УДК 624. 132.3.001.24

Ю.О. Гуменюк[1], Ю.В. Човнюк[1], Г.А. Герасимчук[2]
[1]Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ
[2]Луцький національний технічний університет, м. Луцьк

МЕТОД ПОШУКУ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ В ДОСЛІДЖЕННЯХ ДИНАМІКИ РУХУ ҐРУНТІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

У статті запропонована методика пошуку розв'язку задачі Коші квазілінійних рівнянь у виді формальних степеневих рядів за однією змінною з коефіцієнтами, залежними від іншої змінної. Формальні ряди збігаються до істинних розв'язків задачі Коші. Оскільки квазілінійні рівняння є деякими наближеннями нелінійних диференціальних рівнянь, що описують реальні процеси руху ґрунту сільськогосподарського призначення, то у даній роботі розглянуте питання про пошук розв'язків задачі Коші у вигляді вказаних вище формальних степеневих рядів для нелінійних рівнянь спеціального виду у частинних похідних першого порядку і вище. Такі рівняння охоплюють широкий клас диференціальних рівнянь математичної фізики. Реалізація єдиного підходу, запропонованого у даній роботі, дає можливість отримувати розв'язки для найбільш типових – нелінійних тематичних моделей руху ґрунтів сільськогосподарського призначення.

Ключові слова: *дослідження, динаміка, рух, ґрунти сільськогосподарського призначення, нелінійні моделі, квазілінійні рівняння, метод пошуку, розв'язки задачі Коші.*

Ю.О. Гуменюк, Ю.В. Човнюк, Г.А. Герасимчук

МЕТОД ПОИСКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО НАЗНАЧЕНИЯ

В статье предложенная методика поиска решения задачи Коши квазилинейных уравнений в виде формальных степенных рядов по одной переменной с коэффициентами, зависящими от другой переменной. Формальные ряды совпадают к истинным решений задачи Коши. Поскольку квазилинейные уравнения являются некоторыми приближениями нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих реальные процессы движения почвы сельскохозяйственного назначения, то в данной работе рассмотрен вопрос о поиске решений задачи Коши в виде указанных выше формальных степенных рядов для нелинейных уравнений специального вида в частных производных первого порядка и выше. Такие уравнения охватывают широкий класс дифференциальных уравнений математической физики. Реализация единого подхода, предложенного в данной работе, дает возможность получать решения для наиболее типичных – нелинейных тематических моделей движения почв сельскохозяйственного назначения.

Ключевые слова: *исследования, динамика, движение, почвы сельскохозяйственного назначения, нелинейные модели, квазилинейный уравнения, метод поиска, решения задачи Коши.*

Yu. Humenyuk, Yu. Chovnyuk, H. Herasymchuk

THE METHOD OF SEARCH OF SOLUTIONS TO THE PROBLEM OF QUASILINEAL EQUATIONS COURSES IN RESEARCHES OF DYNAMICS OF SOURCES OF AGRICULTURAL PURPOSES

In the article, the proposed method of finding a solution to the Cauchy problem of quasilinear equations in the form of formal power series in one variable with coefficients depending on another variable. Usually give examples where the formal series coincides with the true solutions of the Cauchy problem. But the quasilinear equations are some approximations of nonlinear differential equations that describe the real processes of soil motion, then questions arise to find solutions to Cauchy's problems in the form of the above-described formal power series for nonlinear equations of the special form in partial derivatives of the first-order and higher order, typical for simulation the movement of agricultural soils within the limits of nonlinear approximations of deformation processes of such soils.

Keywords**:** *research, dynamics, motion, agricultural soils, nonlinear models, quasilinear equations, search method, solutions of the Cauchy problem.*

Постановка проблеми. Значна увага, що приділяється останніми роками проблемі охорони родючості та призупинення деградації ґрунтів, пов‘язана із стурбованістю суспільства станом довкілля та усвідомленням ролі ґрунтового покриву в забезпеченні екологічної та продовольчої безпеки будь-якої держави. Адже, грунтовий покрив є одним з основних компонентів довкілля, що виконує життєво важливі біосферні функції. Ґрунтовий і рослинний покрив у природі утворюють єдину систему. Втрата ґрунтом родючості, його деградація позбавляють рослини екологічних основ їхнього існування. Грунти є основним джерелом виробництва сільськогосподарської продукції.

Відповідно однією з найбільш актуальних проблем сучасної науки є системне дослідження природних процесів, прогнозування та комплексна оцінка змін у навколишньому середовищі під дією антропогенного навантаження, а результати таких досліджень, зокрема дослідження динаміки руху ґрунту сільськогосподарського призначення, мають стати науково обґрунтованою основою для вирішення актуальних проблем сталого розвитку і продуктивності сільського господарства.

При досліджені динаміки руху ґрунту сільськогосподарського призначення (ГСП)зазвичай ставлять задачу про знаходження розв'язків квазілінійних рівнянь, які є лінійними за своїми старшими похідними, і, по суті, належать до рівнянь з частинними похідними першого та другого порядків. Можна здійснювати пошук розв'язків задачі Коші таких рівнянь у виді формальних степеневих рядів за однією змінною з коефіцієнтами, залежними від їхньої змінної. Зазвичай приводять приклади, коли формальні ряди збігаються до істинних розв'язків задачі Коші. Але квазілінійні рівняння є, взагалі кажучи, деякими наближеннями нелінійних диференціальних рівнянь, що описують реальні процеси руху ГСП, тоді виникає питання пошуку розв'язків задач Коші у вигляді саме вказаних вище формальних степеневих рядів для нелінійних рівнянь спеціального виду у частинних похідних першого порядку і вище, типових для моделювання руху ГСП в межах нелінійних апроксимацій процесів деформування таких ґрунтів.

Аналіз публікацій за темою дослідження.

Динаміка руйнування ґрунту робочими органами землерийних машин розглянута у [1], аналіз руху ґрунту, який обробляється дорожньо-будівельними машинами проведений у [2]. Автори [3, 4] запропонували методи аналізу моделей процесу взаємодії робочих органів дорожніх машин з ґрунтом. У [5] досліджені розв'язки математичних моделей динаміки ґрунтів. Автор [6] запропонував розв'язки скалярного рівняння з векторним параметром, що моделює процеси нелінійного деформування ґрунтів. Проте ніхто з дослідників нелінійної динаміки ґрунтів не досліджує ґрунти сільськогосподарського призначення (ГСП) і, відповідно, задача Коші для таких ґрунтів у нелінійній постановці не розв’язана.

Мета роботи полягає у знаходженні розв’язків задачі Коші у вигляді формальних степеневих рядів для нелінійних рівнянь спеціального типу у частинних похідних першого і вищих порядків, що адекватно описують рух ГСП в межах нелінійних динамічних моделей.

Виклад основного змісту дослідження.

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння у частинних похідних:

$$F\left(\partial^k v/\partial x^k,\ \partial^k v/\partial t^k,\ v\right) = 0; x \in [0,\ a]; t \in [0, \infty); k = 1, 2\ ..., \qquad (1)$$

з початковими умовами:

$$v(0,\ t) = v_0(t); \partial v(0,\ t)/\partial x = v_1(t), \ldots, \partial v^{k-1}(0,\ t)/\partial x^{k-1} = v_{k-1}(t),$$

де F – аналітична функція у точці $(0, 0, 0)$й $F(0, 0, 0) = 0$.

Для розв’язку цієї задачі запишемо скалярне рівняння:

$$F(z, u, w) = 0, \qquad (2)$$

Отримане з формули (1) заміною відповідних частинних похідних й невідомої функції на змінні z, u, w.

Тепер можемо сформулювати твердження: нехай рівняння (2) має розв'язок $z = z(u, w)$, тоді задача Коші для диференціального рівняння (1) може мати розв'язок у виді формального степеневого ряду:

$$v(x,\ t) = v_0(t) + v_1(t)x + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} v_{k-1}(t)x^{k-1} + v_k(t)x^k + \cdots \qquad (3)$$

Справедливість цього твердження випливає з того, що, згідно умови, з рівняння (1) можна виразити похідну порядку *k* по змінній *x*, тобто отримати рівність:

$$\partial^k v/\partial x^k = z\left(\partial^k v/\partial t^k,\ v\right).$$

Підставляючи у останню рівність ряд (3), матимемо вираз:

$$(k!)v_k(t) + [(k+1)!]v_{k+1}(t)x + \cdots = z\left\{v_0^{(k)}(t) + \cdots,\ v_0(t) + v_1(t)\,x + \cdots\right\}.$$

Припустимо, що функцію *z* можна подати у вигляді степеневого ряду за степенями *x*:

$$z = z_0(t) + z_1(t)x + \cdots + z_{k-1}(t)x^{k-1} + z_k(t)x^k + \cdots$$

Тоді, якщо $z_0(t)$ не залежить від$v_k(t)$, $v_{k+1}(t)$,…, а $z_1(t)$ не залежить від$v_{k+1}(t)$,$v_{k+2}(t)$ тоді процес знаходження $v_k(t)$, $v_{k+1}(t)$ однозначний після прирівнювання коефіцієнтів при однакових степеняхx. Достатні умови такого представлення функції *z* будуть вказані нижче.

Розглянемо конкретний приклад.

Приклад. Нехай необхідно розв’язати задачу Коші для рівняння:

$$(\partial^2 v/\partial x^2)^n + (\partial^2 v/\partial t^2)^n - 2v^2 = 0 \qquad (4)$$

з початковими умовами:

$$v(0,t) = \partial v(0,t)/\partial x = \exp(t). \tag{5}$$

Підставляючи ряд $v(x,t) = e^t + e^t x + v_2(t)x^2 + v_3(t)x^3 + \cdots$ у рівняння (4) й, прирівнюючи до нуля коефіцієнти при однакових степенях *x*, матимемо:

$$v_2(t) = e^t/2!,\ v_3(t) = e^t/3!, \ldots\ v_{n+1}(t) = e^t/(n+1)!. \ .$$

Таким чином, маємо степеневий ряд, котрий збігається до істинного розв'язку задачі Коші для рівняння (4):

$$v(x,t) = \exp(t + x). \tag{6}$$

Перейдемо далі до достатньої ознаки існування формальних розв'язків рівняння (1). Відомо [6], що якщо скалярне рівняння (2) при $u = 0$ (чи $w = 0$) має простий розв'язок $z = z(w)$(чи$z = z(u)$), тоді рівняння (2) має розв'язок у вигляді степеневого ряду, у якому наявні, взагалі кажучи, дробові додатні та від'ємні степені *w* (чи *u*), й натуральні степені *u* (чи *w*). У обох цих випадках задача Коші для диференціального рівня (1) має формальний розв'язок розглядуваного виду.

Слід зазначити, що скалярне рівняння (2) для диференціального рівняння (4) можна записати у вигляді:

$$z^n + u^n - 2w^n = 0,$$

і при $u = 0$воно має простий розв'язок:

$$z = \sqrt[n]{2}w.$$

Таким чином, задача Коші для диференціального рівняння (4) має за будь-яких початкових умов формальний розв'язок.

Зокрема, якщо $v(0,t) = \partial v(0,t)/\partial\, x = e^t$, тоді матимемо розв'язок (6).

Повернемось тепер до рівняння, яке аналізують автори робіт [1, 5]:

$$\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{7}$$

котре описує рух ґрунту між переднім зрізом проникаючого тіла й границею ударної хвилі. Таке рівняння можна застосувати для розгляду процесу взаємодії ґрунтообробного робочого органу (культиваторної лапи) з оброблюваним ґрунтом. У (7) *x* – просторова координата; *t* – час; p, γ, v – тиск, щільність та швидкість частинок ґрунту.

Якщо $\gamma = const$, а величину, котра стоїть у правій частині рівняння (7), $-\frac{\partial p}{\partial x}$, можна подати рядом:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \sum_{i+j+k>1}^{\infty} a_{ijk}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^i \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^j v^k, \tag{8}$$

тоді рівняння (7) є частинним випадком рівняння (1).

Висновки

1. Запропонований метод пошуку розв'язків задачі Коші рівняння для дослідження динаміки руху ГСП в межах його нелінійної моделі. Цей розв'язок розшукується у вигляді збіжного степеневого ряду, котрий описує процес взаємодії робочого органу ґрунтообробної машини з ГСП, і є, по суті, точним аналітичним рішенням квазілінійного диференціального рівняння у частинних похідних (по просторовій – *x* та часовій – *t* координатах) першого та вищих порядків.

2. Отримані у роботі результати можуть у подальшому бути використані для уточнення й удосконалення існуючих інженерних методів розрахунку параметрів робочих органів ґрунтообробних машин, взаємодіючих з ГСП, як на стадіях їх проектування й конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

Список використаних джерел:

1. Завьялов А.М. Динамика разрушения грунта рабочими органами землеройных машин/ А.М. Завьялов, В.А. Громов //Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1986. - №10. – С.116 – 119.

2. Громов В.А. Анализ движения грунта, разрабатываемого дорожно-строительными машинами/В.А. Громов, А.М. Завьялов//Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1987. - №12. – С.98 – 100.

3. Завьялов А.М. Методы анализа моделей процесса взаимодействия рабочих органов дорожных машин с грунтом А.М. Завьялов, В.А. Громов. – Деп. в ЦНИИТЭ строймаш. - №87. – сд. 1989. – 79с.

4. Громов В.А. Об отыскании решений при одномерном движении грунта/В.А. Громов, А.М. Завьялов//Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1991. - №9. – С.106 – 108.

5. Громов В.А. О решениях математических моделей динамики грунтов /В.А. Громов, А.М. Завьялов //Известия вузов. Строительство. – 1994. - №1. – С.126 – 128.

6. Громов В.А. О некоторых решениях скалярного уравнения с векторным параметром /В.А. Громов//Сибирский математический журнал. – 1991. – Т. 32. - №5. С. 179 – 181.

Стаття надійшла до редакції 10.05.2019