

УДК 693.542

М.Г. Сур'янінов, Т.В. Маковкіна*Одеська державна академія будівництва та архітектури***АНАЛІТИЧНІ І ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ
СТАЛЕФІБРОБЕТОННИХ БАЛОК**

Досліджено вільні коливання залізобетонних та фібробетонних балок з однаковим армуванням стрижневий арматурою і різним відсотком фібрового армування. Для експериментальних досліджень розроблений стенд, тестування якого виконано на металевій двотавровій балці і показало незначне розходження спектра частот з його теоретичним значенням. При випробуваннях залізобетонних та фібробетонних балок ця розбіжність виявилася вельми істотною. Аналітичні значення частот були визначені трьома способами — за алгоритмом ЧА МГЕ, за аналітичними формулами і методом скінченних елементів у програмі ANSYS. У всіх аналітичних розрахунках враховувалася наявність стрижневий арматури шляхом обчислення наведеного моменту інерції поперечного перерізу. Стверджується, що впливає на відхилення аналітичних і експериментальних результатів некоректна динамічна модель армованої балки, яка на сьогоднішній день є загальноприйнятною, але не дозволяє якісно і кількісно виявити всі чинники, що впливають на спектр власних частот коливань залізобетонних та фібробетонних балок.

Ключові слова: балка, вільні коливання, спектр частот, експеримент, метод граничних елементів, залізобетон, фібробетон.

Н.Г. Сурьянинов, Т.В. Маковкина*Одесская государственная академия строительства и архитектуры***АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОБОДНЫХ
КОЛЕБАНИЙ СТАЛЕФИБРОБЕТОННЫХ БАЛОК**

Исследованы свободные колебания железобетонных и фибробетонных балок с одинаковым армированием стержневой арматурой и разным процентом фибрового армирования. Для экспериментальных исследований разработан стенд, тестирование которого выполнено на металлической двутавровой балке и показало незначительное расхождение спектра частот с его теоретическим значением. При испытаниях железобетонных и фибробетонных балок это расхождение оказалось весьма существенным. Аналитические значения частот были определены тремя способами — по алгоритму ЧА МГЭ, по аналитическим формулам и методом конечных элементов в программе ANSYS. Во всех аналитических расчетах учитывалось наличие стержневой арматуры путем вычисления приведенного момента инерции поперечного сечения. Утверждается, что причиной расхождения аналитических и экспериментальных результатов является некорректная динамическая модель армированной балки, которая на сегодняшний день является общепринятой, но не позволяет качественно и количественно выявить всех факторы, влияющие на спектр собственных частот колебаний железобетонных и фибробетонных балок.

Ключевые слова: балка, свободные колебания, спектр частот, эксперимент, метод граничных элементов, железобетон, фибробетон.

M.H. Surianinov, T.V. Makovkina*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture***ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL RESEARCH OF FREE VIBRATIONS OF FIBER-
REINFORCED CONCRETE BEAMS**

The free oscillations of reinforced concrete and fiber-reinforced concrete beams with the same reinforcement with bar reinforcement and different percentages of fiber reinforcement were investigated. For experimental studies, a test bench was developed, which was tested on a metal I-beam and showed a slight discrepancy in the frequency spectrum with its theoretical value. When testing reinforced concrete and fiber-reinforced concrete beams, this discrepancy turned out to be very significant. The analytical values of the frequencies were determined in three ways — by the NABEM algorithm, by analytical formulas and by the finite element method in the ANSYS program. In all analytical calculations, the presence of bar reinforcement was taken into account by calculating the reduced moment of inertia of the cross section. It is argued that the reason for the discrepancy between analytical and experimental results is an incorrect dynamic model of a reinforced beam, which is generally accepted today, but does not allow to qualitatively and quantitatively reveal all factors affecting the spectrum of natural frequencies of vibrated concrete and fiber-reinforced concrete beams.

Key words: beam, free vibrations, frequency spectrum, experiment, boundary element method, reinforced concrete, fiber concrete.

Введение. Появление и широкое распространение современных инженерных компьютерных программ, основанных, как правило, на методе конечных элементов, открыло новые возможности для численного моделирования процессов деформирования конструкций в условиях статических и динамических внешних воздействий. При этом реальный материал, обладающий определенными физико-механическими свойствами, заменяется некоторой математической моделью. Получаемые

при этом результаты тем точнее, чем лучше принятая математическая модель отражает реальные свойства исходного материала конструкции.

Для использования известных моделей деформирования материалов и их упругих характеристик, а также для разработки новых математических моделей требуются экспериментальные данные о свойствах новых строительных конструкционных материалов, в частности, сталефибробетона.

Изучению поведения бетонов и других строительных материалов при динамическом нагружении посвящено большое количество работ. Однако в силу неполноты, а иногда и противоречивости результатов исследований, с одной стороны, и появления новых материалов — с другой, данная задача остаётся нерешённой. По динамике фибробетонных конструкций публикаций значительно меньше. Поэтому исследования свободных колебаний сталефибробетонных балок представляются актуальными.

Целью данной работы является аналитическое и экспериментальное определение собственных частот и форм колебаний железобетонных и сталефибробетонных балок.

Постановка проблемы. Рассмотрим алгоритм решения этих задач численно-аналитическим методом граничных элементов (ЧА МГЭ). Нужно отметить, что проблема определения частот собственных колебаний упругих систем, несмотря на многочисленность подобных исследований, продолжает оставаться актуальной задачей. Связано это с недостатками существующих методов. Так, классические методы строительной механики позволяют определять точный спектр частот собственных колебаний, но частотные уравнения этих методов содержат точки разрывов 2-го рода [1].

Однако этот спектр является точным только в рамках допущений, принятых при выводе дифференциальных уравнений колебаний. И именно эти допущения, как показали наши экспериментальные исследования, да и работы других авторов, нельзя применять безоговорочно, абстрагируясь от материала конструкции. Это касается конструкций, изготовленных из любых материалов, но в первую очередь — таких неоднородных по своей структуре материалов, как бетон и фибробетон.

Существующие теории расчета бетонных и железобетонных конструкций [2] практически не учитывают сложность этой структуры. Еще хуже обстоят дела с фибробетонными конструкциями [3, 4].

Общеизвестно широкое и, как правило, эффективное применение метода конечных элементов. Но и здесь есть проблема — при решении иногда появляются фиктивные частоты и пропускаются действительные [5]. Это происходит вследствие замены заданной расчетной схемы на основную схему [6]. В МКЭ частоты определяются из векового уравнения [7], где спектр частот, во-первых, ограничен, во-вторых, неточен из-за замены системы с бесконечным числом степеней свободы на систему с конечным числом степеней свободы. Аналогичные недостатки имеются и у других методов.

Численно-аналитический метод граничных элементов [8, 9] позволяет отбросить недостатки существующих методов и решать задачи динамики на качественно более эффективном уровне. В частности, удаётся получать точный спектр частот в рамках принятых допущений, в частотном уравнении отсутствуют точки разрывов 2-го рода, исключается появление фиктивных и пропуск действительных частот и т.п.

Результаты исследования. При собственных колебаниях граничные параметры стержневых элементов будут отличны от нуля, поскольку все элементы любой системы совершают движение. Это обстоятельство лежит в основе вида частотного уравнения при использовании ЧА МГЭ. В соответствии с алгоритмом преобразования уравнений метода [8, 9] все неизвестные статические и кинематические граничные параметры стержневой системы связаны уравнением

$$\bar{A} \bar{X} = -\bar{B}, \quad (1)$$

где \bar{A} — квадратная матрица граничных значений фундаментальных ортонормированных функций с компенсирующими элементами, описывающими топологию системы. При собственных колебаниях вектор нагрузки $\bar{B} = 0$, и уравнение (1) принимает вид

$$\bar{A} \bar{X} = 0. \quad (2)$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение $\bar{X}_* \neq 0$ тогда и только тогда, когда определитель матрицы фундаментальных функций \bar{A}_* равен нулю, т.е.

$$|\bar{A}_*| = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) является трансцендентным частотным уравнением МГЭ, корни которого дают полный спектр собственных частот колебаний системы. В отличие от других существующих методов, определитель (3) содержит лишь систему фундаментальных функций, что позволяет упростить поиск частот собственных колебаний. Интервал, содержащий корень уравнения (3), фиксируется при изменении знака определителя или при его стремлении к нулю.

После определения корней уравнения (3) можно найти формы собственных колебаний. Для этого частоту собственных колебаний необходимо подставить в аргументы фундаментальных функций матрицы \bar{A}_* , а затем решать уравнение (2) при единичном значении одного или нескольких параметров вектора \bar{B} .

Поиск частот собственных колебаний связан с приведением матрицы \bar{A} к верхнему треугольному виду. По мере роста частот собственных колебаний, растут и абсолютные величины диагональных элементов этой треугольной матрицы. Поэтому верхняя граница спектра частот по ЧА МГЭ зависит от возможностей компьютера, что в настоящее время означает весьма большой спектр доступных для определения частот.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня постоянной жесткости после разделения переменных имеет вид

$$Ely^{IV}(x) - m\omega^2 y(x) = q(x) \quad (4)$$

при начальных параметрах

$$y(0); y'(0) \equiv \varphi(0); Ely''(0) = -M(0); Ely'''(0) = -Q(0).$$

Решение сформированной задачи Коши в матричной форме запишется так:

$$\begin{matrix} Ely(x) \\ El\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{matrix} = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ \lambda^4 A_{14} & A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -\lambda^4 A_{13} & -\lambda^4 A_{14} & A_{11} & A_{12} \\ -\lambda^4 A_{12} & -\lambda^4 A_{13} & \lambda^4 A_{14} & A_{11} \end{matrix} \begin{matrix} Ely(0) \\ El\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{matrix} - \int_0^x \begin{matrix} A_{14}(x-\xi) \\ A_{13}(x-\xi) \\ -A_{12}(x-\xi) \\ -A_{11}(x-\xi) \end{matrix} q(\xi) d\xi, \quad (5)$$

где фундаментальные ортонормированные функции и элементы вектора нагрузки принимают вид

$$A_{11} = \frac{ch\lambda x + \cos \lambda x}{2}; \quad A_{12} = \frac{sh\lambda x + \sin \lambda x}{2\lambda};$$

$$A_{13} = \frac{ch\lambda x - \cos \lambda x}{2\lambda^2}; \quad A_{14} = \frac{sh\lambda x - \sin \lambda x}{2\lambda^3}; \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}}.$$

В приведенных здесь выражениях, как и в формулах для определения собственных частот, полученных другими методами, предполагается вычислять момент инерции для исходных геометрических параметров поперечного сечения балки без учета ее армирования. Между тем, характер армирования приводит к изменению момента инерции, а, значит, оказывает влияние на все динамические параметры балки. Такой момент инерции называется приведенным, и методика его вычисления приводится в многочисленной литературе по железобетону.

Исследованы собственные частоты колебаний железобетонной балки и трёх сталефибробетонных балок с разным процентом фибрового армирования. Армирование всех балок стержневой арматурой было одинаковым (рис. 1).

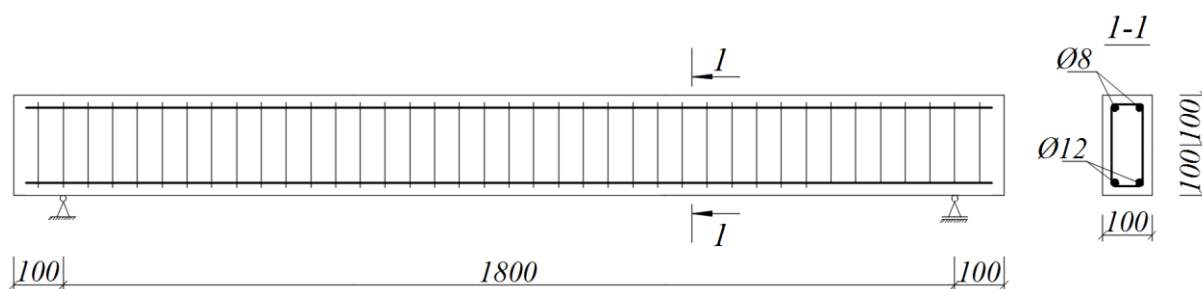


Рис. 1. Армирование железобетонной и сталефибробетонных балок стержневой арматурой

Для проведения экспериментальных исследований разработан специальный испытательный стенд *MODAL-2*, конструкция которого включает в себя блок питания, предварительный усилитель, делитель-ограничитель (необходим для согласования усилителя с компьютером, а также для защиты аналогового входа от перегрузок), пьезодатчик, осциллограф и персональный компьютер.

Для тестирования работы стенда исследовались свободные колебания стальных балок разной длины с шарнирным опиранием по концам и одинаковым поперечным сечением — двутавр №20. Для таких балок частоты собственных колебаний легко определить аналитическим путем. Расхождение аналитических и экспериментальных результатов не превысило 2 %, что позволяет сделать вывод о возможности использования стенда для дальнейших исследований.

В ходе основной части эксперимента определению подлежали собственные частоты и амплитуды колебаний железобетонной и фибробетонных балок. В табл. 1 приведены экспериментальные данные по первым трем частотам для всех четырех балок.

Затем эти же частоты были определены тремя способами — по изложенному алгоритму ЧА МГЭ, по аналитическим формулам и методом конечных элементов в программе ANSYS 17.1 [10]. Численная реализация разработанных алгоритмов ЧА МГЭ выполнена в пакете Scilab [11].

Таблица 1

Экспериментальные и аналитические результаты

| Материал | Частота, c^{-1} | Эксперимент | Аналитический расчет | | |
|-------------------|-------------------|-------------|----------------------|----------|----------|
| | | | По формулам [6] | ЧА МГЭ | ANSYS |
| Бетон | ω_1 | 2019,23 | 1130,15 | 1129,74 | 1126,55 |
| | ω_2 | 8432,80 | 4520,64 | 4518,98 | 4516,41 |
| | ω_3 | 19420,23 | 10171,44 | 10165,70 | 10161,32 |
| Фибробетон, 0,5 % | ω_1 | 2218,81 | 1243,08 | 1242,35 | 1239,67 |
| | ω_2 | 9311,80 | 4972,35 | 4970,42 | 4968,88 |
| | ω_3 | 21278,90 | 11187,79 | 11182,19 | 11180,64 |
| Фибробетон, 1,0 % | ω_1 | 2201,96 | 1228,60 | 1227,76 | 1225,89 |
| | ω_2 | 9419,03 | 4914,43 | 4910,05 | 4908,73 |
| | ω_3 | 21354,62 | 11057,48 | 11051,87 | 11049,11 |
| Фибробетон, 2,0 % | ω_1 | 2208,12 | 1217,14 | 1216,37 | 1214,77 |
| | ω_2 | 9234,91 | 4868,53 | 4864,47 | 4861,89 |
| | ω_3 | 21335,54 | 10954,19 | 10946,31 | 10945,16 |

Во всех аналитических расчетах учитывалось наличие стержневой арматуры путем вычисления приведенного момента инерции поперечного сечения, который для исследуемых балок оказался в 1,87 раза больше, чем момент инерции без учета арматуры. Наличие фибры

оказало крайне незначительное влияние на величину приведённого момента инерции, поэтому в аналитических расчётах не учитывалось.

Результаты аналитических расчетов приведены в табл. 1.

Выводы. Анализ табл. 1 свидетельствует о хорошей сходимости результатов, полученных двумя аналитическими методами и методом конечных элементов. Корректность работы предложенной конструкции испытательного стенда *MODAL-2*, предназначенного для определения собственных частот, форм и амплитуд колебаний подтверждена тестовыми испытаниями стальной двутавровой балки, для которой при определении первых трех частот спектра максимальное расхождение с теоретическими значениями составило 2,06 %. При испытаниях железобетонных и фибробетонных балок это расхождение оказалось весьма существенным – примерно в два раза.

Такое отличие, на наш взгляд, объясняется некорректностью используемой динамической модели армированной балки. Очевидно, что линейное дифференциальное уравнение свободных колебаний балки, которое лежит в основе всех аналитических и численных методов, нельзя использовать в случае железобетона и фибробетона, необходима разработка новой модели, учитывающей специфику работы этих материалов.

1. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 415 с.
2. Пецольт Т.М. Железобетонные конструкции. Основы теории, расчёта и конструирования / Т.М. Пецольт, В.В. Тур. –Издательство БГТУ, Брест, 2003. – 380 с.
3. Рабинович Ф.Н. Композиты на основе дисперсно-армированных бетонов. Вопросы теории и проектирования, технология, конструкции: монография / Ф.Н. Рабинович. – М.: Изд-во АСВ, 2004. – 560 с.
4. Harvinder Singh Steel Fiber Reinforced Concrete: Behavior, Modelling and Design – Springer, 2017. – 172 p.
5. Оробей В.Ф. Моделирование задач динамики стержневых систем методами граничных и конечных элементов / Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г., Лазарева Д.В.–Изв. вузов. Строительство. –2006. – №7. – с. 98-102.
6. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н. Устойчивость и динамика сооружений. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.
7. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. – 225 с.
8. Дашенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса: ВМВ, 2010. — В 2-х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.
9. Оробей В.Ф. / Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ. — Труды Санкт-Петербургского политехнич. ун-та / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов— Инженерно-строительный журнал. — № 4 (22). — СПб, 2011. — С. 33-39.
10. Алексеев Е. Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Е. А. Рудченко. — М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 269с.
11. Федорова Н.Н. Основы работы в ANSYS 17 / Н.Н. Федорова, С.А. Вальгер, М.Н. Данилов, Ю.В. Захарова — М.: ДМК Пресс, 2017. — 210 с.

Стаття надійшла до редакції 17.04.2019