УДК 519.711.2

ПАНКРАТОВ В.А.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Предложены математические модели, базирующиеся на использовании свойств полиномов Чебышева, системном подходе к восстановлению функций с требуемой практической точностью приближения по дискретно заданным выборкам и построении прогноза на краткосрочный или долгосрочный временной период. Достоверность и реализуемость математических моделей обосновываются на примере сопоставления восстановленных аппроксимирующих функций с распределениями для стандартных функций.

The mathematical models which is based on using of shifted Chebyshev polynomials properties, the system approach of approximating function recovery with required practical accuracy with discretely set samples and construction of the forecast for the short-term or long-term time period are presented. Reliability and realizability of mathematical models are proved by the example of comparison of recovered approximating functions to the distributions for standard functions.

ВВЕДЕНИЕ

Современная жизнь тесно связана с окружающими факторами внешней среды. Природные явления могут наносить катастрофический ущерб в различных областях человеческой деятельности. Например, солнечная активность влияет на среднюю температуру на Земле, что может повлечь глобальное изменение климата [1]. Обилие осадков способствует наводнениям и оползням, а скудное их количество ведет к засухе. Естественное желание человека предотвратить кризисные ситуации или, если это не возможно, быть подготовленным к их возникновению. Поэтому актуальным остается разработка математических моделей системного анализа нестационарных экологически опасных процессов и построении прогноза на базе заданной дискретной выборки данных различных экологических процессов с требуемой точностью ошибки аппроксимации.

Основные задачи системного анализа, мониторинга и прогнозирования

динамики нестационарных процессов непосредственно связаны с задачами прогноза погоды, поскольку, с одной стороны, перенос влажности является важной составной частью динамики атмосферных движений и определяет такие практически важные элементы погоды как облачность и осадки, а, с другой стороны, осадки являются непосредственными причинами различных нестационарных экологических процессов. Поэтому при выборе подхода к решению задач динамики нестационарных процессов целесообразно учитывать основные идеи, характерные для подходов к решению задач динамической метеорологии и прогноза погоды. Известно два основных направления в динамической метеорологии:

- направление, которое включает динамико-численные подходы, базарую-щиеся на численных методах решения различных видов уравнений гидро-термодинамики атмосферных процессов [2-4];
- направление, которое включает динамико-статистические подходы, базарую-щиеся на использовании многолетних статистических данных, которыми располагает международная система анализа и прогноза погоды [5,6].

Первое направление ориентировано на решение следующих основных задач: выявление текущих пространственно-временных взаимосвязей между различными атмосферными процессами в динамике наблюдений; обнаружение на этой основе важнейших динамических пространственно-временных закономерностей текущих природных процессов; формирование моделей природных процессов для прогноза погоды малой заблаговременности (3-5 суток). Основной целью таких подходов является, по существу, формирование информационной базы для краткосрочного прогноза, так как они обеспечивают оперативное выявление в течение 3-5 суток характерных свойств динамики исследуемых атмосферных процессов, что является основой для описания основных свойств и особенностей атмосферных процессов в пределах краткосрочного прогноза. Однако такие подходы принципиально неприменимы для системного анализа и прогнозирования нестационарных процессов, поскольку не позволяет учитывать ряд принципиально неустранимых, специфических свойств и особенностей нестационарных процессов.

Второе направление включает подходы, которые ориентированы на выявление фундаментальных пространственно-временных закономерностей природных процессов, которые характерны для атмосферных процессов в течение десятилетий. Основной целью этих подходов является, по существу, установление на основе многолетних статистических данных глубоких пространственно-временных корреляционных связей между различными атмосферными процессами. Подходы данного направления отрывают потенциальную возможность учитывать временной разнос причин и результатов воздействия нестационарных процессов.

Таким образом, из сказанного следует, что построение математического аппарата анализа динамики нестационарных процессов целесообразно выполнять на основе идей динамико-статистических подходов, но с учетом специфических особенностей и свойств нестационарных процессов.

1. Постановка задачи системного анализа динамики нестационарных процессов

Анализ специфических особенностей и свойств нестационарных процессов выполняется на основе подхода к формированию методологического и математического аппарата системы информационного обеспечения мониторинга нестационарных экологических процессов [7]. Подход базируется на системной методологии и позволяет разработать однотипные методы и программы для решения основных задач мониторинга нестационарных процессов. Основная идея подхода – на основе единой обобщенной постановки задачи системного анализа нестационарных процессов и единой базовой модели [8] обеспечить системно согласованную взаимосвязь различных информационных процессов системного анализа, мониторинга и прогнозирования нестационарных процессов.

Цель данной статьи в расширение подхода [7] предложить математические модели динамики медленно и быстро осциллирующих процессов, позволяющие по дискретно заданной выборке получить требуемую точность аппроксимации исследуемых закономерностей, что позволит обеспечить практически приемлемый уровень достоверности и своевременность принятия решения в динамике мониторинга нестационарных процессов.

Здесь и далее понятия медленно и быстро осциллирующие процессы характеризуют соответственно медленные и быстрые изменения во времени интенсивности нестационарных процессов.

2. Математическая модель системного анализа нестационарных процессов

Для реализации данных условий необходимо обеспечить определенную адаптацию базовой модели к специфике исследуемых процессов. Для достижения данной цели приближающие функции представляются в следующей форме

$$F(t) = 0{,}5a_0 + \sum_{n=n_1}^{N} a_n T_n^*(t)\,; \Phi(\tau) = 0{,}5a_0 + \sum_{n=n_1}^{N} a_n T_n^*(\tau) \quad (1)$$

$$t \in [t_0^-, t_0^+]\,,\ \tau\ \in [0,1],\ \mathrm{A} = \{a_0; a_n \big| n = \overline{n_1, N};\ 1 \le n_1 < N\}.$$

Данная форма представления приближающих функций позволяет ЛПР в динамике интерактивного режима выбирать степень n_1 полиномов Чебышева и тем самым обеспечить требуемую точность аппросимации.

Математическая постановка задачи

Заданы дискретные значения $F_0(t)$ неизвестной функции $f_0(t)$, определяемой нестационарным процессом, в дискретные моменты времени $t_n \in T_0$, $T_0 = \{t_n \big| t_0^- \le t_n \le t_0^+; n = \overline{1, N}\}$, $D_0 = \{t \big| t_0^- \le t \le t_0^+\}$ в виде массива $M_0 = \{\langle t_n, F_0(t_n)\rangle, t_n \in T_0; n = \overline{1, N}\}$.

Требуется:

- восстановить функцию $\Phi_0(t)$, которая обеспечивает практическую точность аппроксимации функции $f_0(t)$ на интервале $[t_0^-, t_0^+]$;
- найти такие приближающие функции $F_i(t)$, которые с практически приемлемой точностью характеризуют истинные неизвестные зависимости динамики исследуемого процесса за период D_0;
- выполнить краткосрочный и/или долгосрочный прогноз динамики исследуемого процесса на период $D_0^+ = \{t \big| t_0^+ < t < t^+\}$.

Восстановление функции $\Phi_0(t)$ предлагается выполнять на основе математической модели, основанной на итерационной процедуре последовательного приближения в виде [9]

$$\Phi(\tau) = \Phi_{01}(\tau) + \Phi_{02}(\tau) + \ldots + \Phi_{0p}(\tau) + \ldots, \quad (2)$$

которая позволяет уменьшить величину максимальной абсолютной невязки

$$\Delta = \max_{\tau_n \in D_\tau} \left| F(\tau_n) - \Phi(\tau_n) \right| \quad (3)$$

и повысить точность приближающих функций без изменения объема исходной выборки. Здесь

$$\Phi(\tau) = 0{,}5a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n T_n^*(\tau)\,,\ \ F(t) \Leftrightarrow \Phi(\tau)\,. \quad (4)$$

Функция $\Phi_0(t)$ формируется по смещенным полиномам Чебышева $T_k^*(t)$ в интервале [0,1] в виде

$$\Phi_0(\tau) = 0{,}5a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k T_k^*(\tau). \tag{5}$$

При выполнении условий (4), (5) ненормированные исходные данные преобразуются в нормированные переменные с учетом введения нормированного время по формуле:

$$\tau = (t - t_0^-)/(t_1^+ - t_0^1), \quad \tau \in [0,1]. \tag{6}$$

Для получения практически необходимой точности восстановления функциональной зависимости по заданной дискретной выборке привлечение предлагаемого приема последовательного приближения базовых функций $\Phi(\tau)$ и $F(t)$ позволяет уменьшить величину максимальной абсолютной невязки (3) и повысить точность приближающих функций без изменения объема исходной выборки. В соответствии с этим выполняется первое приближение $\Phi_{01}(\tau)$ структуры функции $\Phi(\tau)$ (2) в виде

$$\Phi_{01}(\tau) = 0{,}5a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_{1k} T_{1k}^*(\tau), \tag{7}$$

где неизвестные коэффициенты $\left\| a_{1k} \right\|$ определяются из системы уравнений

$$F_0(\tau_n) = \sum_{k=0}^{m} a_{1k} T_{1k}^*(\tau_n), \quad n = \overline{1,N}. \tag{8}$$

Система уравнений (8) представляет собой несовместную линейную систему уравнений, которая решается в теории приближений методом МНК.

Определяется величина невязки для первого приближения:

$$\Delta_{01}(\tau_n) = \max_{\tau_n \in D_\tau} \left| F(\tau_n) - \Phi_{01}(\tau_n) \right|$$

Выполняется второе приближение $\Phi_{02}(\tau)$ уточнения структуры функции $\Phi(\tau)$, решается несовместная система уравнений. Процедура решения данной системы выполняется на основе чебышевского критерия и состоит в нахождении таких значений $\mathrm{A}_2^0 = \{a_{n_2}^0 \left| n_2 = \overline{0,N} \right.\}$, при которых величина максимальной абсолютной невязки

$$\Delta_{02} = \max_{\tau_n \in D_\tau} \left| \Phi_{02}(\tau_n) - \Delta_{01}(\tau_n) \right|, \tag{9}$$

принимаемая за меру чебышевского приближения, будет минимально возможной $\Delta(A_2^0) = \Delta_2^0 = \min\limits_{A_2} \Delta_2$.

Здесь

$$\Phi_{02}(\tau_n) = \sum_{k=0}^{m} a_{2k} T_{2k}^*(\tau_n). \tag{10}$$

На основе результатов решения системы (10), используя (1), (5) и (7), получаем второе приближение искомой базовой модели динамики ЭП в виде функций от нормированных переменных

$$\Phi_{02}(\tau) = \sum_{k=0}^{m} a_{2k}^0 T_{2k}^*(\tau), \quad T_0^* = 0{,}5 \tag{11}$$

и от исходных переменных

$$F_2(t) = \sum_{2k=0}^{m} a_{2k}^0 T_{2k}^*(t_0 + \tau(t_0^+ - t_0^-)), \quad \mathrm{T}_0^* = 0{,}5. \tag{12}$$

В итерационной процедуре аналогично находятся дальнейшие приближения искомой модели (2), количество $\Phi_{0p}(\tau),\ p=1,2,3,...$ определяется уровнем допустимой невязки и возрастает пропорционально с уменьшением величины невязки.

Приближения $\Phi_{0p}(\tau),\ p=1,2,3,...$ с последующим их суммированием выполняются до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность ξ

$$\max|F(\tau_n)-\Phi(\tau)|\le\xi \tag{13}$$

3. Модели динамики медленно и быстро осциллирующих процессов

Модели динамики медленно и быстро осциллирующих процессов при условии отсутствия пропусков исходных данных в течение периода $D_0=\{t\,\big|\,t_0^-\le t\le t_0^+\}$ находятся непосредственно на основе базовой модели как решение чебышевской задачи для системы (1) по критерию (3) при условии определенной адаптации функции $\Phi(\tau)$ к специфике осциллирующих процессов [8].

Проведенные многочисленные вычислительные эксперименты позволили установить, что для построения модели медленно осциллирующих процессов достаточно использовать в (1) смещенные полиномы Чебышева $T_n^*(\tau)\in T^*$, которые соответствуют следующим условиям:

$$n_1=1;\ \ N\in[3,8];\ \ T^*=\left\{T_1^*(\tau),...,T_{n_1}^*(\tau),...,T_N^*(\tau)\right\}.$$

Для быстро осциллирующих процессов необходимо использовать в (1) более высокие степени и большее количество полиномов Чебышева $T_n^*(\tau)\in T^*$,

которые соответствуют следующим условиям:

$$n_1\in[1,5];\ \ N\in[10,25];\ \ T^*=\left\{T_{n_1}^*(\tau),T_{n_1+1}^*(\tau),...,T_N^*(\tau)\right\}.$$

Для построения модели сложных осциллирующих процессов, содержащих медленно и быстро осциллирующие составляющие, необходимо использовать смещенные полиномы Чебышева $T_n^*(\tau)\in T^*$, которые соответствуют следующим условиям:

$$n_1\in[1,7];\ \ N\in[12,28];\ \ T^*=\left\{T_{n_1}^*(\tau),T_{n_1+1}^*(\tau),...,T_N^*(\tau)\right\}.$$

4. Модели краткосрочного и долгосрочного прогнозирования нестационарных процессов

Модели прогнозирования нестационарных процессов строятся на основе исходной выборки временного ряда для интервала D_0 и модели динамики процессов. Для этого используется известное свойство полиномов Чебышева – обеспечивать равномерное приближение функций на интервале [0,1]. Идея подхода состоит в следующем. Нормирование исходных данных выполняется на основе (6) для интервала $D=\left\{t\,\big|\,t_0^-\le t\le t^+\right\}$, $D=D_0\bigcup D_0^+$, который включает исходный интервал наблюдения $D_0=\{t\,\big|\,t_0^-\le t\le t_0^+\}$ и интервал прогнозирования $D_0^+=\{t\,\big|\,t_0^+<t\le t^+\}$. Далее по исходным данным для определения модели динамики процессов в форме приближающих функций (1) формируется для интервала D_0 система уравнений в виде

$$0{,}5a_{0_1}+\sum_{n=n_1}^{N}a_nT_n^*(\tau_{k_1})-\hat{y}_{k_1}=0;\ k_1=\overline{1,K_0}\,; \tag{14}$$

$$\hat{y}_{k_1} = y(\tau_{k_1}),\ \tau_{k_1} \in [0, \tau_{k_1}^+];\ \tau_{k_1}^+ = \frac{t_k^+ - t_0^-}{t^+ - t_0^-} < 1;\ t_k \in D_{K_0},\ D_{K_0} \subset D_0. \qquad (15)$$

Модель динамики процесса в интервале наблюдения D_0 определяется как результат решения системы (14) и описывается соотношением

$$\Phi_1(\tau_1) = 0{,}5a_0^0 + \sum_{n=n_1}^{N} a_n^0 T_n^*(\tau_1);\ \tau_1 \in D_0. \qquad (16)$$

Модель прогноза динамики процесса определяется на основе экстраполирования функции (16) в интервал D_0^+ и выражается следующей формулой

$$\Phi_2(\tau_2) = 0{,}5a_0^0 + \sum_{n=n_1}^{N} a_n^0 T_n^*(\tau_2);\ \tau_2 \in D_0^+. \qquad (17)$$

Модель динамики процесса в пределах заданного интервала $D = D_0 \bigcup D_0^+$ на основе (16) и (17) описывается следующим выражением

$$\Phi_0(\tau) = \begin{cases} \Phi_1(\tau_1)\ \ npu\ \tau_1 \in D_0 \\ \Phi_2(\tau_2)\ \ npu\ \tau_2 \in D_0^+ \end{cases} \qquad (18)$$

Модели для долгосрочного прогноза и краткосрочного прогноза отличаются как соотношением интервалов длительности интервалов наблюдений и прогноза, так и порядком полиномов Чебышева, используемых в модели. Модель долгосрочного прогноза характеризуется следующими условиями:

- интервал прогноза

$$0{,}25\|D\| \le \left\|D_0^+\right\| \le 0{,}5\|D\|;\|D\| = \tau^+ - \tau_0^-;\ \left\|D_0^+\right\| = \tau^+ - \tau_0^+;$$

- характеристики полиномов Чебышева: $T_n^*(\tau) \in T^*$; $n_1 \in [1, 5]$; $N \in [10, 20]$;

$$T^* = \left\{ T_{n_1}^*(\tau), T_{n_1+1}^*(\tau), ..., T_N^*(\tau) \right\}.$$

- *Модель краткосрочного прогноза характеризуется следующими условиями:*

интервал прогноза

$$0{,}1\|D\| \le \left\|D_0^+\right\| \le 0{,}25\|D\|;\ \|D\| = \tau^+ - \tau_0^-;\ \left\|D_0^+\right\| = \tau^+ - \tau_0^+;$$

- характеристики полиномов Чебышева: $T_n^*(\tau) \in T^*$; $n_1 = 1$; $N \in [3, 7]$;

$$T^* = \left\{ T_1^*(\tau), T_2^*(\tau), ..., T_N^*(\tau) \right\}.$$

5. Обоснование достоверности и реализуемости математических моделей

Предлагаемые модели и их алгоритмы решения реализованы в вычислительном пакете программ (ПП). Достоверность и реализуемость предлагаемых математических моделей обосновывается на примере сопоставления восстановленных аппроксимирующих функций с распределениями, построенными для стандартных функций. На рис. 1 приведены результаты тестирования ПП на стандартной функции Sin(x) с точностью 0, 00001.

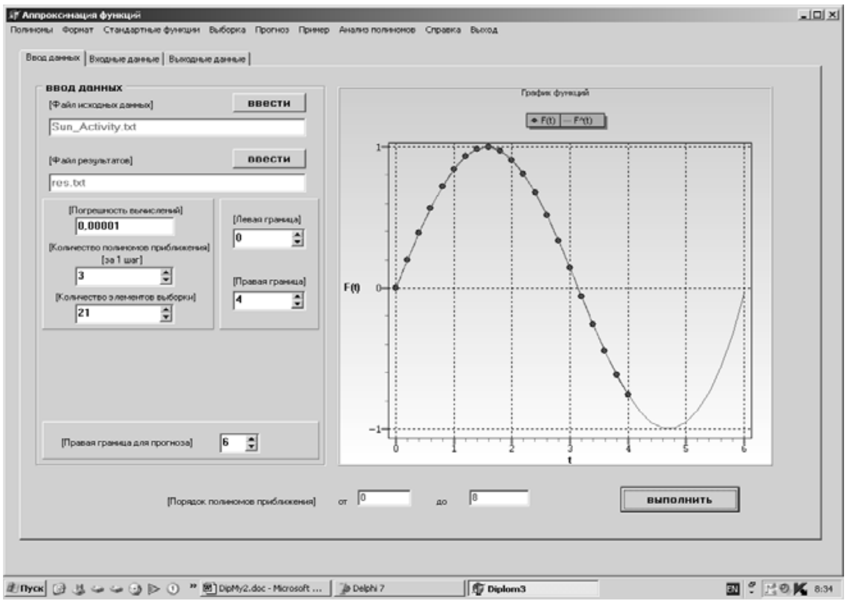

Рис. 1. Тестирование ПП на стандартной функции Sin(x)

На рис. 2-4 приведены последовательно первые три итерации уточнения структуры функции $\Phi(\tau)$(2). Вторая итерация уточнения структуры функции $\Phi(\tau)$ (рис. 3) позволяет достигнуть точность до 0, 001, а при учете третьей итерации достигается требуемая точность. При этом на каждом приближении учитывались первые три члена разложения (4), что позволяло избежать накопления вычислительной погрешности, которая, как правило, имеет место при удержании высоких членов разложения (4).

Выполнив обоснование достоверности и реализуемости предлагаемого подхода, проводится с применением разработанных математических моделей оценивание солнечной активности и строится краткосрочный прогноз (рис. 5).

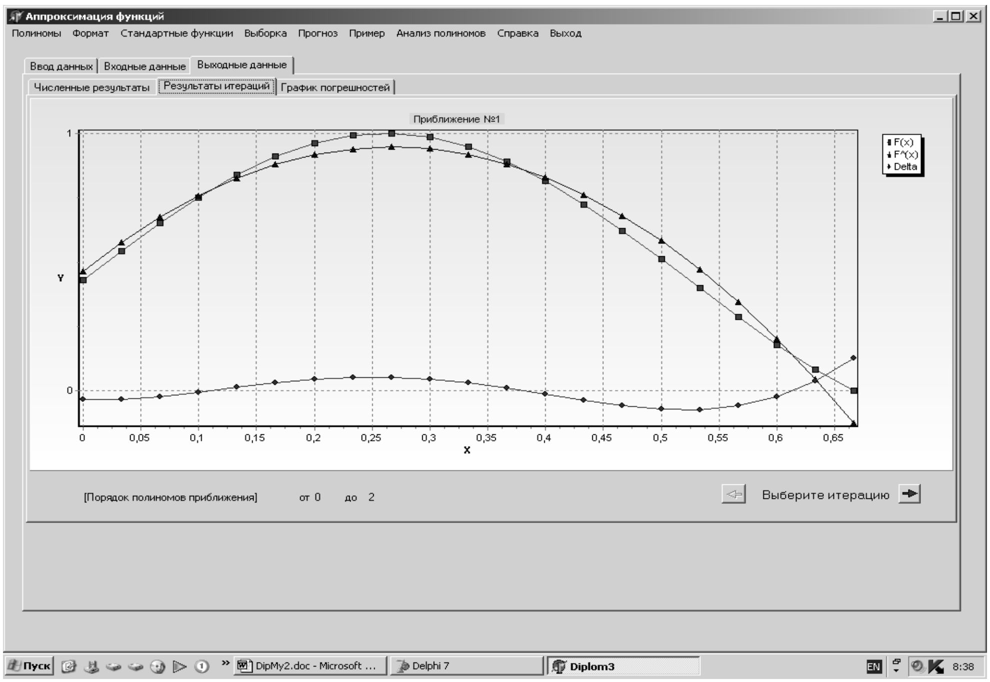

Рис. 2. Первая итерация уточнения структуры функции $\Phi(\tau)$

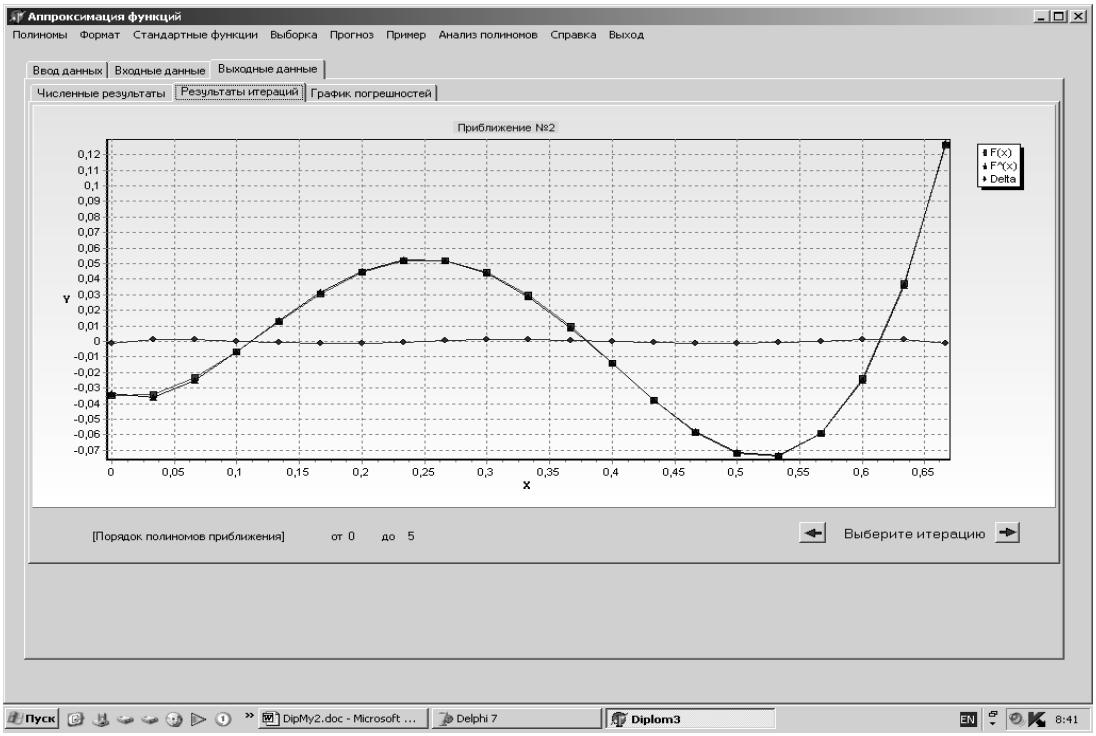

Рис. 3. Вторая итерация уточнения структуры функции $\Phi(\tau)$

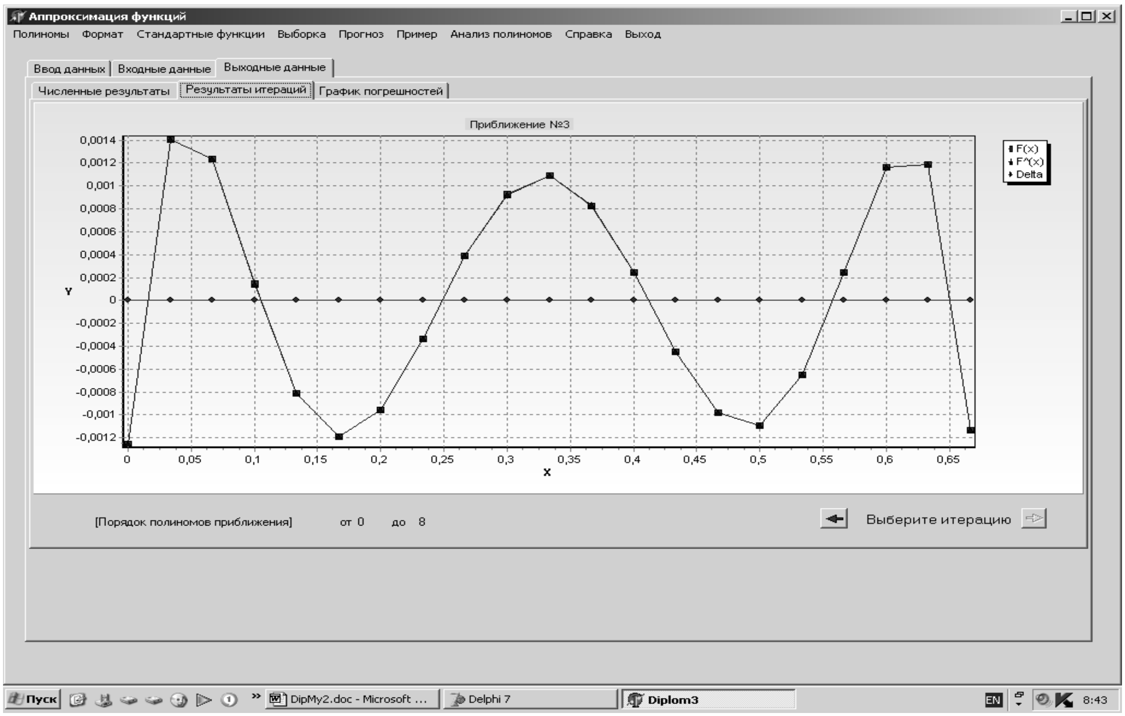

Рис. 4. Третья итерация уточнения структуры функции $\Phi(\tau)$

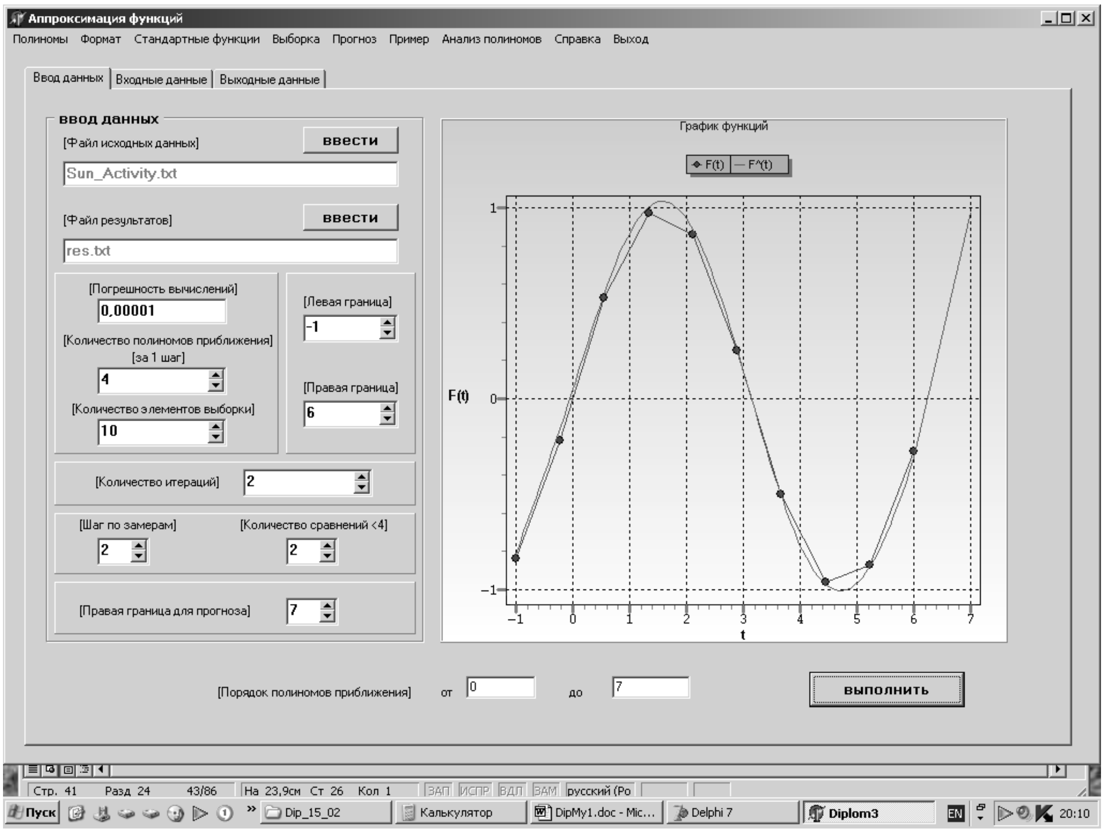

Рис. 5. Распределение солнечной активности с прогнозом

Заключение

Данная задача является частным случаем задачи выявления закономерностей и восстановления функциональных зависимостей по известным дискретным массивам области задания и множества определения функций многих переменных. Задача выявления закономерностей сводится к формированию приближающих функций на основе предложенных математических моделей, позволяющих восстановить функцию по дискретно заданным выборкам с требуемой практической точностью приближения и построить её прогноз на короткий или долгий временной период.