УДК 681.5

ПОДЛАДЧИКОВА Т.В.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ШУМА СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Разработан новый метод идентификации оценки априорно неизвестных математических ожиданий и ковариационных матриц шумов состояния нелинейных моделей динамических систем в пространстве состояний. Метод отличается гибкостью, универсальностью для применения в изменяющихся условиях функционирования системы. В основе метода лежит формирование m – зависимых последовательностей псевдоизмерений идентифицируемых параметров. Приводятся результаты статистического моделирования, подтверждающие высокую скорость сходимости и точность идентификации предлагаемых алгоритмов.

The new identification method to estimate the mathematical expectation and covariance matrix of the state noise for the nonlinear state space models is developed. The method is characterized by the flexibility and universality to be applied in the variable conditions of the system functioning. The method is based on the creation of m-dependent sequences of the pseudo-measurements of estimated parameters. The statistical results proving the high rate of convergence and accuracy of identification of the proposed algorithms are presented.

Введение

Эффективные и робастные алгоритмы идентификации имеют большое значение как для теоретических исследований, так и для решения многочисленных практических задач. Математические модели систем, сформированные на основе исследования только физических процессов, обычно отличаются от реальных систем. Если структура системы и класс моделей, описывающих систему известны, тогда неопределенность априорной информации о системе может быть описана шумами модели с неизвестными статистическими характеристиками.

Множество подходов было предложено для идентификации статистических характеристик шумов линейных моделей систем, которые могут быть разделены на 4 основные категории: байесовские методы [1, 2], методы максимального правдоподобия [3, 4], согласования ковариаций [5], корреляционные методы идентификации [6-9]. Однако практическое применение байесовских методов и методов максимального правдоподобия ограничено из-за их громоздкости и больших вычислительных затрат.

Множество методов идентификации разработаны для стационарных моделей. Некоторые авторы докладывали о простых вычислительных алгоритмов состоятельных оценок шумов состояния на основе формирования m – зависимых последовательностей

$\{v_i\}$ по данным измерений, а именно таких последовательностей, для которых v_i и v_j независимы, если $|i-j|>m$.

В частности, Андерсон [10] предложил оценивать ковариационные матрицы шумов для стационарных систем на основе формирования 1 и 2-зависимых последовательностей. Еще один подход основан на формировании невязок субоптимального фильтра с фиксированной памятью [11]. Поэтому оценки математических ожиданий и ковариационных матриц были определены путем формирования m – зависимых последовательностей невязок или их произведение.

Методы идентификации статистических характеристик линейных моделей с переменными параметрами на основе формирования m – зависимых последовательностей псевдоизмерений был предложен в работе [12].

Несмотря на то, что последовательность псевдоизмерений нестационарная, свойства m-зависимости обеспечивают сходимость алгоритма идентификации.

Однако для большинства реальных систем характерна нелинейная динамика поведения и это ограничивает применение линейных моделей на практике. Идентификация шумов нелинейных моделей позволяет более точно сформировать динамическую модель для анализа и оптимизации.

В данной работе предлагается метод идентификации математического ожидания и ковариационной матрицы шума состояния нелинейной модели системы. Метод основан на формировании 1-зависимых последовательностей псевдоизмерений нидентифицируемых параметров с использованием линеаризации первого порядка.

2. Математическая постановка задачи

Какие бы теоретические и экспериментальные предпосылки не лежали в основе формирования нелинейной детерминированной модели, она может быть адекватна реальному процессу лишь в большей или меньшей степени.

Введение аддитивного шума в уравнение состояния и идентификация статистических характеристик этого шума в процессе наблюдения за объектом позволяет уменьшить ошибки оценивания из-за недостаточно корректной модели.

Предположим, что состояние динамической системы $X_k \in \Re^n$ и измерения $z_k \in \Re^n$ описываются системой нелинейных уравнений:

$$X_{k+1} = f(X_k) + w_{k+1}, \tag{1}$$

$$z_k = h(X_k) + \eta_k, \tag{2}$$

в которой w_k и η_k – некоррелированные случайные последовательности со следующими статистическими свойствами

$$E[w_k] = q_k,\ \ E\left[(w_k - q_k)(w_k - q_k)^T\right] = Q_k,$$

$$E[\eta_k] = 0,\ \ E\left[\eta_k \eta_k^T\right] = R.$$

Предположим, что математическое ожидание q_k и ковариационная матрица Q_k шума состояния неизвестны и подлежат оцениванию. Предлагаемый метод идентификации основан на предположении, что вектор-функция $h(X_k)$ имеет обратную $h^{-1}(z_k - \eta_k)$.

3. Формирование псевдоизмерений математического ожидания шума состояния

Сформируем 1-зависимую последовательность

$$b_{1,k} = z_k - h\left(f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)\right), \tag{3}$$

которую также можно рассматривать как невязку субоптимального нелинейного фильтра. Действительно, вектор $h^{-1}(z_{k-1})$ может быть выбран в качестве начальной оценки вектора состояния. Тогда $f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)$ – экстраполированная оценка, а $b_{1,k}$ – невязка субоптимального фильтра с фиксированной памятью, равной 1.

С учетом соотношений (1), (1) невязку субопттимального фильтра можно представить в следующем виде

$$b_{1,k} = h(X_k) + \eta_k - h\left(f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)\right) = h\left(f(X_{k-1}) + w_k\right) + \eta_k - h\left(f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)\right)$$

или

$$b_{1,k} = h\left(f\left(h^{-1}(z_{k-1} - \eta_{k-1}) + w_k\right) + \eta_k\right) - h\left(f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)\right). \qquad (4)$$

Используя разложение в ряд Тейлора первого порядка в окрестности точки z_{k-1} представим функцию $h^{-1}(z_{k-1} - \eta_{k-1})$ в виде

$$h^{-1}(z_{k-1} - \eta_{k-1}) \approx h^{-1}(z_{k-1}) - \left.\frac{\partial h^{-1}}{\partial z}\right|_{z_{k-1}} \eta_{k-1}.$$

Раскладывая функцию $f\left(h^{-1}(z_{k-1}) - \left.\frac{\partial h^{-1}}{\partial z}\right|_{z_{k-1}} \eta_{k-1} + w_k\right)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $h^{-1}(z_{k-1})$, получим

$$f\left(h^{-1}(z_{k-1} - \eta_{k-1}) + w_k\right) \approx f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right) - \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{h^{-1}(z_{k-1})} \left(\left.\frac{\partial h^{-1}}{\partial z}\right|_{z_{k-1}} \eta_{k-1} + w_k\right).$$

После разложения в ряд Тейлора функции

$$h\left(f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right) - \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{h^{-1}(z_{k-1})} \left(\left.\frac{\partial h^{-1}}{\partial z}\right|_{z_{k-1}} \eta_{k-1} + w_k\right)\right)$$

в окрестности точки $f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)$, получим

$$h\left(f\left(h^{-1}(z_{k-1} - \eta_{k-1}) + w_k\right)\right) \approx h\left(f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)\right) + \left.\frac{\partial h}{\partial X}\right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \left(w_k - \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{h^{-1}(z_{k-1})} \left.\frac{\partial h^{-1}}{\partial z}\right|_{z_{k-1}} \eta_{k-1}\right).$$

Подставляя правую часть полученного соотношения в выражение (4), получим линейную зависимость невязки $b_{1,k}$ от шумов состояния w_k и измерения η_k системы (1), (2)

$$b_{1,k} \approx \eta_k + \left.\frac{\partial h}{\partial X}\right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \cdot \left(w_k - \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{h^{-1}(z_{k-1})} \cdot \left.\frac{\partial h^{-1}}{\partial z}\right|_{z_{k=1}} \cdot \eta_{k-1}\right). \qquad (5)$$

Математическое ожидание $b_{1,k}$ определяется следующим образом

$$E[b_{1,k}] \approx \left.\frac{\partial h}{\partial X}\right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \cdot q_k.$$

Из последнего выражения следует

$$q_k \approx \left(\left.\frac{\partial h}{\partial X}\right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)}\right)^{-1} \cdot E[b_{1,k}].$$

Таким образом, 1-зависимая последовательность

$$\tilde{z}_k^q = \left(\left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \right)^{-1} \cdot b_{1,k} \tag{6}$$

может рассматриваться как последовательность псевдоизмерений неизвестного параметра q_k в присутствии аддитивного шума

$$\left(\left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \right)^{-1} \cdot \left(b_{1,k} - E\left(b_{1,k}\right)\right).$$

4. Формирование псевдоизмерений ковариационной матрицы шума состояния

Определим центрированные значения невязок субоптимального фильтра

$$b_{1,k}^c \approx b_{1,k} - \left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \cdot q_k \tag{7}$$

и сформируем 1-зависимую последовательность

$$B_{1,k} = b_k^c \left(b_k^c\right)^T . \tag{8}$$

Используя выражение (5) определим математическое ожидание последовательности $B_{1,k}$

$$E\left[B_{1,k}\right] \approx R + \left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} Q_k \left(\left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \right)^T + \left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{h^{-1}(z_{k-1})} \cdot \left. \frac{\partial h^{-1}}{\partial z} \right|_{z_{k-1}} \times$$
$$\times R \cdot \left(\left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{h^{-1}(z_{k-1})} \cdot \left. \frac{\partial h^{-1}}{\partial z} \right|_{z_{k-1}} \right)^T . \tag{9}$$

Из последнего выражения получим

$$Q_k \approx \left(\left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \right)^{-1} \left(E\left[B_{1,k}\right] - R - \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{h^{-1}(z_{k-1})} \cdot \left. \frac{\partial h^{-1}}{\partial z} \right|_{z_{k-1}} \times \right.$$
$$\left. \times R \cdot \left(\left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{h^{-1}(z_{k-1})} \cdot \left. \frac{\partial h^{-1}}{\partial z} \right|_{z_{k-1}} \right)^T \right) \left(\left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \right)^{-T} .$$

Таким образом, 1-зависимая последовательность

$$\tilde{z}_k^Q \approx \left(\left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \right)^{-1} \left(B_{1,k} - R - \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{h^{-1}(z_{k-1})} \cdot \left. \frac{\partial h^{-1}}{\partial z} \right|_{z_{k-1}} \times \right.$$
$$\left. \times R \cdot \left(\left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{h^{-1}(z_{k-1})} \cdot \left. \frac{\partial h^{-1}}{\partial z} \right|_{z_{k-1}} \right)^T \right) \left(\left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{f\left(h^{-1}(z_{k-1})\right)} \right)^{-T} \tag{10}$$

может рассматриваться как последовательность псевдоизмерений ковариационной матрицы Q_k в присутствии аддитивного шума.

5. Алгоритм идентификации

Формирование псевдоизмерений $\tilde{z}_k^q$ и $\tilde{z}_k^Q$ неизвестных параметров q и Q открывает возможность их идентифицировать эти параметры, если закон их изменения известен.

Оценка постоянного математического ожидания q может быть определена путем усреднения во времени сформированных псевдоизмерений $\tilde{z}_k^q$.

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^{k}\tilde{z}_i^q = \frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^{k}\left(\left(\left.\frac{\partial h}{\partial X}\right|_{f\left(h^{-1}(z_{i-1})\right)}\right)^{-1}\cdot\left(z_i - h\left(f\left(h^{-1}(z_{i-1})\right)\right)\right)\right). \qquad (11)$$

Если математическое ожидание шума состояния изменяется по неопределенному закону, то его оценка может быть получена на основе экспоненциального сглаживания его псевдоизмерений $\tilde{z}_k^q$.

Полученные оценки математического ожидания вектора состояния используется для формирования центрированного значения невязок $b_{1,k}^c$. Оценки $\hat{q}_k$ подставляются вместо действительных значений q_k в выражение (7).

Аналогично оценки постоянной ковариационной матрицы шума состояния определяются на основе усреднения во времени псевдоизмерений $\tilde{z}_k^Q$ ковариационной матрицы Q_k

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^{k}\tilde{z}_i^Q. \qquad (12)$$

Таким образом, алгоритм идентификации математического ожидания и ковариационной матрицы шума состояния нелинейной системы (1), (2) при известной ковариационной матрице шума измерения R определяется выражениями (3), (6), (8), (10 – 12).

Свойство 1-зависимости псевдоизмерений $\tilde{z}_k^q$ и $\tilde{z}_k^Q$ обеспечивают хорошую точность оценивания $\hat{q}_k$ и $\hat{Q}_k$ если ошибки из-за линеаризации относительно малы. Поэтому когда интенсивность шумов, возмущающих систему относительно невилики, рассмотренный алгоритм может обеспечить хорошую точность оценивания неизвестных параметров.

5. Пример: идентификация статистических характеристик шумов для модели циклического процесса

Рассмотрим циклический процесс, детерминированная основа которого описывается следующим образом

$$X_k = A\cos\left(\omega T_{k,0} + \varphi\right) + D, \quad k = 1,2,.... \qquad (13)$$

где A и B – некоторые постоянные параметры, ω – круговая частота колебаний, φ – начальная фаза колебаний.

Детерминированную основу рассматриваемой модели представим в пространстве состояний следующим образом

$$X_{k+1} = f\left(X_k\right) + D, \qquad (14)$$

где $f\left(X_k\right) = A\cos\left(\omega T_{k+1,k}\right)\left(X_k - D\right) \mp A\sin\left(\omega T_{k+1,k}\right)\sqrt{A^2 - \left(X_k - D\right)^2} + D$.

Знак “+” используется, если $\pi + 2j\pi \le \omega T_{k,0} + \varphi < 2j\pi$, а знак «-», если

$$2\left(j-1\right)\pi \le \omega T_{k,0} + \varphi < 2j\pi + \pi, \quad \left(j = 0,1,...\right).$$

На основе уравнения (14) сформируем стохастическую модель состояния путем введения аддитивного шума состояния w_k с неизвестными математическим ожиданием q и дисперсией σ_w^2

$$X_{k+1,k} = f\left(X_k\right) + B + w_{k+1}T_{k+1,k}. \qquad (15)$$

Рассмотрим задачу идентификации априорно неизвестных значений q и σ_w^2 по данным измерений z состояния X в присутствии аддитивного некоррелированного шума η

$$z_k = X_k + \eta_k, \tag{16}$$

где $E[\eta_k] = 0$, $E[\eta_k^2] = \sigma_\eta^2$.

Сформируем 1-зависимую последовательность невязок субоптимального фильтра

$$b_{1,k} = z_k - f(z_{k-1}),$$

которая в соответствии с выражением (4) можно представить в виде

$$b_{1,k} = \eta_k + w_k T_{k,k-1} - \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{z_{k-1}} \eta_k,$$

где $\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{z_{k-1}} = A\cos(\omega T_{k,k-1}) \pm A\sin(\omega T_{k,k-1}) \frac{z_{k-1} - D}{\sqrt{A^2 - (z_{k-1} - D)^2}}$.

Математическое ожидание невязки

$$E[b_{1,k}] = qT_{k,k-1},$$

тогда псевдоизмерение неизвестного математического ожидания q формируется следующим образом

$$\tilde{z}_k^q = \frac{b_{1,k}}{T_{k,k-1}}.$$

Оценка постоянного значения математического ожидания определяется как среднее арифметическое его псевдоизмерений

$$\hat{q}_k = \frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^{k} \tilde{z}_i^q.$$

Для оценки неизвестной дисперсии σ_w^2 сформируем последовательность

$$B_{1,k} = (b_{1,k} - \hat{q}_k)^2.$$

В соответствии с выражением (9)

$$E[B_{1,k}] = \sigma_\eta^2 + \sigma_W^2 T_{k,k-1}^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{z_{k-1}}\right)^2 \sigma_\eta^2.$$

Отсюда следует, что псевдоизмерение дисперсии σ_w^2 имеет вид

$$\tilde{z}_k^Q = \frac{B_{1,k} - \sigma_\eta^2\left(1 + \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{z_{k-1}}\right)}{T_{k,k-1}^2},$$

а оценка постоянной дисперсии определяется как среднеарифметическое значение этих пседоизмерений

$$\hat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=2}^{k} \tilde{z}_k^Q.$$

На рис. 1 показана реализация циклического процесса, описываемого моделью (15) с параметрами A=100, D=0, $\varphi = 0$. Статистические характеристики шума состояния q=1, $\sigma_w^2 = 4$ предполагались априорно неизвестными и оценивались в соответствии с предложенным алгоритмом по данным измерений в присутствии аддитивного шума измерения с дисперсией $\sigma_\eta^2 = 4$. Интервал времени между измерениями T=2.

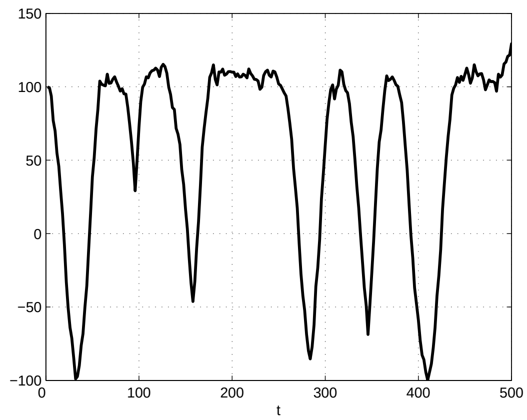
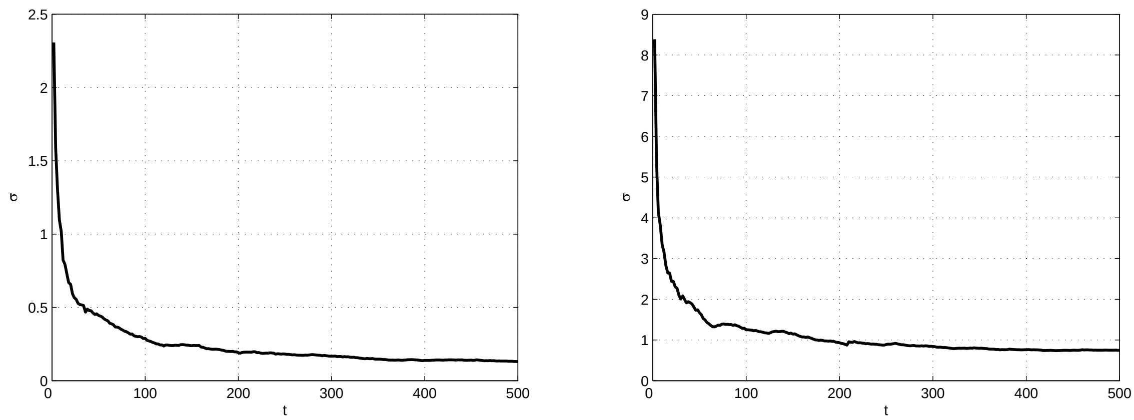


Рис. 1. Циклический процесс с параметрами *A*=100, *D*=0, $\varphi = 0$, искаженный шумом с математическим ожиданием *q* = 1 и дисперсией $\sigma_w^2 = 4$

Для оценки эффективности метода идентификации статистических характеристик шума состояния нелинейной модели выполнялось статистическое моделирование алгоритма оценивания неизвестных математического ожидания q и дисперсии случайного, распределенного по нормальному закону шума состояния σ_w^2 модели циклического процесса, описываемой уравнением (15). Оценки неизвестных параметров определялись по данным измерений этого процесса, искаженных аддитивным несмещенным шумом η с известной дисперсией σ_η^2.

На рис.2 приведены среднеквадратические ошибки идентификации математического ожидания q (рис.2a) и дисперсии шума состояния σ_w^2 (рис. 2b), полученные путем усреднения ошибок по 100 реализациям моделируемого циклического процесса.



a) ***b)***

Рис.2. Среднеквадратические ошибки оценивания по данным измерений через интервал времени *T*=2, дисперсии ошибки измерений $\sigma_\eta^2 = 4$:
***a*) математического ожидания шума состояния *q*;**
b) дисперсии шума состояния σ_w^2

Из рисунков видно, что алгоритм идентификации обеспечивает хорошую точность оценивания и высокую скорость сходимости оценок к истинным значениям идентифицируемых параметров. Интенсивность возмущения процесса на интервале времени между измерениями T определяется величиной $\sigma_w^2 \cdot T^2 = 4$. Тем не менее, уже при времени наблюдения $t = 50\,(k = 25)$ математическое ожидание q оценивается с ошибкой, меньшей, чем 0.5, а среднеквадратическая ошибка оценивания дисперсии σ_w^2 близка к 1.

Заключение

В работе предложен новый метод идентификации математического ожидания и ковариационной матрицы шума состояния нелинейной модели в пространстве состояний. Метод основан на формирования *1*-зависимой (марковской) последовательности псевдоизмерений идентифицируемых параметров с использованием линеаризации первого порядка невязок субоптимального фильтра.

Эффективные вычислительные алгоритмы идентификации статистических характеристик шума разработаны для случая, когда вектор – функция $h(X_k)$ имеет обратную. Если неизвестные параметры постоянны, то их оценка может быть получена как среднее значение их псевдоизмерений.

Статистическое моделирование предлагаемых алгоритмов было выполнено для стохастической модели циклического процесса, статистические характеристики шума, которого предполагались априорно неизвестными.

Результаты моделирования показали высокую точность оценивания. Простота и высокая скорость сходимости предлагаемых алгоритмов свидетельствует о возможности их эффективного практического использования в условиях априорной неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alspach D. A parallel filtering algorithm for linear systems with unknown time varying noise statistics // IEEE Trans. Auto. Cont. 1974. Vol. 19, No. 5. P. 552-556.
2. Hilborn C. and Lainiotis D. Optimal estimation in the presence of unknown parameters // IEEE Trans. Systems, Science, and Cybernetics. 1969. Vol. 5. No. 1. P. 38-43.
3. Bohlin T. Four cases of identification of changing systems / Ed. By R. Mehra and D. Lainiotis, editors, System Identification: advances and Case studies, Academic Press, 1st edition. 1976.
4. Kashyap R. Maximum likelihood identification of stochastic linear systems // IEEE Trans. Auto. Cont. 1970. Vol. 15. No. 1. P. 25-34.
5. Myers K. and Tapley B. Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics // IEEE Trans. Auto. Cont. 1976. Vol. 21. P. 520-523.
6. Mehra R. On the identification of variances and adaptive Kalman filtering // IEEE Trans. Auto. Cont.1970. Vol. 15. No.12. P. 175-184.
7. Mehra R. Approaches to adaptive filtering // IEEE Trans. Auto. Cont. 1972. Vol. 17. P. 903-908.
8. Bélanger P. Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process // Automatica. 1974. Vol. 15. 1974. P. 267-275.
9. Carew B. and Bélanger P. Identification of optimum filter steady-stade gain for systems with unknown noise covariances // IEEE Trans. Auto. Cont. 1973. Vol. 18. No. 6. P. 582-587.
10. Anderson W. N. et al. Consistent Estimates of the Parameters of a Linear System // Ann. Math. Statist. 1969. Vol. 40. P. 2074-2075.
11. Zgurovsky M., Podladchikov V. Analytical methods of Kalman filtering for the systems with a priori uncertainty //Naukova Dumka. 1995. Kiev (in Russian).
12. Podladchikova T. Identification of unknown noise statistics for non-stationary state space systems // The Proceedings of Baltic Olympiad on Automatic Control. 2006. Saint-Petersburg. P.103-107.
13. Украина, 03056, Киев, Победы пр., 37
14. E-mail: tpodlad@gmail.com