УДК 514.132

Особливості вивчення неевклідової геометрії Лобачевського та її застосування

Наталья Шаповалова,
Національний педагогічний університет
імені М.П. Драгоманова, м. Київ

Сучасні дослідження астрономів, математиків, фізиків, філософів, космологів все більше вимагають професійного володіння фактами як неевклідової геометрії Лобачевського, так і інших неевклідових геометрій

Геометрія виникла у зв'язку з потребами землеробства. Елементи геометричної науки зародилися в глибокій давнині, більш 4000 років назад. Але з плином часу, особливо після доведення теореми Піфагора (V ст. до н.е.), геометрія в інтелектуальному сенсі відділилася від вузько прикладного характеру, а ще через два століття завдяки зусиллям Евкліда вона перетворилась в цілісну наукову систему. На той час були створені основи евклідової геометрії [1].

Розвиваючись з плином часу, геометрія створювала не лише свої методи дослідження, а й розширювала предмет дослідження. Так, в епоху Відродження у зв'язку з розвитком теорії перспективи, з'явилась проективна геометрія. Розвиток проективної геометрії був обумовлений потребами нарисної геометрії в архітектурі та інженерії того часу. На початку XIX століття математичні дослідження привели до появи неевклідової геометрії М.І. Лобачевського.

Геометрія Лобачевського розчистила ґрунт для створення сучасного аксіоматичного методу в геометрії, згідно якому вся геометрія повинна ґрунтуватися на основних поняттях, основних відношеннях і системі аксіом. Довести «строго» будь-яку теорему з точки зору сучасного аксіоматичного методу — це означає отримати її дедуктивним шляхом як наслідок з раніш доведених теорем, причому рисунок і всі наочні уявлення будуть виключно допоміжними. Сучасний аксіоматичний метод, створений під впливом ідей Миколи Івановича Лобачевського в геометрії, знаходить тепер широке застосування для наукового обґрунтування багатьох математичних дисциплін, включаючи і деякі розділи теоретичної механіки [7]. Геометрія Лобачевського стала прикладом для побудови інших неевклідових геометрій: сферичної геометрії, еліптичної геометрії або геометрії Рімана, недезаргової геометрії.

Ці геометрії складають далеко не повний список всього многовиду існуючих геометрій. Неевклідові геометрії відіграли визначну роль при побудові А. Ейнштейном теорії відносності, в якій необхідно було прийняти факт викривлення оточуючого нас простору.

Ще Лобачевський встановив, що його геометрія має пряме відношення до зоряної геометрії, тобто до геометрії космічного простору. На нашій планеті в рамках звичайних земних масштабів люди використовують геометрію Евкліда як найбільш просту, що вірно відображає реальну дійсність. Справа зовсім змінюється, коли ми переходимо від земних масштабів до надто великих масштабів макросвіту або надто малих масштабів мікросвіту. Вважати, що і тут діє геометрія Евкліда, було б невірно. Досягнення фізики говорять про те, що фізичні простори надто великих масштабів ведуть себе як неевклідові.

Витоки сучасної теоретичної фізики тісно пов'язані з геометрією Лобачевського. І тому наші відомі вчені академіки А. С. Христианович, М. А. Лаврентьєв і С. А. Лебедєв писали, що «геометрія Лобачевського була основою для винаходу, який призвів до теорії відносності і методу розрахунків процесів усередині атомного ядра. Дослідження побудови атомного ядра з неймовірною швидкістю призвели до створення атомної промисловості» [2, 3].

Великий вплив на розвиток геометричної науки в XX столітті здійснили дослідження в фізиці, хімії та біології на рівні мікроявищ, які проходять в межах малих відстаней, а також дослідження в астрономії, космонавтиці, розвиток супутникового зв'язку, на рівні явищ, які проходять на дуже великих відстанях. При цьому геометрія почала втрачати наочність, оскільки людське око не може спостерігати за явищами на таких відстанях. Для їх опису використовуються багатовимірні та нескінченновимірні простори.

Питання, пов'язані з основами геометрії, дуже тісно переплітаються з особливостями психології і теорії пізнання в цілому, з питаннями про те, яким чином виникають просторова уява та інтуїція. Розгляд тієї чи іншої геометрії залежить від поставленої проблеми. Зокрема геометрія може застосовуватись не лише до простору, в якому ми живемо, а й до інших просторів, що виникають в математичних і фізичних теоріях. Геометрії цих просторів є різними: як евклідовою, так і неевклідовими. Таким чином, необхідність побудови багатьох різних геометрій пов'язана виключно із складною природою оточуючого нас світу.

Проективна геометрія є найбільш зручним вихідним пунктом для пояснення сутності не лише геометрії Лобачевського, а й інших геометричних систем. Саме за допомогою методів проективної геометрії можна описати дев'ять відомих науці неевклідових геометрій площини і показати можливість їх використання в фізиці.

При створенні нової геометрії М.І. Лобачевський користувався відомими фактами геометрії Евкліда, які не є наслідками п'ятого постулату Евкліда, тобто всі твердження, які не залежать від змісту п'ятого постулату, є спільною частиною геометрії Евкліда і Лобачевського. Користуючись аксіоматикою Гільберта, якої не було за життя Лобачевського, можна сказати, що спільною частиною обох геометрій є сукупність всіх тверджень, які можна вивести з аксіом перших чотирьох груп системи аксіом Гільберта, яка називається абсолютною геометрією. Отже, абсолютна геометрія є спільною частиною геометрії Евкліда і геометрії Лобачевського, усі твердження абсолютної геометрії мають місце і в геометрії Лобачевського.

Таким чином, в основі геометрії Лобачевського лежать всі твердження абсолютної геометрії і аксіома Лобачевського, яка полягає в тому, що через точку, яка не належить до даної прямої, у площині, що ними визначається, можна провести не менше двох прямих, які дану пряму не перетинають.

Площину і простір, де разом з абсолютною геометрією виконується аксіома Лобачевського та наслідки з неї, називають відповідно площиною і простором Лобачевського або гіперболічною площиною і гіперболічним простором [3].

Для доведення несуперечливості геометрії Лобачевського була побудована інтерпретація італійського вченого Е. Бельтрамі. В своїй роботі «Досвід інтерпретації неевклідової геометрії» Бельтрамі показав, що існують реальні тіла, на поверхні яких виконується геометрія Лобачевського. Цей висновок італійського математика був вражаючим: виявилось, що в евклідовому реальному світі є об'єкти неевклідової природи.

В евклідовому просторі існує поверхня від'ємної кривини, яка називається *псев-*

досферою, на якій в системі геодезичних ліній виконується геометрія Лобачевського.

Але і після дослідження Бельтрамі залишалося багато невідомого. З'ясувалося, що на псевдосфері, якого б типу вона не була, планіметрія Лобачевського виконується тільки частково (локально), оскільки на довільній із псевдосфер існує гостре ребро, яке складається з особливих точок. На тих частинах псевдосфери, де немає особливих точок, геометрія Лобачевського виконується, але на всій поверхні в цілому геометрія Лобачевського не виконується. Далі, на псевдосфері виконується (локально) тільки планіметрія Лобачевського, але не вся його геометрія в цілому, яка включає планіметрію і стереометрію.

Виникає питання: чи не можна в евклідовому просторі знайти таку поверхню сталої від'ємної кривини, яка б не містила особливих точок, на якій би двохвимірна геометрія Лобачевського виконувалася у всіх точках?

Бельтрамі намагався дати реальне тлумачення стереометрії Лобачевського, але позитивних результатів не домігся і зробив невірний для себе висновок, що таке тлумачення неможливе.

В 1871 році німецький математик Ф. Клейн запропонував оригінальне тлумачення геометрії Лобачевського на звичайних зразках евклідової геометрії і не тільки для всієї планіметрії, але і для всієї стереометрії. Праця Клейна виявилася величним тріумфом у справі остаточного визнання геометрії Лобачевського як логічно стрункої геометричної системи. І на питання, чи реальна геометрія Лобачевського, вже без всіляких коливань він дав позитивну відповідь: так, реальна. У всякому разі реальна настільки, наскільки реальна евклідова геометрія.

Ідея реалізації геометрій, усвідомлення їх реалізації на множинах різних об'єктів, особливо після завершення аксіоматичної побудови евклідової геометрії, набула широкого розвитку. Наприкінці XIX і на початку XX століття було створено цілий ряд різноманітних інтерпретацій аксіоматики як евклідової, так і неевклідових геометрій. Декілька моделей аксіоматики планіметрії Лобачевського запропонував відомий французький математик і філософ А. Пуанкаре [9].

В результаті в рамках евклідової геометрії на її відомих зразках можна побудувати всю гіперболічну геометрію. Геометрія Лобачевського несуперечлива настільки, наскільки несуперечлива евклідова геометрія, а та, в свою чергу, несуперечлива настільки, наскільки несуперечлива арифметика дійсних чисел; несуперечливість останньої доведена багатовіковою практикою людського суспільства в найширшому розумінні цього слова [5].

Значний крок в розвитку неевклідової геометрії був зроблений Г. Ріманом. В 1854 році він прочитав лекцію «Про гіпотези, які лежать в основі геометрії» на філософському факультеті Геттінгенського університету. Ріман вніс в число аксіом наступну пропозицію: *кожна пряма, яка лежить в одній площині з даною прямою, перетинає цю пряму*. Це означає, що в геометрії Рімана взагалі немає паралельних прямих, сума кутів довільного трикутника на відміну від геометрії Евкліда і геометрії Лобачевського більше $2d$. З'ясувалося, що геометрія Рімана несуперечлива. При цьому простір Лобачевського став одним з часткових випадків ріманових просторів. В лекції були порушені загальні питання, пов'язані з геометрією фізичного простору. Закінчуючи свою лекцію, Ріман сказав, що ми стоїмо на порозі області, яка належить іншій науці — фізиці, і переступити його не дасть нам сьогодення.

Таким чином, наявність трьох логічно бездоганних і рівноправних геометричних систем призвело до постановки питання: яка геометрія Всесвіту, яка геометрія всередині атомного світу?

Наука наблизилась до відповіді на поставлене запитання про геометрію Всесвіту після відкриття на початку XX століття А. Ейнштейном спеціальної і загальної теорії відносності. Існувала думка, що загальна теорія відносності представляє собою перший приклад суто фізичної теорії, яка з'явилася в результаті математичного стрибка в невідоме.

Із загальної теорії відносності випливає, що простір викривлений. Це пояснюється тим, що поблизу тіл, які мають велику масу (наприклад, поблизу Сонця, зірок), закони ньютонівської механіки змінюються, геометрія простору стає неевклідовою. Добре відомо, що однією з поширених моделей прямої є промінь світла. Однак світло, яке проходить повз Сонце або яких-небудь зірок, під впливом сили тяжіння згинає свою траєкторію.

Відкриття теорії відносності, розширення об'єму знань про Всесвіт приводять нас до висновку, що Всесвіт в цілому не можна розглядати як незмінну систему. Суперечливому та змінному Всесвіту притаманна зміна метрики простору і часу.

Важливі результати були отримані А. А. Фрідманом. В основу розробленої Фрідманом моделі Всесвіту була покладена гіпотеза, згідно з якою Всесвіт однорідний, тобто влаштований однаково в усіх своїх частинах. Звичайно, річ йде про Всесвіт в цілому. Якщо ж говорити про порівняно невеликі масштаби, то неоднорідність Всесвіту буде видна неозброєним оком. Фрідман встановив, що, якщо щільність речовини у Всесвіті менше деякої сталої величини (критичної щільності), тоді кривина простору буде від'ємною, якщо ж критична щільність перевищена, тоді простір має додатну кривину. І, нарешті, у випадку, коли щільність дорівнює критичному значенню, тоді кривина простору дорівнюватиме нулю. Таким чином, як показав Фрідман, при певних умовах геометрія Всесвіту має від'ємну кривину, тобто співпадає з геометрією Лобачевського.

Виходячи із загальної теорії відносності, в 1922 році Фрідман зробив висновок, що Всесвіт повинен розширюватися з плином часу.

Фрідманова модель Всесвіту, яка була отримана теоретичним шляхом, була блискуче підтверджена експериментально після смерті Фрідмана американським астрономом Едвіном Хабблом. Хаббл, діючи абсолютно незалежно від Фрідмана, виявив «розбігання» далеких туманностей. Ейнштейн оцінив отримані Хабблом результати як підтвердження теоретичних положень Фрідмана. Пізніше була побудована модель «розширеного» Всесвіту.

Встановлена Хабблом в 1929 році залежність між червоним зміщенням галактик і відстанню до них ввійшла в науку як один з найбільш важливих космологічних законів, який отримав назву «закону Хаббла».

Сучасний рівень науки дозволяє зробити висновок, що реальний простір Всесвіту є викривленим простором змінної кривини. Отже, геометрія Всесвіту не може бути ні геометрією Евкліда, ні геометрією Лобачевського, оскільки евклідовий простір і простір Лобачевського мають відповідно нульову і сталу від'ємну кривину. Оскільки кривина евклідового простору дорівнює нулю, тоді можна вважати, що простір Лобачевського, який має сталу від'ємну кривину, ближче до геометрії Всесвіту.

Осягаючи таємниці неевклідових геометрій, студенти вчаться творчо мислити, знайомляться з історією великих наукових відкриттів, у них з'являється більший інтерес до геометрії, математики і, взагалі, до науки. Вивчення властивостей геометричних фігур в неевклідових геометріях розширюють уявлення студентів про сучасну картину Всесвіту, сприяють кращому розумінню рушійних сил науково-технічного прогресу та стимулюють їх власний пошук нових геометричних ідей і теорій.

Враховуючи досвід викладання геометрії в університеті, можна зробити висновок про те, що в процесі вивчення неевклідових геометрій слід використовувати порівняльний аналіз, а саме порівнювати твердження параболічної геометрії Евкліда, гіперболічної геометрії Лобачевського, сферичної геометрії, еліптичної геометрії або геометрії Рімана, активізуючи відомі студентам факти, та виявляти спільні або відмінні їх ознаки. Найбільш ефективними методами навчання неевклідових геометрій є пояснювально-ілюстративний метод та евристична бесіда. Саме під час евристичної бесіди студенти порівнюють твердження неевклідових геометрій з їх аналогами з евклідової геометрії. У формуванні вмінь застосовувати положення неевклідових геометрій основним є дослідницький та емпірико-пізнавальний метод [4, 6–9].

Перші застосування геометрія Лобачевського отримала в роботах самого М. І. Лобачевського, який за її допомогою зміг обчислити деякі інтеграли. В кінці XIX століття в роботах А. Пуанкаре і Ф. Клейна були знайдені прямі зв'язки геометрії Лобачевського з теорією функцій комплексної змінної та з теорією чисел, зокрема з арифметикою невизначених квадратичних форм. Геометрія Лобачевського знаходить в наш час важливе застосування в теорії функцій комплексної змінної, яка є математичною основою сучасної гідродинаміки, аеродинаміки і теорії пружності.

Значення геометрії Лобачевського ще більше зросло завдяки роботам американського математика Тьорстона, який встановив її зв'язок з топологією тривимірних многовидів. У зв'язку з цим можна сказати, що романтичний період в історії геометрії Лобачевського закінчився, коли основна увага вчених та дослідників була звернута на її осмислення з точки зору основ геометрії взагалі.

Література

1. *Александров П. С.* Что такое неевклидовая геометрия. — М.: Гостехиздат, 1943. — 56 с.
2. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия. Ч.2. — М.: Просвещение, 1987. — 352 с.
3. *Боровик В. Н., Яковець В. П.* Курс вищої геометрії : навч. посібник. — Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. — 464 с.
4. *Егоров И. П.* Основания геометрии. — М. : Просвещение, 1984. — 114 с.
5. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. — М. : Наука, 1971. — 576 с.
6. *Костин В. И.* Основания геометрии. — М. : Учпедгиз, 1948. — 304 с.
7. *Ломаєва Т. В., Семенович О. Ф.* Перетворення і аксіоматичний метод в геометрії. В 3-х ч. — Ч.2. — Черкаси, 1999. — 174 с.
8. *Слєпкань З. І.* Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі / М-во освіти та науки України. НПУ ім. М. П. Драгоманова. — Київ, 2000. — 210 с.
9. *Трайнин Я. Л.* Основания геометрии. — М. : Учпедгиз, 1961. — 326 с.

08.02.2011