

УДК 539.3

**В.М. Неміш, К.М. Березька***Тернопільський національний економічний університет***РОЗТЯГ-СТИСК ІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА З НЕКАНОНІЧНИМИ ПОРОЖНИНАМИ**

*Проведено дослідження напруженого стану ізотропного середовища з неканонічними порожнинами у вигляді правильних шестикутників обертання з заокругленими кутами. Одержані аналітичні та числові результати для нормальних напружень як на поверхнях порожнин, так і в їх околах. Локальність поля напружень показано в точках з найменшим радіусом кривизни. Дослідження концентрації напружень проводились наближеним методом збурення форми границі.*

*Ключові слова:* напруження, ізотропне середовище, неканонічні порожнини, метод збурення форми границі, поліноми Лежандра, коефіцієнт Пуассона.

*Рис. 5. Форм. 19. Літ. 8.*

**В.Н. Неміш, Е.Н. Березская****РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С НЕКАНОНИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ**

*Проведено исследование напряженного состояния изотропной среды с неканоническими полостями в виде правильных шестиугольников вращения с скругленными углами. Получены аналитические и числовые результаты для нормальных напряжений как на поверхностях полостей, так и в их окрестностях. Локальность поля напряжений показано в точках с наименьшим радиусом кривизны. Исследование концентрации напряжений проводилось приближенным методом возмущения формы границы.*

*Ключевые слова:* напряжение, изотропная среда, неканонические полости, метод возмущения формы границы, полиномы Лежандра, коэффициент Пуассона.

**V.N. Nemish, K.M. Berezka****STRETCHING-COMPRESSION OF THE ISOTROPIC MEDIUM WITH NON-CANONICAL COCAVITIES**

*The stress state of an isotropic medium with non canonical cocavities in the form of regular hexagons rotation with rounded corners is studied. Analytical and numerical results for normal stresses both on the surfaces of the cocavities and in their vicinity are obtained. The locality of the stress field is shown at points with the smallest radius of curvature. The stress concentration is studied by boundary shape perturbation method.*

*Keywords:* stress state, isotropic medium, non-canonical cocavities, boundary shape perturbation method, Legendre polynomials, Poisson's ratio ratio.

**Постановка проблеми.** Дослідження напруженого стану трьохмірних деформівних тіл є однією із нелегких просторових задач математичної теорії пружності. Більшість точних розв'язків таких граничних задач одержано методом відокремлення змінних та його різними розгалуженнями: метод інтегральних перетворень, метод власних векторних функцій, метод однорідних розв'язків та ін. Розглядаючи задачі, в яких точні розв'язки одержати неможливо, виникає потреба в розробці наближених методів. До таких класів відносяться просторові крайові задачі математичної теорії пружності про дослідження концентрації напружень для неканонічних областей.

**Аналіз останніх досліджень.** Найбільш ефективним наближеним методом розв'язування конкретних просторових крайових задач про напружений стан деформівних тіл з різними граничними поверхнями є варіант методу збурення форми границі розробленого і апробованого в навчальному посібнику О. М. Гузя і Ю. М. Неміша [1]. В статтях [2, 3] наближений метод використовується при розв'язуванні крайових задач математичної теорії пружності для фігур, близьких до еліпсоїда обертання. В працях [4, 5, 6] проведено дослідження напруженого стану однорідного ізотропного середовища з замкнутими конічною та циліндричними порожнинами і включеннями. Розподіл максимальних напружень показано як на поверхнях, так і в їх околах. Напружений стан ізотропного середовища з включеннями у формі правильних шестикутників обертання з заокругленими кутами розглянуто в роботі [7].

**Мета роботи.** Дослідити напружений стан однорідного ізотропного середовища з неканонічними порожнинами у вигляді правильних шестикутників обертання з заокругленими кутами при всесторонньому розтязі-стиску.

**Постановка завдань.** Розглядається пружне однорідне ізотропне середовище ослаблене неканонічними порожнинами у вигляді правильних шестикутників обертання з заокругленими

кутами. Напружено-деформівний стан досліджується наближеним методом збурення форми границі.

**Викладення основного матеріалу.** Нехай деяка поверхня  $S$  утворена обертанням гіпотрохідної кривої  $\Gamma$  навколо вісі  $oz$ . В довільній меридіональній площині  $zo$   $R$  функція

$$z + iR = r_0^{-1} \omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon \zeta^{-k} \quad (\zeta = \rho^{i\gamma}) \quad (1)$$

конформно відображає зовнішність одиничного круга площини  $\zeta$  на зовнішність контура  $\Gamma$ . Лінійна величина  $r_0$  характеризує абсолютні розміри контура  $\Gamma$ . Значенням  $k=5$ ,  $\varepsilon = \pm \frac{1}{15}$  відповідають правильні шестикутники з заокругленими кутами, параметричні рівняння яких мають вигляд

$$\begin{aligned} z = r_0^{-1} \operatorname{Re} \omega(\zeta) \Big|_{\rho=1} &= \cos \gamma + \varepsilon \cos 5\gamma, \\ R = r_0^{-1} \operatorname{Im} \omega(\zeta) \Big|_{\rho=1} &= \sin \gamma + \varepsilon \sin 5\gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $R$ - відстань від довільної точки контура порожнини  $S$ , яка відповідає координатній поверхні  $\rho = 1$ , до вісі  $oz$  ( $d_1 = 1 + |\varepsilon|, d_2 = 1 - |\varepsilon|$  відстані від центра  $O$ , до точок  $A$  і  $B$ ). Просторові фігури цих ліній показані на рис. 1, 2

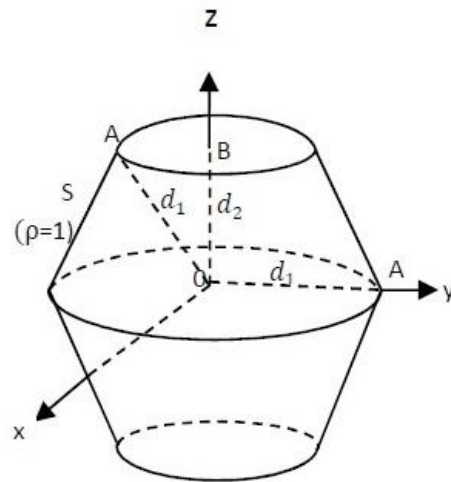
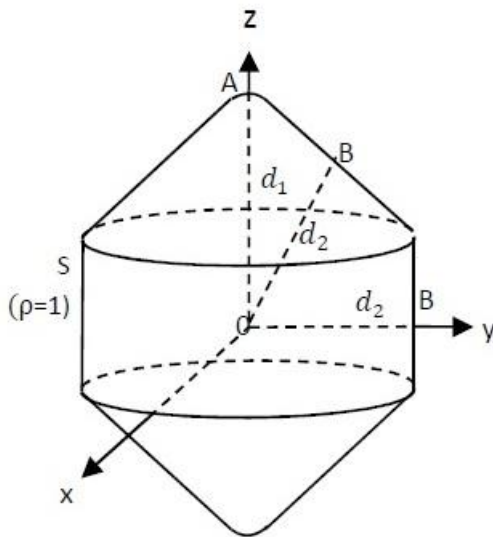


Рис. 1 Неканонічна порожнина  $k = 5, \varepsilon = \frac{1}{15}$

Рис. 2 Неканонічна порожнина  $k = 5, \varepsilon = -\frac{1}{15}$

Згідно з методом найменших квадратів представим компоненти,  $\sigma_\rho, \sigma_\gamma, \sigma_\varphi, \sigma_{\rho\gamma}$  у вигляді рядів за степенями малого параметра  $\varepsilon$ , тобто

$$\sigma_\rho = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sigma_\rho^{(j)}, \dots, \sigma_{\rho\gamma} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sigma_{\rho\gamma}^{(j)}. \quad (3)$$

Використавши формули переходу в сферичній системі координат  $r, \theta, \alpha$  до відповідних складових в криволінійній ортогональній системі координат  $\rho, \gamma, \varphi$ , розкладемо компоненти напружень в ряди вигляду (3). Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях параметра  $\varepsilon$ , одержимо для компонентів  $j$ -го наближення рекурентні співвідношення [1].

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_Q^{(j)} \\ \sigma_\gamma^{(j)} \end{array} \right\} = \sum_{m=0}^j \Lambda_1^{(j-m)} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r^{(m)} \\ \sigma_\theta^{(m)} \end{array} \right\} \pm \Lambda_2^{(j-m)} (\sigma_\theta^{(m)} - \sigma_r^{(m)}) \pm \Lambda_3^{(j-m)} \sigma_{r\theta}^{(m)}$$

$$\sigma_\varphi^{(j)} = \sum_{m=0}^j \Lambda_1^{(j-m)} \sigma_a^{(m)}; \quad (4)$$

$$\sigma_{\rho\gamma}^{(j)} = \sum_{m=0}^j \left[ \Lambda_4^{(j-m)} \sigma_{r\theta}^{(m)} + \frac{1}{2} \Lambda_3^{(j-m)} (\sigma_\theta^{(m)} - \sigma_r^{(m)}) \right]$$

Диференціальні оператори  $\Lambda_i^{(j)}$  для відображаючої функції (1) в нульовому, першому та другому наближеннях, мають вигляд

$$\Lambda_1^{(0)} = \Lambda_4^{(0)} = 1; \Lambda_2^{(0)} = \Lambda_3^{(0)} = \Lambda_2^{(1)} = 0;$$

$$\Lambda_1^{(1)} = \Lambda_4^{(1)} = \frac{\cos(k+1)\gamma}{\wp^k} \frac{\partial}{\partial \wp} - \frac{\sin(k+1)\gamma}{\wp^{k+1}} \frac{\partial}{\partial \gamma};$$

$$\Lambda_3^{(1)} = \frac{2(k+1)\sin(k+1)\gamma}{\wp^{k+1}}; \Lambda_4^{(2)} = \Lambda_1^{(2)} - 2\Lambda_2^{(2)}; \quad (5)$$

$$\Lambda_1^{(2)} = \frac{1 + \cos 2(k+1)\gamma}{4\wp^{2k}} \frac{\partial^2}{\partial \wp^2} - \frac{\sin 2(k+1)\gamma}{2\wp^{2k}} \frac{\partial^2}{\partial \wp \partial \gamma} \frac{1}{\wp} + \frac{1 - \cos 2(k+1)\gamma}{4\wp^{2k+2}} \left( \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \wp \frac{\partial}{\partial \wp} \right);$$

$$\Lambda_2^{(2)} = \frac{(k+1)^2 [1 - \cos 2(k+1)\gamma]}{2\wp^{2k+2}}; \Lambda_3^{(2)} = \frac{(k^2 - 1)\sin 2(k+1)\gamma}{\wp^{2k+2}} +$$

$$+ \frac{(k+1)^2 \sin 2(k+1)\gamma}{\wp^{2k+2}} \frac{\partial}{\partial \wp} - \frac{(k+1) [1 - \cos 2(k+1)\gamma]}{\wp^{2k+2}} \frac{\partial}{\partial \gamma} +$$

$$\frac{(k+1)^2 \sin 2(k+1)\gamma}{\wp^{2k+2}} \frac{\partial}{\partial \wp} - \frac{(k+1) [1 - \cos 2(k+1)\gamma]}{\wp^{2k+2}} \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

Компоненти  $\sigma_r^{(m)}(\rho, \gamma), \sigma_\theta^{(m)}(\rho, \gamma), \sigma_a^{(m)}(\rho, \gamma), \sigma_{r\theta}^{(m)}(\rho, \gamma)$  записуються на основі їх представлень в безрозмірних (віднесених до величини  $r_0$ ) сферичних координатах, якщо формально замінити  $r, \theta$  відповідно на  $\rho, \gamma$ , а в довільних постійних поставити індекс  $(m)$  В розглянутому випадку для зовнішньої задачі маємо

$$\sigma_r^{(m)}(\wp, \gamma) = \frac{2G}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -\frac{n(n^2 + 3n - 2\nu)}{\wp^{n+1}} C_n^{(m)} + \frac{(n+1)(n+2)}{\wp^{n+3}} D_n^{(m)} \right] P_n(\cos \gamma);$$

$$\sigma_\theta^{(m)}(\wp, \gamma) = \frac{2G}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{n(n^2 - 2n - 1 + 2\nu)}{\wp^{n+1}} C_n^{(m)} - \frac{(n+1)^2}{\wp^{n+3}} D_n^{(m)} \right] P_n(\cos \gamma) - \right.$$

$$\left. - \left[ \frac{-n+4-4\nu}{\wp^{n+1}} C_n^{(m)} + \frac{1}{\wp^{n+3}} D_n^{(m)} \right] \text{ctg } \gamma \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} \right\}$$

$$\sigma_a^{(m)}(\wp, \gamma) = \frac{2G}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{n(n+3-4\nu+2\nu)}{\wp^{n+1}} C_n^{(m)} - \frac{n+1}{\wp^{n+3}} D_n^{(m)} \right] P_n(\cos \gamma) + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{-n+4-4\nu}{\wp^{n+1}} C_n^{(m)} + \frac{1}{\wp^{n+3}} D_n^{(m)} \right] \text{ctg } \gamma \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} \right\}; \quad (6)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(m)}(\rho, \gamma) = \frac{2G}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{n^2 - 2 + 2\nu}{\rho^{n+1}} C_n^{(m)} - \frac{n+2}{\rho^{n+3}} D_n^{(m)} \right] \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma}.$$

Тут  $P_n(\cos \gamma)$ - поліноми Лежандра;  $C_n^{(m)}$ ,  $D_n^{(m)}$ - довільні постійні, які знаходяться із граничних умов;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $G$  – модуль зсуву.

Для кожного конкретного значення  $n$  компоненти  $\sigma_{\theta}^{(m)}(\rho, \gamma), \sigma_a^{(m)}(\rho, \gamma)$  піввідношень (6) можуть бути представлені розкладом тільки за поліномами Лежандра  $P_n(\cos \gamma)$ . Для цього використаємо формулу

$$\operatorname{ctg} \gamma \frac{dP_n}{d\gamma} = -nP_n - (2n-3)P_{n-2} - (2n-7)P_{n-4} - (2n-11)P_{n-6} - P'_{n-7} \quad (7)$$

яка впливає із рекурентних співвідношень [8]

$$nP_n - \cos \gamma P'_n + P'_{n-1} = 0; P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n, \quad (8)$$

Тут штрихом позначена похідна по  $\cos \gamma$ .

Припустимо, що однорідне ізотропне середовище з неканонічними порожнинами обертання у вигляді замкнутих правильних шестикутників обертання з заокругленими кутами (рис. 1, 2) знаходиться «на нескінченності» під дією рівномірних всесторонніх сил інтенсивності  $p$  ( значення  $p > 0$  відповідає розтягу, а  $p < 0$  – стиску)

$$\sigma_x^{(\infty)} = \sigma_y^{(\infty)} = \sigma_z^{(\infty)} = p(\sigma_x^{(\infty)} = \sigma_y^{(\infty)} = \sigma_z^{(\infty)} = 0). \quad (9)$$

Граничні умови в довільному наближенні на вільних від напружень поверхнях розглянутих порожнин ( $\rho=1$ ) будуть

$$(\hat{\sigma}_{\rho}^{(j)} + \sigma_{\rho}^{(j)})_{\rho=1} = 0; (\hat{\sigma}_{\rho\gamma}^{(j)} + \sigma_{\rho\gamma}^{(j)})_{\rho=1} = 0. \quad (10)$$

Тут  $\hat{\sigma}_{\rho}^{(j)}, \hat{\sigma}_{\rho\gamma}^{(j)}$  – відомі величини основного напруженого стану середовища (без порожнин).

Із співвідношень (4) – (6) і крайових умов (10) одержимо

$$\frac{2G}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -n(n^2 + 3n - 2\nu)C_n^{(m)} + (n+1)(n+2)D_n^{(m)} \right] P_n(\cos \gamma) = \Phi^{(m)}(\nu, \gamma);$$

$$\frac{2G}{r_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n^2 - 2 + 2\nu)C_n^{(m)} - (n+2)D_n^{(m)} \right] \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} = \Psi^{(m)}(\nu, \gamma), \quad (11)$$

де  $\Phi^{(m)}(\nu, \gamma), \Psi^{(m)}(\nu, \gamma)$  – відомі функції, які можуть бути представлені у вигляді

$$\Phi^{(m)}(\nu, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)}(\nu) P_n(\cos \gamma); \Psi^{(m)}(\nu, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(m)}(\nu) \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma}. \quad (12)$$

Коефіцієнти  $a_n^{(m)}(\nu), b_n^{(m)}(\nu)$  знаходяться за формулами:

$$a_n^{(m)}(\nu) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \Phi^{(m)}(\nu, \gamma) P_n(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma; \quad (13)$$

$$b_n^{(m)}(\nu) = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^{\pi} \Psi^{(m)}(\nu, \gamma) \frac{dP_n(\cos \gamma)}{d\gamma} \sin \gamma d\gamma;$$

Замітимо, що функції  $\Phi^{(m)}(\nu, \gamma)$  містять добутки  $\cos k\gamma P_n(\cos \gamma)$ ,  $\sin k\gamma \frac{d P_n(\cos \gamma)}{d\gamma}$ ,  $\cos k\gamma \frac{d^2 P_n(\cos \gamma)}{d\gamma^2}$ , а функції  $\Psi^{(m)}(\nu, \gamma)$  вирази  $\sin k\gamma P_n(\cos \gamma)$ ,  $\sin k\gamma \frac{d^2 P_n(\cos \gamma)}{d\gamma^2}$ ,  $\cos k\gamma \frac{d^2 P_n(\cos \gamma)}{d\gamma^2}$ . Значить, для одержання представлень (12) потрібно попередньо використати розклади тільки за поліномами Лежандра або їх похідних, використавши співвідношення (7) і (8).

Підставивши вирази (12) у рівняння (11) після прирівнювання коефіцієнтів при однакових поліномах Лежандра і їх похідних, одержимо систему рівнянь, із якої знаходимо

$$C_n^{(m)} = -\frac{a_n^{(m)}(\nu) + (n+1)b_n^{(m)}(\nu)}{2}; D_0^{(m)} = \frac{a_0^{(m)}}{2}; \quad (14)$$

$$D_n^{(m)} = \frac{1}{n+2} \left[ (n^2 - 2 + 2\nu)C_n^{(m)} - \frac{r_0^2}{2G} b_n^{(m)}(\nu) \right] (n \geq 1).$$

Таким чином, вихідна гранична задача математичної теорії пружності для неканонічних поверхонь формально звелась до послідовності крайових задач для сферичних поверхонь.

Якщо розглянуті неканонічні порожнини вільні від напружень, то згідно з граничними умовами (10) одержимо

$$\hat{\sigma}_\rho^{(0)} = \hat{\sigma}_\gamma^{(0)} = \hat{\sigma}_\varphi^{(0)} = p; \hat{\sigma}_{\rho'}^{(0)} = 0; \hat{\sigma}_\rho^{(j)} = \hat{\sigma}_\gamma^{(j)} = \hat{\sigma}_\varphi^{(j)} = \hat{\sigma}_{\rho'}^{(j)} = 0 (j \geq 1). \quad (15)$$

Для напружень, з врахуванням  $j$  наближень, маємо вирази [1]

$$\sigma_i^{*(j)} = \sigma_i^{*(j-1)} + \varepsilon^j \sigma_i^{(j)} (i = \rho, \gamma, \varphi). \quad (16)$$

Тут  $\sigma_i^{*(0)} = \hat{\sigma}_i^{(0)} + \sigma_i^{(0)}$ , зокрема

$$\frac{\sigma_\rho^{*(0)}}{p} = 1 - \frac{1}{\rho^3}; \frac{\sigma_\gamma^{*(0)}}{p} = \frac{\sigma_\varphi^{*(0)}}{p} = 1 + \frac{1}{2\rho^3}; \frac{\sigma_{\rho'}^{*(0)}}{p} = 0. \quad (17)$$

Компоненти (17) відповідають точному розв'язку задачі для ізотропного середовища зі сферичною порожниною, зокрема на її поверхні коефіцієнти концентрації напружень рівні

$$\frac{\sigma_\gamma^{*(0)}}{p} \Big|_{\rho=1} = \frac{\sigma_\varphi^{*(0)}}{p} \Big|_{\rho=1} = 1,5. \quad (18)$$

При знаходженні компонентів напружень в наступних наближеннях задача значно ускладнюється. Аналітична структура для нормальних напружень, згідно з формулою (16) при  $\nu = 0,3$ , така :

$$\frac{\sigma_i^{*(2)}}{p} \Big|_{\substack{\rho=1 \\ \varepsilon=\pm\frac{1}{15}}} = \sum_{t=0}^6 a_{2t}(\nu) P_{2t}(\cos \gamma); \frac{\sigma_i^{*(2)}}{p} \Big|_{\substack{\gamma=0 \\ \varepsilon=\frac{1}{15}}} = 1 + \sum_{t=0}^6 b_{2t}(\nu) \rho^{-2t-3}, \quad (19)$$

де  $a_{2t}(\nu), b_{2t}(\nu)$  – відомі вирази. Аналогічний вигляд мають напруження  $\frac{\sigma_i^{*(2)}}{p}$  при

$$\gamma = \frac{\pi}{3} (\varepsilon = \frac{1}{15}); \gamma = \frac{\pi}{6} (\varepsilon = -\frac{1}{15}); \gamma = \frac{\pi}{2} (\varepsilon = -\frac{1}{15}).$$

Розподіл напружень вздовж четверті меридіальних перерізів неканонічних порожнин у вигляді правильних шестикутників обертання з заокругленими кутами показані на рис. 3 ( $\nu = 0,3$ ;  $\varepsilon = \frac{1}{15}$ ) і рис. 4 ( $\nu = 0,3$ ;  $\varepsilon = -\frac{1}{15}$ ). Штрихові лінії відповідають компонентам напруженого стану в кульовому, а суцільні – в другому наближеннях.

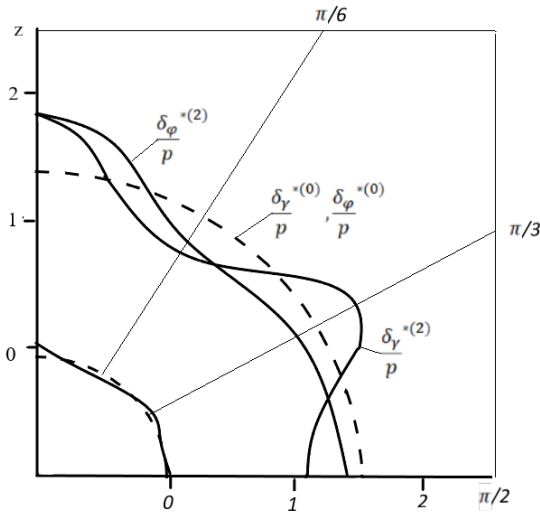


Рис. 3. Розподіл напружень вздовж чверті меридіонального перерізу порожнини ( $k=5$ ;  $\varepsilon=1/15$ ).

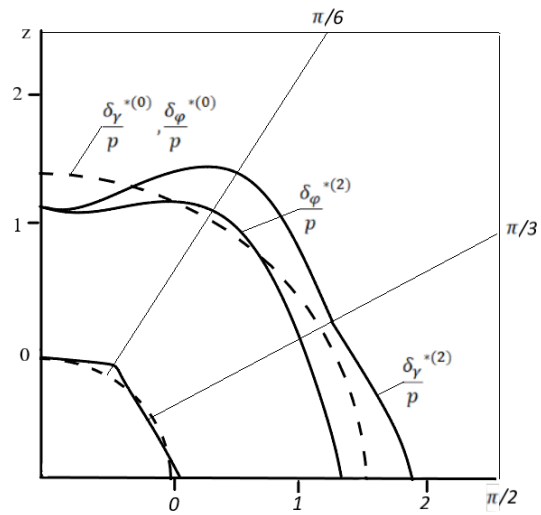


Рис. 4. Розподіл напружень вздовж чверті меридіонального перерізу порожнини ( $k=5$ ;  $\varepsilon=-1/15$ ).

Криві на рис. 5 побудовані для  $\gamma = \frac{\pi}{6}$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\varepsilon = -\frac{1}{15}$  (штрихова лінія відповідає напруженням  $\frac{\sigma_\gamma^{*(2)}}{p}, \frac{\sigma_\phi^{*(2)}}{p}$  при  $\gamma = 0$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\varepsilon = \frac{1}{15}$ ). Графіки показують, що при незначній відстані від поверхні порожнин концентрація напружень різко зменшується. Так, максимальне значення відносних відхилень  $\frac{|\sigma_l^{*(2)} - \hat{\sigma}_l|}{\hat{\sigma}_l} \cdot 100\%$  ( $l = \gamma, \phi$ ), тобто нормальних напружень від відповідних значень для середовища без порожнини, не перевищує 5,8% при  $\rho = 2$  і 1,7% при  $\rho = 3$ . Характер зміни напружень при  $\gamma = \frac{\pi}{3}, \varepsilon = \frac{1}{15}$  і  $\gamma = \frac{\pi}{2}, \varepsilon = -\frac{1}{15}$  – аналогічний.

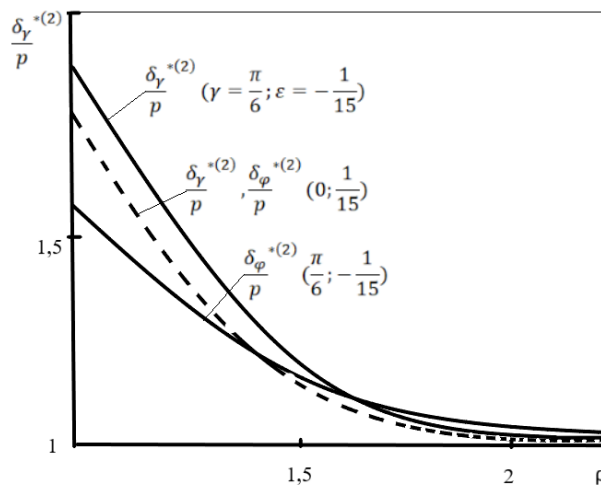


Рис. 5. Розподіл напружень в околі неканонічних порожнин

**Висновки.** 1. Коефіцієнти концентрації максимальних напружень на розглянутих неканонічних порожнинах в точках з найменшим радіусом кривизни суттєво відрізняються від відповідних значень у випадку сферичних граничних поверхонь.

2. Напружений стан в околі порожнин носить локальний характер, тобто при незначному віддаленні від поверхні максимальні напруження різко падають і наближаються до відповідних значень в деформівному середовищі без концентраторів напружень.

**Список використаних джерел:**

1. Гузь А. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1982. – 352с.
2. Подільчук Ю. Н. Приближенный метод решения краевых задач теории упругости для фигур, близких к эллипсоиду вращения / Ю. Н. Подільчук // Прикладная механика. – 1970.- Т.VI. - №9. – С. 23-30.
3. Подільчук Ю. М. Про наближений метод розв'язування крайових задач теорії пружності для фігур, близьких до еліпсоїда обертання / Ю. М. Подільчук, А. М. Кириченко // ДАН УРСР. – 1970. – Серія А. - №7. – С. 650-655.
4. Немиш Ю. Н. Распределение напряжений около неканонических поверхностей / Ю. Н. Немиш, В. Н. Немиш, П. Ф. Ярема // Прикладная механика. – 1971. – Т.7. - №12. – С. 41-50.
5. Немиш В. Н. Пространственная деформация изотропной среды с неканоническими включениями / В. Н. Немиш // Математическая физика. – 1976. - №19. – С. 104-109.
6. Неміш В. М. Напружений стан ізотропного середовища з неканонічними поверхностями // Міжнародна наукова конференція. Шості Боголюбовські читання. Чернівці, 26-30 серпня 2003 р. Матеріали конф. – Київ, 2003. – С. 159.
7. Неміш В. М., Березька К. М. Напружений стан ізотропного середовища з неканонічними включеннями // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». – ЛНТУ. – Вип. № 62. – Луцьк, 2018. – С. 169-174.
8. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций / Гобсон Е. В. – М., ИЛ, 1952. – 476 с.

**Рецензенти:**

**Добротвор Ігор Григорович**, професор кафедри економічної кібернетики Тернопільського національного економічного університету, доктор технічних наук, професор.

**Гром'як Роман Сильвестрович**, доцент кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Стаття надійшла до редакції 12.02.2019