УДК 664.1.054, 517.958

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ДВОХВИМІРНОМУ ВИПАДКУ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ З ОДНОРІДНИМИ ГРАНІЧНИМИ УМОВАМИ ДРУГОГО РОДУ ТА НЕОДНОРІДНОЮ ПОЧАТКОВОЮ УМОВОЮ МЕТОДОМ ФУР'Є

Погорілий Т. М., к. т. н., доцент
Національний університет харчових технологій, м. Київ

Представлено аналітичне розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності в двохвимірному випадку по координатам для прямокутної області для однорідного рівняння теплопровідності з однорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою, який було знайдено за допомогою методу розділення змінних Фур'є.

The analytical solve of two dimensions the coordinates unsteady heat conduction problem for the rectangular area for homogeneous heat conduction equation with second kind homogeneous boundary conditions and nonhomogeneous initial conditions, which was found using the Fourier method of variables separation, is presented.

Ключові слова: задача теплопровідності, прямокутна область, однорідне рівняння теплопровідності, однорідні граничні умови другого роду, неоднорідні початкові умови.

Вступ: наступним етапом при створенні математичної моделі асиметричного процесу рекристалізації [1, 2], а саме, — процесу теплообміну між одночасно контактуючими різними за розмірами комірками розчину сахарози було вирішення нестаціонарної задачі теплопровідності для випадку однорідного рівняння теплопровідності з однорідними граничними умовами та неоднорідною початковою умовою. Оскільки задача розв'язувалась в найбільш загальному вигляді методами математичної фізики, то, зазначимо, що не зменшуючи загальності, отриманий розв'язок шуканої задачі можливо застосовувати і в інших галузях науки та техніки, котрі пов'язані з такого роду проблематикою.

Постановка задачі: знайти аналітичне розв'язання нестаціонарного рівняння теплопровідності в двохвимірному випадку для прямокутної області (рис. 1) [3, 4]:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

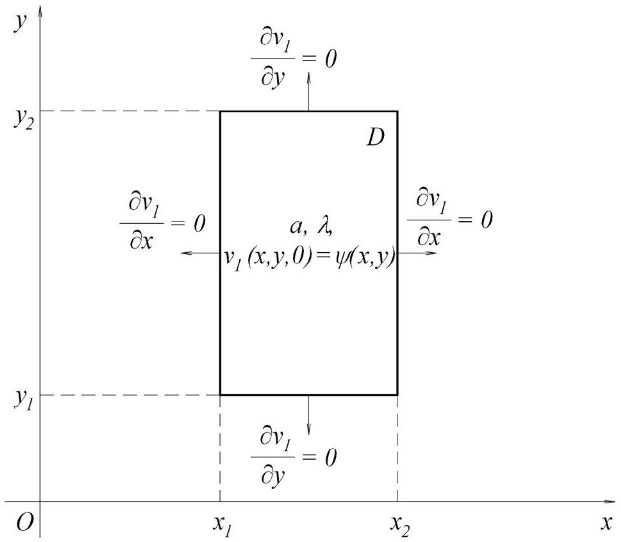

Рис. 1 – Нестаціонарна задача теплопровідності для двохвимірної прямокутної області D з однорідними граничними умовами та неоднорідною початковою умовою

де v1(x,y,t), °C — функція розподілу температури в прямокутній області D={(x,y)|x1≤x≤x2, y1≤y≤y2}, в залежності від координат x, y, м та часу t, с;

$a = \dfrac{\lambda}{c \cdot \rho}$, м/с2 — коефіцієнт температуропровідності;

λ, Вт/(м·К) — коефіцієнт теплопровідності;

с, кДж/(кг·К) — теплоємність;

ρ, кг/м3 — густина речовини, з однорідними граничними умовами другого роду (рис. 1):

$$\left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1 \\ y_1 \le y \le y_2}} = 0, \quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2 \\ y_1 \le y \le y_2}} = 0, \quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1 \\ x_1 \le x \le x_2}} = 0, \quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2 \\ x_1 \le x \le x_2}} = 0, \quad (t \ge 0), \tag{2}$$

та наступною неоднорідною початковою умовою:

$$v_1(x,y,t)\big|_{t=0} = \psi(x,y), \; (x_1 \le x \le x_2, \; y_1 \le y \le y_2). \tag{3}$$

Розв'язання задачі: Знаходження розв'язку даної задачі проводилось з використанням методу розділення змінних Фур'є [3, 4].

Спочатку знайдемо часткові розв'язки рівняння (1) вигляду

$$v_1(x,y,t) = X_1(x) \cdot Y_1(y) \cdot T_1(t) \ne 0, \tag{4}$$

тобто, таких, що тотожньо не дорівнюють нулю.

Підставляючи вираз (4) в диференціальне рівняння (1), отримаємо:

$$T_1'(t) \cdot X_1(x) \cdot Y_1(y) = a \cdot T_1(t) \cdot \left(X_1''(x) \cdot Y_1(y) + X_1(x) \cdot Y_1''(y)\right), \tag{5}$$

або, розділивши рівняння (5) зліва та справа на вираз (4), в силу того, що вираз (4) тотожньо не дорівнює нулю, отримаємо:

$$\frac{T_1'(t)}{a \cdot T_1(t)} = \frac{X_1''(x)}{X_1(x)} + \frac{Y_1''(y)}{Y_1(y)} = -\left(\alpha^2 + \beta^2\right), \tag{6}$$

де α2= const та β2 = const — постійні.

Остання рівність (6), ліва частина якої залежить тільки від t, а права — тільки від x та y, — можлива лише в тому випадку, коли загальна величина відношень (6) буде постійною, тобто обидві її частини не залежать ні від x, ні від y, ні від t, тобто, являють собою одну і ту ж сталу величину. Позначимо цю сталу величину через суму двох постійних $-\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$. В свою чергу, оскільки права частина залежить від x та y одночасно і, в той же час, дорівнює деякій сталій величині, перший вираз з відношенням, що залежить від x, — позначимо через $-\alpha^2$, а другий вираз з відношенням, що залежить від y, — позначимо через $-\beta^2$. Таким чином, з рівняння в частинних похідних (1) отримуємо три окремих звичайних диференціальних рівняння [5]:

$$T_1'(t) + a \cdot \left(\alpha^2 + \beta^2\right) \cdot T_1(t) = 0, \tag{7}$$

$$X_1''(x) + \alpha^2 \cdot X_1(x) = 0, \tag{8}$$

$$Y_1''(y)(x) + \beta^2 \cdot Y_1(y) = 0, \tag{9}$$

в чому і полягає суть метода Фур'є.

Щоб отримати нетривіальні розв'язки рівняння (1) вигляду (4), що задовольняють граничним умовам (2), необхідно знайти нетривіальні розв'язки рівняння (8), що задовольняють наступним граничним умовам:

$$X_1'(x)\big|_{x=x_1} = 0, \quad X_1'(x)\big|_{x=x_2} = 0, \tag{10}$$

та знайти нетривіальні розв'язки рівняння (9), що задовольняють наступним граничним умовам:

$$Y_1'(y)\big|_{y=y_1} = 0, \quad Y_1'(y)\big|_{y=y_2} = 0, \tag{11}$$

Розглянемо окремо розв'язок задачі рівнянь (8), (10) для знаходження шуканих функцій X1(x) та розв'язок задачі (9), (11) для знаходження шуканих функцій Y1(y).

Таким чином, для визначення функцій X1(x) ми приходимо до задачі про власні значення [4]:

$$X_1''(x)+\alpha^2\cdot X_1(x)=0,\quad X_1'(x)\big|_{x=x_1}=0,\quad X_1'(x)\big|_{x=x_2}=0 \qquad (12)$$

яка була досліджена в [4] для випадку задачі про розповсюдження тепла в області, що визначена на проміжку $0\le x\le l$. Розв'язуючи задачу для нашого, більш загального випадку, коли розглядувана прямокутна область D, (рис. 1), визначена по змінній x на проміжку $x_1\le x\le x_2$, отримаємо, що тільки для значень параметра α, рівних:

$$\alpha=\frac{m\pi}{x_2-x_1},\quad (m=0,1,2,\ldots) \qquad (13)$$

існують нетривіальні розв'язки задачі (12):

$$X_{1_m}(x)=\cos\frac{m\pi(x-x_1)}{x_2-x_1},\quad (m=0,1,2,\ldots) \qquad (14)$$

Розглянемо тепер розв'язок задачі (9), (11) для знаходження функцій Y1(y), що залежать від змінної y розглядуваної прямокутної області D, (рис. 1). Проводячи аналогічні дослідження, знову ж приходимо до задачі про власні значення:

$$Y_1''(y)(x)+\beta^2\cdot Y_1(y)=0,\quad Y_1'(y)\big|_{y=y_1}=0,\quad Y_1'(y)\big|_{y=y_2}=0 \qquad (15)$$

Розв'язуючи задачу для даного випадку, коли розглядувана прямокутна область D, (рис. 1), визначена по змінній y на проміжку $y_1\le y\le y_2$, отримаємо, що тільки для значень параметра β рівних

$$\beta=\frac{n\pi}{y_2-y_1},\quad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (16)$$

існують нетривіальні розв'язки задачі (15):

$$Y_{1_n}(y)=\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{y_2-y_1},\quad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (17)$$

Значенням параметру $\alpha=\alpha m$, $(m\ge 0)$, та $\beta=\beta n$, $(n\ge 0)$, відповідають наступні розв'язки рівняння (7):

$$T_1(t)=A_{m,n}\cdot e^{-a\cdot\left(\left(\frac{m\pi}{x_2-x_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{y_2-y_1}\right)^2\right)\cdot t},\quad (m,n=0,1,2,\ldots), \qquad (18)$$

де $A_{m,n},(m\ge 0,n\ge 0)$, — довільні сталі. Отже, всі функції:

$$v_{1_{m,n}}(x,y,t)=X_{1_m}(x)\cdot Y_{1_n}(y)\cdot T_{1_{m,n}}(t)=$$
$$=A_{m,n}\cdot e^{-a\cdot\left(\left(\frac{m\pi}{x_2-x_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{y_2-y_1}\right)^2\right)\cdot t}\cdot\cos\frac{m\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{y_2-y_1},\quad (m,n=0,1,2,\ldots), \qquad (19)$$

задовольняють рівнянню (1) та граничним умовам (2) при довільних сталих $A_{m,n},(m\ge 0,n\ge 0)$.

Складемо ряд

$$v_1(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}X_{1_m}(x)\cdot Y_{1_n}(y)\cdot T_{1_{m,n}}(t)=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{m,n}\cdot e^{-a\cdot\left(\left(\frac{m\pi}{x_2-x_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{y_2-y_1}\right)^2\right)\cdot t}\cdot\cos\frac{m\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{y_2-y_1}, \qquad (20)$$

Вимагаючи виконання початкової умови (3), отримаємо

$$v_1(x,y,0)=\psi(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{m,n}\cdot\cos\frac{m\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{y_2-y_1}, \qquad (21)$$

Написаний ряд представляє собою розклад заданої функції ψ(x,y) в подвійний ряд Фур'є [4] по косинусам відповідно на проміжку [x1, x2] по змінній x, та, відповідно, на проміжку [y1, y2] по змінній y. Коефіцієнти $A_{m,n},(m\ge 0,n\ge 0)$, визначаються за наступними формулами [6]:

$$A_{0,0} = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta , \qquad (22)$$

$$A_{m,0} = \frac{2}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi(\xi, \eta) \cdot \cos \frac{m\pi(\xi - x_1)}{x_2 - x_1} d\xi d\eta, \quad (m = 1, 2, \ldots) , \qquad (23)$$

$$A_{0,n} = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{2}{y_2 - y_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi(\xi, \eta) \cdot \cos \frac{n\pi(\eta - y_1)}{y_2 - y_1} d\xi d\eta, \quad (n = 1, 2, \ldots) , \qquad (24)$$

$$A_{m,n} = \frac{2}{x_2 - x_1} \cdot \frac{2}{y_2 - y_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi(\xi, \eta) \cdot \cos \frac{m\pi(\xi - x_1)}{x_2 - x_1} \cdot \cos \frac{n\pi(\eta - y_1)}{y_2 - y_1} d\xi d\eta, \quad (m, n = 1, 2, \ldots) . \qquad (25)$$

Таким чином, аналітичним розв’язком нестаціонарного однорідного рівняння теплопровідності (1) в двохвимірному випадку для прямокутної області D, (1), з однорідними граничними умовами другого роду (2) та неоднорідною початковою умовою (3), буде подвійний ряд (20), де сталі коефіцієнти $A_{m,n}, (m \geq 0, n \geq 0)$, визначаються з рівнянь (22)–(25).

Висновок: за допомогою застосування методу розділення змінних Фур’є знайшли аналітичне розв’язання поставленої нестаціонарної задачі теплопровідності в двохвимірному випадку для випадку однорідного рівняння теплопровідності для прямокутної області (1) з однорідними граничними умовами другого роду (2) та неоднорідною початковою умовою (3), остаточний розв’язок якої записано через вираз (20), де сталі коефіцієнти $A_{m,n}, (m \geq 0, n \geq 0)$, визначаються з рівнянь (22)–(25).

Література

1. Погорелый Т. М., Мирончук В. Г. Математическое моделирование процесса рекристаллизации на основании аналитических решений нестационарных задач теплопроводности в двухмерном случае для прямоугольных областей с неоднородными (непрерывными и разрывными на одной из сторон) граничными условиями и неоднородными начальными условиями // Тезисы докладов и сообщений XIV Минского международного форума по тепло- и массообмену, 10–13 сентября 2012 г. – Том 1, Часть 2. – Минск.: Інститут тепло- и массобмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, 2012. – С. 761–764.
2. Погорілий Т. М., Мирончук В. Г. Знаходження розв’язку однорідного рівняння теплопровідності з однорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою для двовимірного випадку в аналітичному вигляді // Програма і матеріали 77-ої наукової конференції молодих учених, аспірантів і студентів «Наукові здобутки молоді — вирішенню проблем харчування людства у XXI столітті», 11–12 квітня 2011 р. – Частина II. – К.: НУХТ, 2011. – С. 74.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
5. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982. – 331 с.
6. Воробьев Н. Н. Теория рядов. Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. . – 408 с.