Література

1. Погорелый Т. М., Мирончук В. Г. Математическое моделирование процесса рекристаллизации на основании аналитических решений нестационарных задач теплопроводности в двухмерном случае для прямоугольных областей с неоднородными (непрерывными и разрывными на одной из сторон) граничными условиями и неоднородными начальными условиями // Тезисы докладов и сообщений XIV Минского международного форума по тепло- и массообмену, 10–13 сентября 2012 г. – Том 1, Часть 2. – Минск.: Інститут тепло- и массобмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, 2012. – С. 761–764.
2. Погорілий Т. М., Мирончук В. Г. Знаходження розв'язку неоднорідного рівняння теплопровідності з однорідними граничними умовами другого роду та однорідною початковою умовою для двовимірного випадку в аналітичному вигляді // Програма і матеріали 77-ої наукової конференції молодих учених, аспірантів і студентів «Наукові здобутки молоді — вирішенню проблем харчування людства у XXI столітті», 11–12 квітня 2011 р. – Частина II. – К.: НУХТ, 2011. – С. 74–75.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
5. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982. – 331 с.

УДК 664.1.054, 517.958

АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ДВОХВИМІРНОМУ ВИПАДКУ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ З НЕОДНОРІДНИМИ ГРАНІЧНИМИ УМОВАМИ ДРУГОГО РОДУ ТА НЕОДНОРІДНОЮ ПОЧАТКОВОЮ УМОВОЮ МЕТОДОМ ФУР'Є

Погорілий Т. М., к. т. н., доцент
Національний університет харчових технологій, м. Київ

Представлено аналітичне розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності в двохвимірному випадку по координатам для прямокутної області з неоднорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою, який було знайдено за допомогою методу розділення змінних Фур'є.

The analytical solve of two dimensions the coordinates unsteady heat conduction problem for the rectangular area with second kind nonhomogeneous boundary conditions and nonhomogeneous initial conditions, which was found using the Fourier method of variables separation, is presented.

Ключові слова: задача теплопровідності, прямокутна область, граничні умови другого роду.

Вступ: одним з етапів при створенні математичної моделі асиметричного процесу рекристалізації [1], а саме, — процесу теплообміну між одночасно контактуючими різними за розмірами комірками розчину сахарози було вирішення наступної нестаціонарної задачі теплопровідності. Оскільки задача розв'язувалась в найбільш загальному вигляді методами математичної фізики, то, зазначимо, що не зменшуючи загальності, отриманий розв'язок шуканої задачі можливо застосовувати і в інших галузях науки та техніки, котрі пов'язані з такого роду проблематикою.

Постановка задачі: знайти аналітичний розв'язок нестаціонарного рівняння теплопровідності в двохвимірному випадку для прямокутної області (рис. 1) [2, 3, 4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad (1)$$

де u(x,y,t), °C — функція розподілу температури в прямокутній області D={(x,y)|x1≤x≤x2, y1≤y≤y2}, в залежності від координат x, y, м та часу t, с;

$a = \dfrac{\lambda}{c \cdot \rho}$, м/с2 — коефіцієнт температуропровідності;

λ, Вт/(м·К) — коефіцієнт теплопровідності; с, кДж/(кг·К) — теплоємність;

ρ, кг/м3 — густина речовини, з неоднорідними граничними умовами другого роду (рис. 1):

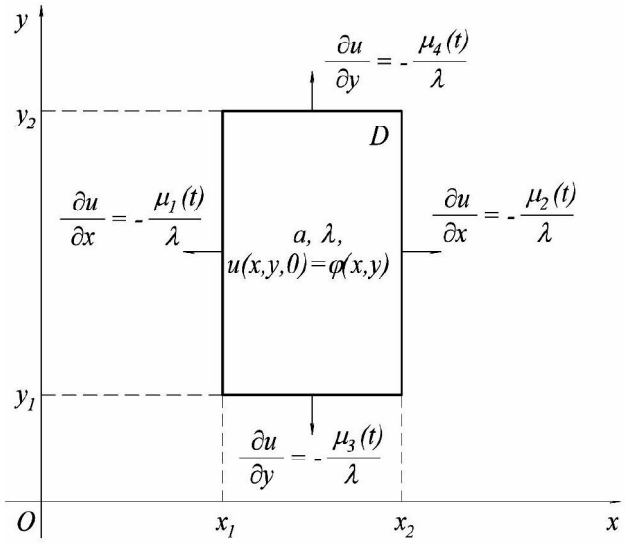

Рис. 1 – Нестаціонарна задача теплопровідності для двохвимірної прямокутної області D з неоднорідними граничними умовами та неоднорідною початковою умовою

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}} = -\frac{\mu_1(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}} = -\frac{\mu_2(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}} = -\frac{\mu_3(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}} = -\frac{\mu_4(t)}{\lambda},\quad (t\ge 0), \tag{2}$$

та наступною неоднорідною початковою умовою:

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = \varphi(x,y),\ (x_1 \le x \le x_2,\ y_1 \le y \le y_2). \tag{3}$$

Розв'язання задачі: Знаходження розв'язку даної задачі проводилось з використанням методу розділення змінних Фур'є [3, 4]. Зауважимо, що безпосередньо застосовувати метод Фур'є розділення змінних для розв'язання поставленої нестаціонарної задачі теплопровідності (1)–(3) в даному випадку неможливо в силу неоднорідних (тотожно не рівних нулю) граничних умов (2). Виходячи з цього, задача (1)–(3) була зведена до такого вигляду, коли вже буде можливе безпосереднє застосування методу Фур'є [3, 4]. Розв'язок задачі (1)–(3) шукався у вигляді суми двох функцій v(x,y,t) та U(x,y,t):

$$u(x,y,t) = v(x,y,t) + U(x,y,t), \tag{4}$$

де функцію U(x,y,t) обрано таким чином, щоб задовольнялись неоднорідні граничні умови (2), тобто:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}} = -\frac{\mu_1(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}} = -\frac{\mu_2(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}} = -\frac{\mu_3(t)}{\lambda},\quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}} = -\frac{\mu_4(t)}{\lambda},\quad (t\ge 0). \tag{5}$$

Легко бачити, що шукана функція U(x,y,t) матиме наступний вигляд:

$$U(x,y,t) = -\frac{1}{\lambda\cdot(x_2-x_1)}\left[x\cdot\left(x_2\cdot\mu_1(t) - x_1\cdot\mu_2(t)\right) + \frac{x^2}{2}\cdot\left(\mu_2(t)-\mu_1(t)\right)\right] - \\ -\frac{1}{\lambda\cdot(y_2-y_1)}\left[y\cdot\left(y_2\cdot\mu_3(t) - y_1\cdot\mu_4(t)\right) + \frac{y^2}{2}\cdot\left(\mu_4(t)-\mu_3(t)\right)\right]. \tag{6}$$

Таким чином, в силу граничних умов (2) та початкової умови (3), а також вибору функції U(x,y,t), що задовольняє граничні умови (5), шукана функція v(x,y,t), в свою чергу, повинна задовольняти наступні граничні умови:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}} - \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}} = 0,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}} = 0,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}} = 0,\quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}} = 0,\quad (t\ge 0), \tag{7}$$

а також наступній початковій умові:

$$v(x,y,t)\big|_{t=0} = u(x,y,t)\big|_{t=0} - U(x,y,t)\big|_{t=0} = \psi(x,y). \tag{8}$$

Відповідно, функція $\psi(x,y)$, виходячи з умови (8), буде дорівнювати:

$$\psi(x,y) = \varphi(x,y) + \frac{1}{\lambda\cdot(x_2-x_1)}\left[x\cdot(x_2\cdot\mu_1(0) - x_1\cdot\mu_2(0)) + \frac{x^2}{2}\cdot(\mu_2(0)-\mu_1(0))\right] + \\ + \frac{1}{\lambda\cdot(y_2-y_1)}\left[y\cdot(y_2\cdot\mu_3(0) - y_1\cdot\mu_4(0)) + \frac{y^2}{2}\cdot(\mu_4(0)-\mu_3(0))\right]. \tag{9}$$

Диференціальне рівняння теплопровідності для функції v(x,y,t) на основі (4) запишеться в наступному вигляді:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + a\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial U}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \tag{10}$$

де функція $f(x,y,t)$, в свою чергу, буде знаходитись з наступного виразу:

$$f(x,y,t) = a\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial U}{\partial t} = \\ = -\frac{1}{\lambda\cdot(x_2-x_1)}\left[a(\mu_2(t)-\mu_1(t)) - x\cdot(x_2\cdot\mu_1'(t) - x_1\cdot\mu_2'(t)) - \frac{x^2}{2}\cdot(\mu_2'(t)-\mu_1'(t))\right] - \\ - \frac{1}{\lambda\cdot(y_2-y_1)}\left[a(\mu_4(t)-\mu_3(t)) - y\cdot(y_2\cdot\mu_3'(t) - y_1\cdot\mu_4'(t)) - \frac{y^2}{2}\cdot(\mu_4'(t)-\mu_3'(t))\right]. \tag{11}$$

Таким чином, в силу неоднорідності диференціального рівняння (10) та неоднорідної початкової умови (8), застосувати метод розділення змінних Фур'є для знаходження вже нової шуканої функції v(x,y,t) все ще не представляється можливим. В силу цього, подамо функцію v(x,y,t) у вигляді суми двох функцій v1(x,y,t) та v2(x,y,t):

$$v(x,y,t) = v_1(x,y,t) + v_2(x,y,t). \tag{12}$$

Зазначимо, що функція v1(x,y,t), при цьому, обирається такою, щоб задовольнити наступне нестаціонарне однорідне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right), \tag{13}$$

з наступними однорідними на основі (7) граничними умовами:

$$\left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}} = 0,\quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}} = 0,\quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}} = 0,\quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}} = 0, \tag{14}$$

та наступною неоднорідною початковою умовою:

$$v_1(x,y,t)\big|_{t=0} = \psi(x,y), \tag{15}$$

враховуючи, що функція ψ(x,y) знаходиться з виразу (9).

Тоді, в силу вибору таких умов для функції v1(x,y,t), функція v2(x,y,t) буде задовольняти наступне нестаціонарне неоднорідне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \tag{16}$$

з наступними однорідними граничними умовами:

$$\left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_1\\ y_1\le y\le y_2}} = 0,\quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_2\\ y_1\le y\le y_2}} = 0,\quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_1\\ x_1\le x\le x_2}} = 0,\quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_2\\ x_1\le x\le x_2}} = 0,\quad (t\ge 0), \tag{17}$$

та наступною однорідною початковою умовою:

$$v_2(x,y,t)\big|_{t=0}=0 \quad (18)$$

Оскільки в силу вибору функції U(x,y,t) (6) граничні умови (14) вже однорідні, то при безпосередньому застосуванні до задачі теплопровідності (13)–(15) методу розділення змінних Фур'є, розв'язок для функції v1(x,y,t) запишеться в наступному вигляді [5]:

$$v_1(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{m,n}\cdot e^{-a\cdot\left(\left(\frac{m\pi}{x_2-x_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{y_2-y_1}\right)^2\right)\cdot t}\cdot\cos\frac{m\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{y_2-y_1}, \quad (19)$$

де коефіцієнти $A_{m,n},(m\ge 0,n\ge 0)$, знаходяться з наступних виразів:

$$A_{0,0}=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad (20)$$

$$A_{m,0}=\frac{2}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)\cdot\cos\frac{m\pi(\xi-x_1)}{x_2-x_1}d\xi d\eta,\quad (m\ge 1), \quad (21)$$

$$A_{0,n}=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{2}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)\cdot\cos\frac{n\pi(\eta-y_1)}{y_2-y_1}d\xi d\eta,\quad (n\ge 1), \quad (22)$$

$$A_{m,n}=\frac{2}{x_2-x_1}\cdot\frac{2}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\psi(\xi,\eta)\cdot\cos\frac{m\pi(\xi-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(\eta-y_1)}{y_2-y_1}d\xi d\eta,\quad (m,n\ge 1). \quad (23)$$

Розв'язок задачі теплопровідності (16)–(18) для функції v2(x,y,t), в свою чергу, запишеться в наступному вигляді [6]:

$$v_2(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}T_{2_{m,n}}(t)\cdot\cos\frac{m\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(y-y_1)}{y_2-y_1}, \quad (24)$$

де, відповідно, коефіцієнти $T_{2_{m,n}}(t),(m\ge 0,n\ge 0)$, знаходяться з наступних виразів:

$$T_{2_{m,n}}(t)=\int_0^t e^{-a\cdot\left(\left(\frac{m\pi}{x_2-x_1}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{y_2-y_1}\right)^2\right)\cdot(t-\tau)}\cdot f_{m,n}(\tau)d\tau,\quad (m,n\ge 0). \quad (25)$$

Коефіцієнти $f_{m,n}(t),(m\ge 0,n\ge 0)$, в свою чергу, знаходяться з наступних виразів:

$$f_{0,0}(t)=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(\xi,\eta,t)d\xi d\eta, \quad (26)$$

$$f_{m,0}(t)=\frac{2}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(\xi,\eta,t)\cdot\cos\frac{m\pi(\xi-x_1)}{x_2-x_1}d\xi d\eta,\quad (m\ge 1), \quad (27)$$

$$f_{0,n}(t)=\frac{1}{x_2-x_1}\cdot\frac{2}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(\xi,\eta,t)\cdot\cos\frac{n\pi(\eta-y_1)}{y_2-y_1}d\xi d\eta,\quad (n\ge 1), \quad (28)$$

$$f_{m,n}(t)=\frac{2}{x_2-x_1}\cdot\frac{2}{y_2-y_1}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(\xi,\eta,t)\cdot\cos\frac{m\pi(\xi-x_1)}{x_2-x_1}\cdot\cos\frac{n\pi(\eta-y_1)}{y_2-y_1}d\xi d\eta,\quad (m,n\ge 1) \quad (29)$$

де функція $f(x,y,t)$ в підінтегральних виразах (26)–(29) записується на основі виразу (10).

Остаточно, розв'язок вихідної нестаціонарної задачі теплопровідності (1)–(3) на основі (4) та (12) буде записано через суму функцій:

$$u(x,y,t)=U(x,y,t)+v_1(x,y,t)+v_2(x,y,t), \quad (30)$$

де функція U(x,y,t) представлена виразом (6);

функція $v_1(x,y,t)$ — виразом (19),

де коефіцієнти $A_{m,n}, (m \geq 0, n \geq 0)$, в свою чергу, знаходяться з виразів (20)–(23);

функція $v_2(x,y,t)$ — представлена виразом (24),

де шукані коефіцієнти $T_{2_{m,n}}(t), (m \geq 0, n \geq 0)$ та $f_{m,n}(t), (m \geq 0, n \geq 0)$ знаходяться відповідно з виразів (25) та (26)–(29).

Висновок: за допомогою введення функції U(x,y,t), що записана виразом (6) та розкладанні функції v(x,y,t) (12) на суму двох функцій v1(x,y,t) та v2(x,y,t), що відповідно задовольняють диференціальні рівняння теплопровідності в частинних похідних (13) та (16) з відповідними однорідними граничними (14) та (17) і початковими (15) та (18) умовами, стало можливим застосувати метод розділення змінних Фур'є в кожному з випадків для розв'язання поставленої нестаціонарної задачі теплопровідності в двохвимірному випадку для прямокутної області (1) з неоднорідними граничними умовами другого роду (2) та неоднорідною початковою умовою (3), остаточний розв'язок якої записано через вираз (30).

Література

1. Погорелый Т. М., Мирончук В. Г. Математическое моделирование процесса рекристаллизации на основании аналитических решений нестационарных задач теплопроводности в двухмерном случае для прямоугольных областей с неоднородными (непрерывными и разрывными на одной из сторон) граничными условиями и неоднородными начальными условиями // Тезисы докладов и сообщений XIV Минского международного форума по тепло- и массообмену, 10–13 сентября 2012 г. – Том 1, Часть 2. – Минск.: Інститут тепло- и массобмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, 2012. – С. 761–764.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
3. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
4. Корн Г., Корн Т., Справочник по математике (для научных сотрудников и инженеров). – М.: Наука, 1974. – 832 с.
5. Погорілий Т. М., Мирончук В. Г. Знаходження розв'язку однорідного рівняння теплопровідності з однорідними граничними умовами другого роду та неоднорідною початковою умовою для двовимірного випадку в аналітичному вигляді // Програма і матеріали 77-ої наукової конференції молодих учених, аспірантів і студентів «Наукові здобутки молоді — вирішенню проблем харчування людства у XXI столітті», 11–12 квітня 2011 р. – Частина II. – К.: НУХТ, 2011. – С. 74.
6. Погорілий Т. М., Мирончук В. Г. Знаходження розв'язку неоднорідного рівняння теплопровідності з однорідними граничними умовами другого роду та однорідною початковою умовою для двовимірного випадку в аналітичному вигляді // Програма і матеріали 77-ої наукової конференції молодих учених, аспірантів і студентів «Наукові здобутки молоді — вирішенню проблем харчування людства у XXI столітті», 11–12 квітня 2011 р. – Частина II. – К.: НУХТ, 2011. – С. 74–75.