

Рис. 6 – Розподіл температури по глибині поверхневого шару при  $t = 0,2 \text{ с}$ ,  $T_0 = 40 \text{ °C}$

На рис. 6 видно, що температури глибинних шарів (при  $x > 5\text{мм}$ ) оброблюваного матеріалу на початку (крива 1, отримана на етапі нагрівання) і наприкінці (крива 2) етапу охолодження однакові і рівні  $40 \text{ °C}$ .

#### Висновки

1. Встановлено математичну модель для температурного поля для ділянок нагрівання і охолодження, яка розглядається послідовно в часі при граничних умовах другого та третього роду.

2. Аналіз рівняння (6) показав, що це рівняння досить коректно описує процес охолодження поверхневого шару заготовки. На відміну від аналогічного двовимірного рішення Сипайлова В.А. [1] це рівняння можна з меншою трудомісткістю використовувати в інженерних розрахунках і для керування процесом формування фізико-механічного стану поверхневого шару. За цим рівнянням можна аналітично знаходити градієнти температурного поля по глибині поверхневого шару і за часом.

3. На відміну від аналогічного двовимірного рішення Сипайлова В.А. [1], рівняння (6) містить такі додаткові змінні як вихідну температуру оброблюваного матеріалу ( $T_0$ ) і температуру охолоджувально-го середовища ( $T_c$ ), які суттєво впливають на процес охолодження і можуть змінюватися в часі. Отже, ці параметри можна використовувати для вивчення процесу шліфування та керування ним.

#### Література

- Сипайлов В.А. Тепловые процессы при шлифовании и управление качеством поверхности. – М.: Машиностроение, 1978. – 167 с.
- Карслю Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
- Лыков А.И. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
- Шаршин В.П., Ковальчук Е.Н., Якимова А.В. Применение решений теплофизических задач к расчету температуры и глубины дефектного слоя при шлифовании // Совершенствование процессов абразивно-алмазной и упрочняющей обработки в машиностроении. – Пермь: Изд. Перм. политехн. ин-та. – 1986. – С.9-16.

УДК: 641.528.6

## УДОСКОНАЛЕНА МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ТРИВАЛОСТІ ЗАМОРОЖУВАННЯ

Потапов В.О., д-р. техн. наук, професор, Семенюк Д.П., канд. техн. наук, доцент  
Харківський державний університет харчування та торгівлі, м. Харків

Отримано наближене рішення динаміки процесу охолодження тіл довільної форми в процесі заморожування, яке дозволяє розраховувати тривалість процесу з урахуванням тепlopідведення від центральної частини тіла, яка має температуру вищу за криоскопічну.

The approximate solution to the dynamics of the cooling process of random-shaped bodies is elaborated. This solution allows calculating the duration of process taking into account the heat removal from the central part of the body, the temperature of which is higher than the cryoscopic temperature.

**Ключові слова:** Формула Планка, фронт кристалізації, кріоскопічна температура,

Постановка проблеми в загальному вигляді. Як відомо класичним рівнянням при розрахунку тривалості процесу заморожування служить формула Планка.

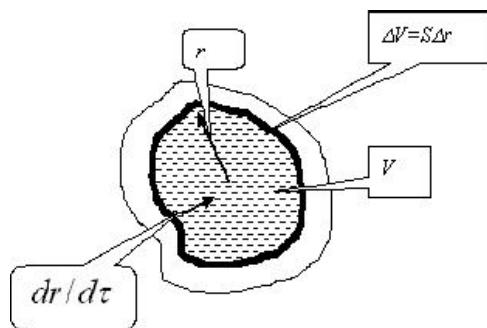
Існують варіанти формули Планка для тіл правильної форми [1–3]. У роботі [4] висловлено припущення, що теоретично обґрунтованим шляхом для розрахунку тривалості процесу охолодження та заморожування є пряме розв'язання тривимірної нестационарної крайової задачі тепlopровідності. В основу формули Планка покладено наступні допущення: розподіл температур за об'ємом тіла в процесі заморожування залишається постійним (квазістационарне наближення) та одновимірним, теплофізичні характеристики тіла залишаються постійними, перед початком заморожування тіло охолоджено до кріоскопічної температури, фронт заморожування переміщується симетрично від поверхні тіла до його центру, виконуються граничні умови третього роду на поверхні тіла [5].

В роботі [6] авторами було запропоновано модель заморожування у разі несиметричних граничних умов, що має місце в плиткових апаратах при контактному заморожуванні.

Проте у існуючих формулах не враховується вплив підведення теплоти від центральної зони продукту, яка при заморожуванні найчастіше має температуру вище кріоскопічної. При цьому, чим інтенсивніше проходить процес охолодження в апараті, тим більший градієнт температур по об'єму тіла та більше додаткове тепlopідведення від центральних зон продукту. У цих умовах розрахована тривалість заморожування за формулою Планка є меншою ніж експериментальна. Це призводить, до передчасного завершення процесу холодильного оброблення продукту, а відповідно до погіршення його якості при подальшому зберіганні.

Мета та завдання статті полягає в отриманні нового наближеного методу розв'язання задачі динаміки нестационарного теплообміну та заморожування для тіл довільної форми при врахуванні тепlopідведення від центральної частини тіла, яка має температуру вищу за кріоскопічну.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо тіло довільної форми, яке охолоджується з внутрішнім джерелом теплоти, що діє на межі між замороженою та не замороженою частинами тіла за умов симетричного теплообміну з граничною умовою третього роду (рис. 1).



**Рис. 1 – Розрахункова схема процесу заморожування:  $\Delta V = S \Delta r$  – об'єм в якому відбувається кристалізація;  $V$  – об'єм не замороженого продукту;  $r$  – поточна координата фронту кристалізації;  $dr/d\tau$  – швидкість просування фронту кристалізації**

Будемо вважати всі теплофізичні характеристики тіла сталими, тоді для будь-якого нескінченого об'єму  $\Delta V$  та будь якого фіксованого моменту часу можна записати рівняння теплового балансу для тіла яке заморожується у вигляді:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{dT}{d\tau} \cdot V = j \cdot S - q \cdot \frac{\Delta m_f}{\Delta \tau}, \quad (1)$$

де  $c$  – питома теплоємність, Дж/кг·К;

$\rho$  – густина, кг/м<sup>3</sup>;

$V$  – об’єм, м<sup>3</sup>;

$S$  - площа поверхні, що охоплює об’єм  $\Delta V$ , м<sup>2</sup>;

$\frac{dT}{d\tau}$  - темп нагрівання об’єму  $V$ , К/с;

$j$  – тепловий потік від фронту кристалізації в охолоджуюче середовище, Вт/м<sup>2</sup>.

В даному рівнянні  $\Delta m_f = w \cdot \rho_w \cdot \Delta V \cdot A_f$  – маса вологи, що замерзає,  $A_f$  – частка замерзаючої вологої в тілі. 1 формулі (1) всі теплофізичні характеристики відносяться до кріоскопічної температури.

Здійснимо деякі підстановки:  $H = q \cdot w \cdot \rho_w \cdot A_f$ ,  $\Delta V = S \cdot \Delta r$ ,  $q \cdot \frac{\Delta m_f}{S \cdot \Delta \tau} = \left[ H \cdot \frac{d}{d\tau} r \right]$ .

Зробимо допущення про сталість темпу охолодження не замороженої області:  $\frac{d}{d\tau} \cdot T = T' = const$ .

Тоді можна записати рівняння теплового балансу для не замороженої області у вигляді диференційного рівняння:

$$c_c \cdot \rho_c \cdot \left( \frac{d}{d\tau} \cdot T \right) \cdot (S \cdot R) = \lambda_c \cdot \frac{T_c - T_k}{R} \cdot S \quad (2)$$

де  $T_c$  – температура центру не замороженої області;

$T_k$  – кріоскопічна температура;

$\lambda_c$  – тепlopровідність не замороженої частини продукту.

Запровадимо коефіцієнт форми тіла  $\Gamma$  за співвідношенням.

$$R = \Gamma \cdot \frac{V}{S}. \quad (3)$$

де  $R$  - характерний розмір тіла.

Для тривимірного тіла, як в нашому випадку  $\Gamma=3$ .

Припустимо, що середнє значення темпу охолодження не замороженої області об’ємом  $V$  є постійним і дорівнює темпу охолодження на момент досягнення на поверхні тіла кріоскопічної температури.

Тоді можна записати

$$\frac{d}{d\tau} \cdot T = T' = \frac{\lambda_c}{c_c \cdot \rho_c} \cdot \frac{T_c - T_k}{R^2} = const. \quad (4)$$

Запишемо вираз для теплового потоку від фронту кристалізації в середовище, яке охолоджується

$$j = \frac{T_k - T_0}{\frac{1}{\alpha} + \frac{R - r}{\lambda}} \quad (5)$$

де  $T_0$  – температура охолоджуючого середовища;

$r(\tau)$  – зміна з часом координата фронту кристалізації;

$\lambda$  – тепlopровідність замороженої частини продукту.

Враховуючи наведене, з (1) отримаємо рівняння теплового балансу з рухомим фронтом для тіла, яке заморожується

$$c \cdot \rho \cdot T' \cdot r = \frac{T_k - T_0}{\frac{1}{\alpha} + \frac{R - r}{\lambda}} + H \cdot \frac{d}{d\tau} r. \quad (6)$$

або

$$-\frac{d}{d\tau}x = CH \cdot \left[ \frac{BT}{1+Bi \cdot (1-x)} - T' \cdot x \right] \quad (7)$$

де  $BT = \frac{a \cdot Bi}{R^2} \cdot (T_k - T_0)$ ,  $CH = \frac{c \cdot \rho}{H}$ ,  $a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$ ,  $Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda}$ ,  $x = \frac{r}{R}$ ;

Рішення диференційного рівняння (7) при початкових умовах  $\tau=0$ ,  $x=R$  має вигляд

$$\begin{aligned} -CH \cdot \tau &= \frac{1}{2 \cdot T'} \cdot \ln \left( \frac{T' \cdot Bi - T' \cdot Bi_1 + BT}{T' \cdot x^2 \cdot Bi - T' \cdot x \cdot Bi_1 + BT} \right) - \frac{Bi_1}{\sqrt{T'} \cdot \sqrt{-4BT \cdot Bi + T' \cdot Bi_1^2}} \times \\ &\times \left[ \operatorname{arth} \left[ \sqrt{T'} \cdot \frac{(-2 \cdot Bi + Bi_1)}{\sqrt{-4 \cdot BT \cdot Bi + T' \cdot Bi_1^2}} \right] + \operatorname{arth} \left[ \sqrt{T'} \cdot \frac{(2 \cdot x \cdot Bi - Bi_1)}{\sqrt{-4BT \cdot Bi + T' \cdot Bi_1^2}} \right] \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

где  $Bi_1 = 1 + Bi$ .

З рівняння (8) випливає розрахункова формула для визначення тривалості заморожування (час досягнення фронтом кристалізації центру тіла  $x=0$ ).

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{-1}{2 \cdot CH \cdot T'} \cdot \ln \left[ \frac{(BT - T')}{BT} \right] - \frac{(1 + Bi)}{\left[ \sqrt{T'} \cdot \sqrt{(1 + Bi)^2 \cdot T' - 4 \cdot BT \cdot Bi} \right]} \times \\ &\times \left[ \operatorname{arth} \left[ \sqrt{T'} \cdot \frac{(1 - Bi)}{\sqrt{(1 + Bi)^2 \cdot T' - 4 \cdot BT \cdot Bi}} \right] - \operatorname{arth} \left[ \sqrt{T'} \cdot \frac{(1 + Bi)}{\sqrt{(1 + Bi)^2 \cdot T' - 4 \cdot BT \cdot Bi}} \right] \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Проведемо перевірку формули (9). Розкладемо  $\tau$  при малих значеннях темпу охолодження  $T' \rightarrow 0$ , нехтуючи членами  $T'^2$  та отримуємо відому формулу Планка

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{(T_k - T_0)} \cdot R \cdot \left( \frac{1}{\lambda} \cdot R + \frac{2}{\alpha} \right) \quad (10)$$

Для того, щоб розрахувати темп охолодження, який визначається різницею температур в центрі тіла та на його поверхні до початку моменту кристалізації використаємо формулу яка була отримана в (7).

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \exp \left[ \frac{-\Gamma \cdot Fo}{\frac{1}{2} \left[ \frac{2}{Bi} + (1 - x^2) \right]} \right] \quad (11)$$

де  $Fo = \frac{a_c}{R^2} \cdot \tau$ ,  $x = \frac{r}{R}$ ,  $Bi_c = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda_c}$ ,  $a_c = \frac{\lambda_c}{c_c \cdot \rho_c}$ .

$\lambda_c$  – теплопровідність не замороженої області;

$c_c$  – питома теплоємність не замороженої області, Дж/кг·К;

$\rho_c$  – густина не замороженої області, кг/м<sup>3</sup>.

З рівняння (11) випливає розрахункова формула для визначення тривалості процесу охолодження. За цей час температура на поверхні тіла ( $x=1$ ), змінюється від початкової  $T_1$  до криоскопічної  $T_k$ .

$$\tau_k = \frac{-\ln \left[ \frac{(T_k - T_0)}{(T_1 - T_0)} \right]}{\Gamma \cdot a_c} \cdot \frac{R^2}{Bi_c} \quad (12)$$

Тоді температуру в центрі тіла ( $x=0$ ) можна розрахувати за формулою

$$T_c = (T_1 - T_0) \cdot \exp \left[ -2 \cdot \Gamma \cdot Fo_k \cdot \frac{Bi_c}{(2 + Bi_c)} \right] + T_0, \quad (13)$$

де  $Fo_k = \frac{a_c}{R^2} \cdot \tau_k$ .

$T_c$  – температура центру не замороженої області.

Відповідно до рівняння (4) темп охолодження не замороженої області, з урахуванням (13) визначається наступним чином

$$T' = \frac{\lambda_c}{c_c \cdot \rho_c} \cdot \frac{(T_1 - T_0) \cdot \exp \left[ -2 \cdot \Gamma \cdot Fo_k \cdot \frac{Bi_c}{(2 + Bi_c)} \right] + T_0 - T_k}{R^2}, \quad (14)$$

**Висновки.** Таким чином запропонована методика розрахунку тривалості охолодження та замороження тривимірних тіл у процесі симетричного теплообміну, яка враховує тепlopідведення від центральної частини тіла, яка має температуру вищу за кріоскопічну.

Спочатку за формулою (12) розраховується тривалість процесу охолодження поверхні тіла до кріоскопічної температури, потім за формулами (14) та (9) розраховувати тривалість процесу заморожування тіла до моменту досягнення у центрі тіла кріоскопічної температури.

Викладений підхід до моделювання процесів заморожування може застосуватись при описанні інших способів заморожування.

Перспективою подальших досліджень у цьому напрямку є експериментальне підтвердження отриманих теоретичних викладок, а також визначення можливості застосування викладеного підходу до розв'язання інших задач динаміки тепло- та масообмінних процесів.

### Література

1. Валентас К.Дж., Ротштейн Э., Сингх Р.П. Пищевая инженерия: Справочник с примерами расчетов: [пер. с англ.], под общ. ред. А.Л. Ишевского. – СПб: Профессия, 2004. – 848 с.
2. Cleland D.J. A generally applicable simple method for prediction of food freezing and thawing times. Proc. XVIII Int. Congr. Refrig. – 1991. – №4. – P. 1884 – 1887.
3. Hossain Md.M., Cleland D.J., Cleland A.C. Prediction of freezing and thawing times for foods of three-dimensional irregular shape by using a semi-analytical geometric factor. Int. J. Refrig. – 1992. – №15. – P. 241 – 246.
4. Чумак І.Г. Холодильні установки: підручник. за ред. І.Г. Чумака. – Одеса: Пальміра; 2006. – 522 с.
5. Pham Q.T. Simplified equation for predicting the freezing time of foodstuffs. J. Food Technol. – 1986. – №21. P. 209 – 219.
6. Потапов В.О., Семенюк Д.П. Математичне моделювання контактного заморожування. Прогресивні техніка та технології харчових виробництв, ресторанного господарства і торгівлі: Зб. наук. праць. / ХДУХТ. – Харків, 2008. Випуск 2 (8). – С. 443-450.
7. Потапов В.О., Сомов О.С. Наближена модель динаміки теплообмінних процесів. Прогресивні техніка та технології харчових виробництв, ресторанного господарства і торгівлі: Зб. наук. праць. / ХДУХТ. – Харків, 2008. Випуск 1 (7) - С.380-388.