams made from anisotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*. 2016. Vol. 97-98. P. 16-28.
10. Lekhnitskii S. G. On the bending of a plane inhomogeneous curved beam. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1979. 43(1). P.198-200.
11. Tolf G. Stresses in a Curved Laminated Beam. *Fibre Science and Technology*. 1983. 19(4). P. 243-267.
12. Ko W. L., Jackson R. H. Multilayer Theory for delamination Analysis of a Composite Curved Bar Subjected to End Forces and End Moments. *Composite Structures* 5. Springer, Dordrecht. 1989. P. 173-198.

13. Koval'chuk S. B., Goryk A. V. Elasticity Theory Solution of the Problem on Bending of a Narrow Multilayer Cantilever with a Circular Axis by Loads at its End. *Mechanics of Composite Materials*. 54(5). P. 605-620.
14. Wang M., Liu Y. Elasticity solutions for orthotropic functionally graded curved beams. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2013. 37. P. 8-16.
15. Dryden J. Bending of inhomogeneous curved bars. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. 44(11-12). P. 4158-4166.
16. Kardomateas G.A. Bending of a cylindrically orthotropic curved beam with linearly distributed elastic constants. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1990. 43. P. 43-55.
17. Tufekci E., Eroglu U., Aya S. Exact solution for in-plane static problems of circular beams made of functionally graded materials. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2016. 44(4). P. 476-494.
18. Ковальчук С. Б., Горик О. В. Природна криволінійна циліндрична система координат для стержнів із плоскою віссю довільної форми. *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури*. Одеса, 2017. Вип. 68. С. 31-38.
19. Ковальчук С. Б., Горик О. В. Рівняння теорії пружності для композитних брусів із плоскою віссю довільної форми у природній криволінійній системі координат. *Міжвузівський збірник «Наукові нотатки»*. Луцьк, 2018. Вип. 63 С. 89-97.
20. Ковальчук С. Б., Горик О. В. Інтегральні та диференціальні співвідношення для внутрішніх силових факторів при згині бруса з криволінійною плоскою віссю довільної форми. *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури*. Одеса, 2018. Вип. 70. С. 40-48.
21. Ковальчук С. Б., Горик О. В. Аналітичне моделювання зосереджених та локалізованих навантажень брусів із криволінійною плоскою віссю. Частина 1. Моделювання зосереджених у точці навантажень. *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури*. Одеса, 2018. Вип. 73. С. 31-40.
22. Ковальчук С. Б., Горик О. В. Аналітичне моделювання зосереджених та локалізованих навантажень брусів із криволінійною плоскою віссю. Частина 2. Моделювання локалізованих на ділянці навантажень. *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури*. Одеса, 2019. Вип. 74. С. 31-39.

**Рецензенти:**

**Шваб'юк Василь Іванович**, професор кафедри технічної механіки Луцького національного технічного університету, доктор технічних наук, професор.

**Павліков Андрій Миколайович**, завідувач кафедри залізобетонних і кам'яних конструкцій та опору матеріалів Полтавського національного технічного університету ім. Ю. Кондратюка, доктор технічних наук, професор.

Стаття надійшла до редакції 04.03.2019