

УДК: 593.3

В.З. Кухар*Львівський національний університет імені Івана Франка***ПОШИРЕННЯ ПЛОСКОЇ ТРІЩИНИ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ПОВЗУЧОСТІ**

Розглянуто основні методи розв'язування типових задач, на прикладі задачі про високотемпературну повзучість плоскої гладкої тріщини в безмежному тривимірному тілі. Запропоновано дискретний метод розв'язування даної задачі. Проведено детальний аналіз методу еліптичного моделювання. Чисельно підтверджено гіпотезу про форму поширення початково-еліптичної тріщини.

Ключові слова: високотемпературна повзучість, плоска тріщина, метод еквівалентних площ.

В.З. Кухар**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЫ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ**

Рассмотрены основные методы решения типичных задач на примере задачи о высокотемпературной ползучести плоской гладкой трещины в безграничном трехмерном теле. Предложено дискретный метод решения данной задачи. Проведен детальный анализ метода эллиптического моделирования. Численно подтверждена гипотеза о форме распространения начально-эллиптической трещины.

Ключевые слова: высокотемпературная ползучесть, плоская трещина, метод эквивалентных площадей.

V.Z. Koukhar**HIGH TEMPERATURE FLAT CREEP CRACK PROPAGATION**

Basic methods for solving common high temperature creep problems were considered in case of high temperature flat creep crack propagation inside infinite three-dimensional body. The discrete method of solving this problem is proposed. A detailed analysis of the elliptic modeling method is carried out. The hypothesis of initially elliptic crack propagation shape is numerically confirmed.

Keywords: high temperature creep, flat crack, equivalent area method.

Вступ. Руйнування спричинене поширенням плоских тріщин в просторових об'єктах являє собою найбільш поширене явище в інженерній практиці. Дослідженню цього процесу присвячено безліч робіт по механіці руйнування. Побудовано ряд теоретичних моделей, кожна з яких застосовується для конкретного типу і умов руйнування, які вона найкраще описує. Проблема запропонованих моделей полягає в їх складності. Точний розв'язок більшості типових задач на даний момент невідомий.

Постановка проблеми. Розглянемо зокрема задачу про поширення високотемпературної повзучої плоскої тріщини довільного гладкого контуру в безмежному тримірному тілі під дією розтягуючих зусиль перпендикулярних площині тріщини (Рис. 1).

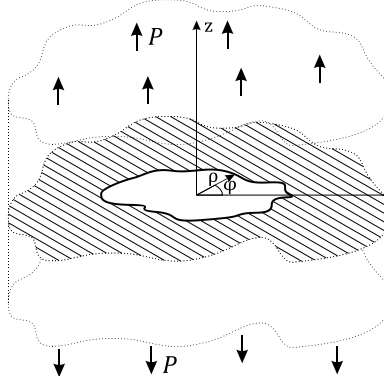


Рис. 1. Плоска тріщина

Введемо циліндричну систему координат (ρ, φ, z) . Тоді контур тріщини можна описати функцією $\rho(\varphi, t) \in C^1(\varphi)$. Рівняння поширення такої тріщини згідно [1].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = F(K_I(\rho, \varphi)) \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2}, \quad (1)$$

де $K_I(\rho, \varphi)$ - коефіцієнт інтенсивності напружень, вираз якого залежить від контуру тріщини, $F(K_I(\rho, \varphi)) = 2\alpha_0 A_1 K_{IC}^{2(m-1)} \frac{K_I^{2m}(\rho, \varphi)}{K_{IC}^2 - K_I^2(\rho, \varphi)}$, де α_0 , A_1 , m , K_{IC} - константи матеріалу.

Аналіз досліджень і публікацій. Це диференціальне рівняння в частинних похідних, яке не має розв'язку в елементарних функціях. Для його розв'язання використовують наближені або ж дискретні методи. Наближені зводяться до заміни початкової тріщини деякою іншою, подібною до неї, дискретні до розбиття і одночасного розв'язання задачі для кожної точки контуру. Зупинимось спочатку на перших.

Метод еквівалентних площ. Найпростіший із них - зведення до однопараметричної задачі $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0$ вперше запропонований в роботі [2] відомий в літературі під назвою *метод еквівалентних площ (МЕП)*. Суть методу полягає в тому, що початкова тріщина довільного контуру замінюється рівною по площі коловою тріщиною (Рис.2).

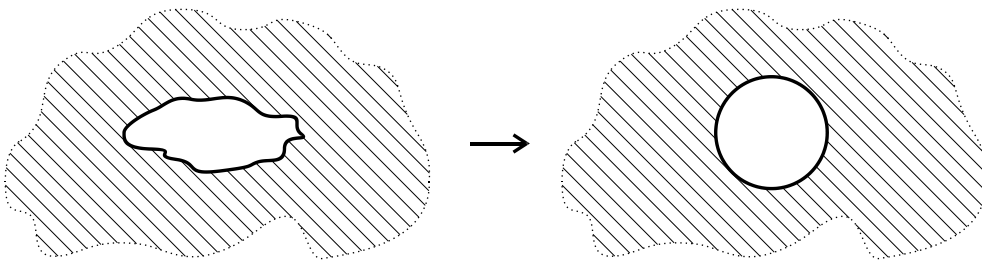


Рис. 2. Метод еквівалентних площ (МЕП)

Тоді рівняння в частинних похідних (1) вироджується в звичайне диференціальне рівняння $\frac{d\rho}{F(K_I(\rho))} = dt$, розв'язок якого дає достатне для інженерної практики наближення розв'язку (1), що підтверджується багатьма експериментальними даними [2]. Проте чим більш витягнута тріщина, тим більшою стає похибка даного методу.

Еліптичний метод. Наступний метод позбавлений цього недоліку. Він полягає у заміні початкової тріщини еліпсом, подібним до контуру тріщини (Рис.3). Більшу вісь еліпса обираємо як початок відліку для кута φ .

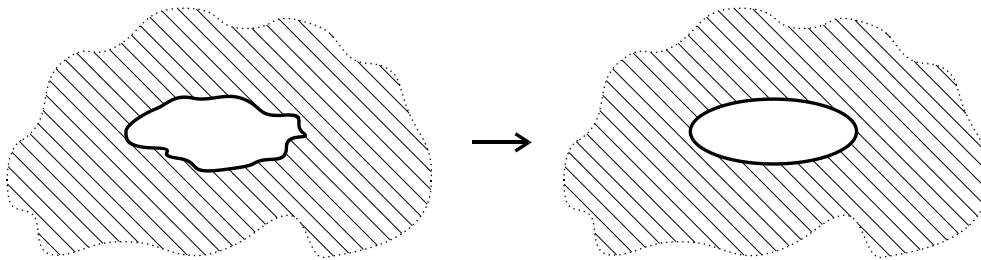


Рис. 3. Метод еліптичного моделювання

Для подальшого розв'язання потрібно зробити припущення, що *контур тріщини в процесі розвитку залишатиметься еліпсом**. Тоді ми зможемо підставивши вираз $K_I(\rho, \varphi)$ для еліпса у рівняння (1) утворити систему рівнянь всього лиш для двох точок $\rho(0, t) = a(t)$ і $\rho(\pi/2, t) = b(t)$ і розв'язати її числовими чи аналітичними методами. Проте оскільки немає точного виразу $K_I(\rho, \varphi)$ для довільного контуру тріщини саме припущення (*) довести неможливо. Зате ми можемо оцінити точність такого припущення за допомогою ресурсоемкого дискретного методу.

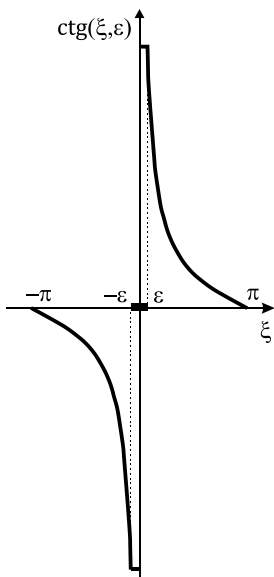
Дискретний метод. Запропонований нами метод базується на використанні наближеного коефіцієнта інтенсивності напружень для тріщини довільного контуру, що прямує до кола виведеного в роботі [3] і адаптованого до нашого випадку.

$$K_I(\rho, \varphi) = \frac{P}{\sqrt{\pi\rho}} \left(2\rho - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial\rho}{\partial\psi} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \psi}{2} d\psi \right) \quad (2)$$

Суть методу полягає в наступному. Проводимо розбиття $\varphi \rightarrow [\varphi_i]$. Підставивши значення початкового контуру тріщини $\rho(\varphi_i, 0)$ в праву частину рівняння (1) знайдемо $\left. \frac{\partial\rho(\varphi_i, t)}{\partial t} \right|_{t=0}$. В будь-який близький до t момент часу $t + \Delta t$ тріщину можна наблизити виразом:

$$\rho(\varphi_i, t + \Delta t) \approx \rho(\varphi_i, t) + \frac{\partial\rho(\varphi_i, t)}{\partial t} \cdot \Delta t. \quad (3)$$

Використовуючи (1) і (3) починаємо ітераційний цикл який моделює розвиток тріщини від початкового моменту $t=0$ до моменту коли матеріал повністю зруйнується $K_I(\varphi_i, t_*) = K_{IC}$. Зауважимо що таким чином ми можемо описати ріст будь-якої плоскої тріщини, проте для тріщин, форма яких сильно відрізняється від кола похибка коефіцієнта (2) може досить сильно вплинути на точність результатів.



Зауважимо також, котангенс у виразі (2) набуватиме в обчисленнях безмежно великих і безмежно малих значень при $\varphi - \psi \rightarrow 0$, що недопустимо для комп'ютерного обчислення. Тому ми використовуватимемо наближення тангенса, а саме:

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi - \psi}{2}, \varepsilon \right) = \begin{cases} \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \psi}{2}, & \frac{\varphi - \psi}{2} \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty) \\ \operatorname{ctg}(-\varepsilon), & \frac{\varphi - \psi}{2} \in (-\varepsilon, 0) \\ \operatorname{ctg}(\varepsilon), & \frac{\varphi - \psi}{2} \in (0, \varepsilon) \end{cases} \quad (4)$$

Рис. 4. Наближення котангенса

Постановка завдань. В роботі поставлено мету – зробити числові обчислення усіма вищезазначеними методами, порівняти отримані результати, зробити порівняльну оцінку точності наближених методів до більш точного числового а також перевірити гіпотезу про інваріантність форми початково еліптичної тріщини в процесі її розвитку.

Викладення основного матеріалу. Для перевірки критерію (*) ми обрали еліпс у якого відношення великої осі до малої рівне $\frac{1}{2}$. Оскільки нас цікавить порівняння двох методів початкові дані не мають принципового значення, тому виберемо їх як в роботі [2]:

$$a_0 = 0,002\text{м}, \quad b_0 = 0,001\text{м}, \quad P = 500\text{МПа}, \quad K_{IC} = 142\text{МПа},$$

$$\alpha_0 = 0,1, \quad A_1 = 0,25, \quad m \approx 4, \quad \varepsilon = 0,001.$$

(5)

Для застосування еліптичного методу запишемо коефіцієнт інтенсивності напружень для еліпса [4]:

$$K_I(\rho, \varphi) = \frac{P\sqrt{\pi\rho} \cdot (\sin^2\varphi + k(t) \cdot \cos^2\varphi)^{\frac{1}{4}}}{E(\sqrt{1-k(t)^2})}, \quad (6)$$

де $k(t) = \frac{b(t)}{a(t)} = \frac{\rho(0,t)}{\rho(\pi/2,t)}$ - еліптичність або коефіцієнт стиску, $E(\sqrt{1-k(t)^2})$ - еліптичний інтеграл 1 роду. Підставивши (6) в (1) запишемо наступну систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{da(t)}{dt} &= 2\alpha_0 A_1 \frac{\left(\frac{P^2 \pi b(t)^2 / a(t)}{E(\sqrt{1-b(t)^2/a(t)^2})^2 K_{IC}^2} \right)^m}{1 - \frac{P^2 \pi b(t)^2 / a(t)}{E(\sqrt{1-b(t)^2/a(t)^2})^2 K_{IC}^2}}; \\ \frac{db(t)}{dt} &= 2\alpha_0 A_1 \frac{\left(\frac{P^2 \pi b(t)}{E(\sqrt{1-b(t)^2/a(t)^2})^2 K_{IC}^2} \right)^m}{1 - \frac{P^2 \pi b(t)}{E(\sqrt{1-b(t)^2/a(t)^2})^2 K_{IC}^2}}; \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Використовуючи початкові умови $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$ взяті із (5) розв'яжемо цю систему в програмному середовищі Maple 15.

Програма для моделювання дискретного методу була написана на C++, з використанням (1)-(3), наближення (4) та початкової умови:

$$\rho(\varphi, 0) = \frac{a_0 b_0}{\sqrt{b_0^2 \cos^2(\varphi) + a_0^2 \sin^2(\varphi)}} \quad (8)$$

Порівняльні результати обчислень представлені на Рис.5

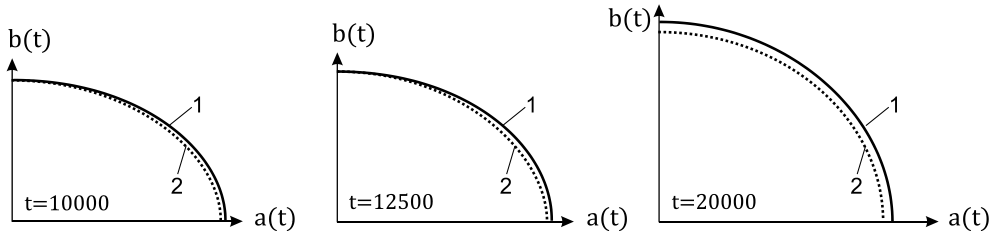


Рис. 5. Результати (крива 1 – дискретний метод, крива 2 – еліптичний метод.)

Аналіз отриманих результатів. Як бачимо контури тріщини для обох методів практично ідентичні. Хочеться проаналізувати декілька нюансів.

а) Найбільша відмінність між контурами при малих t зосереджена якраз у місцях де похибка коефіцієнта інтенсивності (2) найбільша. Ми не можемо сказати точно, але припускаємо що відмінність викликана саме похибкою, тим більше що при зростанні t похибка зменшується і ми бачимо як форми контурів стають все більш ідентичними, а при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ коли похибка коефіцієнта (2) менше 0,2% контури тріщини збігаються.

б) Невелике відставання дискретного методу від еліптичного пояснюється своєрідністю наближення (3). Справа в тому, що для опуклих вниз функцій $\frac{\partial^2 \rho(\varphi, t)}{\partial t^2} > 0$ дане наближення занижує значення функції із зростанням t . Відставання зменшується при зменшенні Δt проте це суттєво збільшує час обчислення.

с) Можна з доволі високою точністю сказати, що форма тріщини впродовж її розвитку залишається еліпсом.

d) Довговічність при обчисленні даними методами становить $t_*^1 = 31617$ год і $t_*^2 = 33441$ год для еліптичного і дискретного методу відповідно. Різниця склала всього 5,7%.

Висновки. При розв'язування складних задач механіки руйнування ми часто жертвуємо точністю заради простоти обчислення, мотивуючи це тим, що для інженерної практики цього достатньо, однак це не завжди правильно. Метод еліптичного моделювання тріщини дає точніші результати для більшості тріщин ніж метод еквівалентних площ при не набагато більших обчислювальних затратах. Аналіз припущення яке ми робимо для цього методу показав що він дуже точно описує реальну поведінку еліптичної тріщини. Натомість дискретний метод обчислення є найбільш універсальним із запропонованих методів. Він потребує серйозних обчислювальних ресурсів проте здатний якнайкраще показати якісну і кількісну картину розвитку плоскої тріщини в тілі. Наші обчислення дискретним методом зайняли близько 3 годин, еліптичним кілька секунд. Тому, хоча темпи розвитку обчислювальної техніки та її доступність на ринку свідчать, що майбутнє за дискретними методами обчислення, проте в даний момент метод еліптичного моделювання тріщини є найкращим методом розв'язування типових прикладних інженерних задач.

Список використаних джерел:

1. Андрейків А.Е., Дарчук А.И. Усталостное разрушение и долговечность конструкций. Киев, 1992. 184 с.
2. Андрейків О.Є., Сас Н.Б. Докритичний ріст плоскої тріщини в тривимірному тілі за високотемпературної повзучості. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2008. №2. С. 19-26.
3. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Київ, 1991. 416 с.
4. Murakami Y (Ed.). Stress Intensity Factors Handbook: in 2 vol. Oxford, 2001. 1456 pp.

Рецензенти:

Андрейків О.Є., член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор.

Долінська І.Я., в.о. старшого наукового співробітника ФМІ ім. Г.В. Карпенка НАН України, канд. фіз-мат наук.

Стаття надійшла до редакції 27.12.2018