УДК 318.022.5

О проблемности при изложении курса высшей математики

Ирина Ковтун,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Национальный университет биотехнологий
и природопользования Украины, Киев

*Учить надо тому, что нужно
и чему трудно научиться.*
Л.Д. Кудрявцев

Включение Украины в общеевропейский процесс — присоединение к Болонской конвенции — поставило перед высшим образованием новые задачи, в частности, *как* в новых условиях излагать курс высшей математики — фундаментальную основу специальных курсов.

Использование новых технологий обучения: включение тестов, решение заданий на компьютерах и т.д., не должно отменить основное — то, что получают студенты при обучении, а именно, умение добиваться результата. Нельзя потерять главное — умение мыслить.

При использовании вычислительной техники (что необходимо) нужно не только использовать компьютер, но и понимать и грамотно описать решаемую задачу, поставить корректно математическую задачу, соответствующую данной практической задаче. А затем (не менее важно) провести исследование: можно ли применить известные аналитические методы решения математической задачи, и только уже затем использовать компьютер.

Остановимся еще раз на методике изложения высшей математики — одной из важнейших составляющих высшего образования, которое получают студенты на инженерных факультетах вузов. Очень важно, чтобы студенты понимали необходимость математических знаний, т.е. студент должен учиться сознательно, у него должно быть желание учиться, он должен понимать, что полученные знания по высшей математике он сможет в дальнейшем применять к решению своих практических задач. Поэтому при чтении лекций мы используем проблемное обучение.

Рассмотрим методику изложения отдельных разделов высшей математики. Начиная определенный раздел курса высшей математики, стараемся сформулировать проблему: зачем нужно то или иное понятие, почему без него нельзя обойтись. Для этого используем знания, известные со школы или полученные при изучении других дисциплин. Затем подбираем соответствующие задачи. Сначала объясняем, почему новое понятие необходимо ввести, почему без него нельзя обойтись, и только затем даем строгое определение, указываем на свойства, связанные с этим понятием, рассматриваем его применения.

Вводя математические понятия, обращаем внимание на условия выполнение теорем, подчёркиваем, что невыполнение каких-либо условий не позволяет сделать выводы, вытекающие из данной теоремы. Стремимся к тому, чтобы еще и еще раз подчеркнуть, как введенные понятия и теоремы проявляются и в других разделах математики [2, 4].

Рассмотрим использование *задачи о нахождении площади* при введении ряда понятий. Вводим понятия:

— предела;

— определенного интеграла;

— несобственного интеграла первого рода;

— числового ряда.

Предел

Не раз подчеркивалось, что понятие предела, теория пределов — сложный для восприятия материал [1]. Поэтому особенно важно объяснить, почему необходимо ввести это понятие и почему без него нельзя обойтись.

В средней школе научились вычислять площадь простейших фигур: треугольника, прямоугольника, трапеции и т.д. А как вычислить площадь криволинейной трапеции, т.е. трапеции, у которой одна сторона не прямая линия, а кривая?

Задача 1. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой $y = x^2$, снизу осью Ox, сбоку прямой $x = 1$.

Отрезок [0,1], на котором определена функция $y = x^2$, разбиваем на n одинаковых отрезков длиной $\Delta x_n = \frac{1}{n}$. Получаем на оси Ox точки $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n-1}$. Проводим перпендикуляры через эти точки до пересечения с кривой $y = x^2$. На кривой получаем точки $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \ldots \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$, через которые проводим прямые, параллельные оси Ox, и рассматриваем прямоугольники. Длина одной стороны каждого прямоугольника равна $\frac{1}{n}$, длина второй — соответственно равна $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \ldots \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$. Сумма таких прямоугольников называется ступенчатой фигурой. Площадь этой ступенчатой фигуры равна сумме площадей прямоугольников, т.е.

$$S_n = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3}. \qquad (1)$$

Запишем S_n в виде

$$S_n = \frac{1}{3} + \alpha_{n-1}, \text{ где } \alpha_{n-1} = \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n}. \qquad (2)$$

Площадь криволинейной трапеции приближенно равна площади ступенчатой фигуры и приближение тем точнее, чем больше n. Но как бы велико ни было n, площадь ступенчатой фигуры не будет равна площади криволинейной трапеции. Для того, чтобы получить точное значение площади, необходимо применить некую новую операцию — *предельный переход*. Естественно вводится новое понятие — понятие *предела числовой последовательности*.

В рассматриваемой задаче — это предел числовой последовательности

$$\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} + \cdots. \qquad (3)$$

Нужно найти предел $S_n = \frac{1}{3} + \alpha_{n-1}$. Но предварительно необходимо рассмотреть теоремы о пределах. Кроме того, в формуле (2) есть слагаемое $\alpha_{n-1} = \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n}$. Появляется понятие *бесконечно малой величины*. Предел такой величины равен 0. Теперь можно вернуться к задаче, которая привела к необходимости введения понятия предела. Получаем: поскольку $S_n \to S$ при $n \to \infty$, то из формулы (2) следует

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, найдена искомая площадь криволинейной трапеции.

Определенный интеграл

Задача 2. Найти площадь криволинейной трапеции, которая ограничена сверху *произвольной* кривой, уравнение которой описывается функцией $f(x) \geq 0$. Снизу трапеция ограничена отрезком $[a,b]$ оси Ox, с боков — прямыми $x=a$, $x=b$. Отрезок $[a,b]$ разобьем на части Δx_k, $k=1,2,...,n$.

Пусть $\lambda = \max \Delta x_k$ — длина наибольшего из отрезков Δx_k. На каждом отрезке выбираем произвольную точку $x_k \in \Delta x_k$ и вычисляем $f(x_k)$. Строим прямоугольник, длины сторон которого равны Δx_k и $f(x_k)$. Тогда площадь каждого прямоугольника равна $\Delta S_k = f(x_k)\Delta x_k$. Площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей прямоугольников: $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$. Мы уже знаем, что, какими бы малыми ни были отрезки Δx_k, $k=1,2,...,n$, эта сумма не определяет точно искомую площадь криволинейной трапеции.

Известно, что для того, чтобы получить искомую площадь, нужно перейти в сумме $I_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ (интегральной сумме) к пределу при стремлении λ к нулю $\lambda \to 0$.

Предел интегральной суммы I_n (если он существует) называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b [2]:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k .$$

Возвращаясь к задаче о площади, которая привела к необходимости определения понятия предела числовой последовательности, т.е. к задаче о площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой $y=x^2$, снизу осью Ox, сбоку прямой $x=1$, получаем, что эту площадь можно вычислить как определённый интеграл: $S=\int_0^1 x^2 dx$.

В общем случае определённый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху функцией $f(x) \geq 0$. Это — геометрический смысл определённого интеграла.

Далее возникает проблема, как вычислять определенные интегралы. Здесь естественно вывести формулу Ньютона — Лейбница и привести необходимые свойства определённого интеграла.

Вычисляя $\int_0^1 x^2 dx$, имеем, что $S=\frac{1}{3}$. Естественно, что это же значение искомой площади получили при введении понятия предела (задача 1).

Несобственный интеграл первого рода

Задача 3. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y=\frac{1}{x}$, снизу осью Ox, слева прямой $x=1$. Справа трапеция не ограничена.

Ось Ox разобьем точками 2, 3, 4, … на равные отрезки. В этих точках восстановим перпендикуляры до пересечения с кривой $y=\frac{1}{x}$. В точках пересечения получаем значения функции $\frac{1}{x}$: $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ Через точки $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ проводим прямые, параллельные оси Ox. Рассмотрим прямоугольники, длины сторон которых равны 1 и соответственно $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$. Получим ступенчатую фигуру, площадь которой равна сумме площадей этих прямоугольников:

$$S_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots.$$

Таким образом, получаем выражение, которое является суммой бесконечного числа слагаемых. Найти такую сумму обычным путём не получается: сумма изменяется при добавлении новых слагаемых.

Задача 4. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y=\frac{1}{x^2}$, снизу осью Ox, слева прямой $x=1$. Справа трапеция не ограничена.

Поступая аналогично, получим ступенчатую фигуру, площадь которой равна сумме площадей прямоугольников, т.е. получаем бесконечную сумму

$$S_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots .$$

Возникает задача, как определить, чему равны суммы S_1 и S_2 и чем они отличаются.

При введении определённого интеграла составлялись интегральные суммы $I_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$, в которых отрезки Δx_k были разной длины и длина максимального отрезка стремилась к нулю. Если составить суммы в данных задачах $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Delta x_k$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\Delta x_k$, то длина отрезков Δx_k одинакова и не стремится к нулю. Поэтому при определении несобственного интеграла первого рода нужен другой подход. А именно, определяем несобственный интеграл первого рода следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^{\beta} f(x)dx .$$

Заметим, что для несобственных интегралов первого рода характерным является то, что один предел интегрирования (или оба) равны бесконечности. Тогда $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx$. Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ представляем как сумму интегралов $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$, где $c \in (-\infty; +\infty)$.

Из рассмотренных задач о площади получаем несобственные интегралы первого рода: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ и $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$. Для вычисления несобственных интегралов можно применить обобщенную формулу Ньютона — Лейбница.

Кроме определения несобственного интеграла первого рода, вводим понятие *сходимости* таких интегралов. Так, вычисляя интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$, получим, что он равен бесконечности, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ равен 1. Первый из интегралов называют *расходящимся*, а второй — *сходящимся*. То есть, в первом случае «площадь» криволинейной трапеции не существует, а во втором — существует.

Далее целесообразно привести *признаки сходимости* несобственных интегралов, поскольку не всегда удаётся вычислить несобственный интеграл первого рода $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

Числовые ряды

Ряды — это важный инструмент для решения инженерных задач [4]. Если аналитические методы решения дифференциальных уравнений, которые описывают данную практическую задачу, неприменимы, то используют приближенные методы решения, в частности решение с помощью рядов.

Задача 5. Найти площадь прямоугольного треугольника OAB, один катет которого OA лежит на оси Ox и имеет длину 1, второй катет AB, параллельный оси Oy, имеет длину 2 [3].

Известно, что площадь этого треугольника равна $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$. Подсчитаем его площадь иначе. Катет OA точками $A_1, A_2, A_3, \ldots$ разбиваем на части так, чтобы длина отрезка OA_1 была равна $\frac{1}{2}$, длина отрезка OA_2 была равна $\frac{1}{3}$, длина OA_3 была равна $\frac{1}{4}$ и т.д. Соединяем точки $A_1, A_2, A_3, \ldots$ с вершиной B треугольника OAB. Получаем треугольники OA_nB ($n = 1, 2.3, ...$). Находим площадь каждого треугольника и записываем эти площади в виде $S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{1 \cdot 2}$, $S_2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) =$ $= \frac{1}{2 \cdot 3.}$, $S_3 = \frac{1}{3 \cdot 4}$.

Аналогично получаем, что площадь треугольника OA_nB равна $S_n = \frac{1}{n(n-1)}$. Площадь рассматриваемого прямоугольного треугольника OAB равна сумме площадей треугольников OA_nB, т.е. $S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$ или

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} + \cdots$$

Каждое из слагаемых этой суммы имеет вид: $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$. Это — общий член ряда. А полученную бесконечную сумму называют *числовым рядом*.

Таким образом, получили понятия числового ряда и общего члена a_n ряда. Кроме того, учитывая, что нам известна площадь рассматриваемого прямоугольного треугольника, делаем вывод, что в данном случае бесконечную сумму $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} + \cdots$ можно найти: она равна 1. В таких случаях говорят, что ряд сходится.

Дадим определение *сходимости* числового ряда. Рассматриваем понятие частичной суммы ряда. Ряд называется сходящимся, если существует предел частичной суммы ряда.

Вернёмся к задачам, которые привели к понятию несобственного интеграла. Выражения, полученные при определении площадей криволинейных трапеций в задачах 3 и 4, это — $S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ и $S_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$, т.е. имеем числовые ряды:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \text{ и } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots. \quad (4)$$

Общие члены этих рядов равны соответственно $a_n = \frac{1}{n}$ и $a_n = \frac{1}{n^2}$. Они стремятся к нулю при $n \to \infty$, т.е. являются бесконечно малыми величинами. Этим самым определено *необходимое условие* сходимости ряда: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Вводим определение *сходимости* числового ряда. Для этого рассматриваем понятие частичной суммы ряда. Ряд называется сходящимся, если существует предел частичной суммы ряда. Демонстрируем это понятие на примере задачи 1, которая привела нас к понятию предела. Формулой (3) определён числовой ряд

$$\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} + \cdots \quad (5)$$

Общий член этого ряда $a_n = \frac{(n-1)^2}{n^3} \to 0$.

В этой задаче определена частичная сумма ряда $S_n = \frac{1}{3} + \alpha_{n-1} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n}\right)$, предел которой равен $\frac{1}{3}$. Таким образом, ряд (5) — сходящийся по определению.

Однако не всегда можно составить частичную сумму ряда в виде формулы. Поэтому нужны *достаточные условия сходимости* числовых рядов.

Рассмотрим числовые ряды: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ и $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$. Необходимое условие сходимости ряда $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ для этих рядов выполняется. Но при этом первый числовой ряд расходящийся, а второй — сходящийся. Как это доказать? Каковы же достаточные условия сходимости числовых рядов? Начнём с достаточного условия — *интегрального* *условия сходимости Коши,* которое естественно следует из рассмотренных задач. Сопоставим рядам (4) несобственные интегралы первого рода $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ и $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$, первый из которых — расходящийся, второй — сходящийся.

Формулируем *интегральный признак* сходимости Коши в виде теоремы, которая связывает ряд с несобственным интегралом первого рода. Затем указываем и на другие достаточные признаки сходимости числовых рядов.

Выводы

Используя конкретные задачи о вычислении площадей криволинейных трапеций, приходим сначала к необходимости введения понятия предела (задача 1). При этом получаем числовую последовательность, которая затем естественно позволяет определить соответствующий числовой ряд. В этой же задаче получена частичная сумма ряда, что даёт возможность решить вопрос о сходимости числового ряда.

Задача 2 приводит нас к понятию определённого интеграла и его геометрическом смысле: определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.

Задачи 3 и 4 приводят к понятию несобственного интеграла первого рода, его сходимости. Там же получены числовые последовательности, которые затем используются при введении понятия числового ряда.

Задача 5 приводит к понятию числового ряда как бесконечной суммы, слагаемые которой определяются общим членом. Эта сумма нам известна. То есть бесконечную сумму в этом случае можно подсчитать. В задаче 1 получена числовая последовательность, которая затем естественно позволяет определить соответствующий числовой ряд. В этой же задаче получена частичная сумма ряда, что даёт возможность решить вопрос о сходимости ряда.

В задачах 3 и 4 также получены числовые последовательности, которые определяют числовые ряды. В каком случае можно найти бесконечную сумму? В этих задачах, естественно, получается интегральный признак сходимости числового ряда, связанный с понятием сходимости несобственного интеграла, рассмотренного в задачах 3 и 4.

При таком изложении студентам становится понятным, почему необходимо то или иное понятие, как к нему приводят конкретные задачи и как результаты решения задач используются в дальнейшем. Определения предела, несобственного интеграла, числового ряда становятся естественными. Понятна и необходимость изложения свойств этих понятий и связанных с ними теорем.

Литература

1. *Ковтун, И.И.* Об одном подходе к введению понятия предела / И.И. Ковтун, И.А. Никитина // Труды Российской ассоциации «Женщины-математики». Математика. Экономика. Экология. Образование. Ряды Фурье и их приложения. — 2000. — Т. 7. Вып. 2. Чебоксары : Изд-во Чувашского ун-та. — С. 87–89.
2. *Суліма, І.М.* / І.М. Суліма, І.І. Ковтун, В.М. Яковенко Вища математика. Частина друга. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. — К. : Вид-во НАУ, 2003. — 297 с.
3. *Вечорик, А.М.* Дослідження математичної моделі за допомогою рядів / Вечорик А.М., Дума А.С., Ковтун І.І. // Проблеми науки, освіти та управління : зб. наук. праць. — Харків, 2004. — Вип V. — С. 74–77.
4. *Ковтун, И.И.* О некоторых новых требованиях при изложении курса высшей математики // Новий Колегіум. — 2007. — № 2. — С. 54–59

05.02.2013