

УДК 62-50+681.5

КОНДРАТЕНКО Ю.П., МАХМУД МОХАММАД САЛЕМ АЛЬ-СУОД,  
КОНДРАТЕНКО Г.В., КОРОБКО О.В., РОМАНОВ Д.О., ЯВІШЕВА І.В.

# **ВПЛИВ ПАРАМЕТРИЧНОЇ НЕСТАЦІОНАРНОСТІ КОМПОНЕНТІВ НА СТІЙКІСТЬ КОМП'ЮТЕРИЗОВАНИХ СИСТЕМ**

Стаття присвячена дослідженню впливу змін параметрів окремих компонентів на стійкість та запаси стійкості комп’ютеризованих систем керування. Наводяться аналітичні та алгоритмічні моделі для визначення критичних значень узагальнених коефіцієнтів підсилення, коефіцієнтів передачі та часових затримок, що мають нестационарний характер, при заданих запасах стійкості замкнутих систем автоматичного керування за амплітудою та за фазою. Результати моделювання з застосуванням логарифмічного частотного критерію підтверджують ефективність та працездатність запропонованих моделей та алгоритмів.

The article is concerned with investigations of the influence of devices with non-stationary parameters to stable of computerized control systems. The analytic and algorithmic models for calculation of the critical values of general gain and time delay providing desired stable indexes for closed-loop automatic control systems are given. The modeling results based on the logarithm frequency criteria confirm the efficiency and serviceability of suggested models and algorithms.

## **Вступ**

При проектуванні систем автоматичного керування (САК) однією з найбільш важливих вимог є забезпечення стійкості замкнутих САК та необхідних запасів стійкості. Дослідженю стійкості САК на основі застосування різних критеріїв та підходів присвячені роботи [2, 7, 10, 11]. Разом з тим, виконання необхідних вимог щодо стійкості САК у деяких випадках не гарантують їх ефективне функціонування в процесі довгострокової експлуатації [1, 9, 12]. В першу чергу це стосується об’єктів керування, параметри яких мають нестационарний характер, та комп’ютеризованих систем керування, параметри аналогових та цифрових компонентів яких також можуть змінюватись у часі. Зокрема, нестационарний характер коефіцієнтів підсилення та коефіцієнтів передачі окремих компонентів САК може суттєво впливати на величину узагальненого коефіцієнта підсилення розімкнutoї САК. Крім того, у процесі експлуатації САК можуть змінюватися параметри часових затримок окремих компонентів, що, безумовно, впливає на узагальнене значення часу затримки САК у цілому. У деяких випадках такі зміни вищевказаних параметрів САК можуть привести до зменшення запасів стійкості САК за амплітудою та за фазою, а іноді і до втрати стійкості [2, 3, 8, 18]. Для ефективного керування САК такого класу застосовують

методи робастного, адаптивного та оптимального керування [1, 9, 17]. Дослідженю параметричної стійкості САК присвячені роботи [2, 8, 11, 16]. Один з відомих підходів до оцінки параметричної стійкості лінійних САК базується на визначені коренів характеристичного поліному замкнутої системи, що залежать безпосередньо від коефіцієнтів конкретного характеристичного поліному [4, 12, 14, 17]. При цьому, якщо ці корені знаходяться в лівій напівплощині комплексної змінної на значній відстані від уявної осі, то замкнута САК вважається стійкою і має добрі запаси стійкості при неминучих у ході експлуатації САК варіаціях її параметрів. Цей підхід застосовується при незначних відхиленнях параметрів характеристичного поліному від номінальних значень. Для значних відхилень таких параметрів В.Л. Харитонов запропонував підхід, що базується на перевірці чотирьох особливим чином сформованих поліномів [12]. У деяких випадках навіть еквівалентні математичні перетворення можуть змінити параметричну стійкість і порядок характеристичного поліному. Дослідження показують [12], що навіть існування функції Ляпунова не гарантує від втрати стійкості САК при значних варіаціях параметрів. Якщо система є стійкою, але має недостатні запаси стійкості за варіаціями параметрів, то при “дрейфі” параметрів у процесі експлуатації відповідного об’єкта керування система може втратити стійкість в непередбачений момент, що, у свою чергу, може привести до аварійних ситуацій. В деяких роботах розглядаються підходи, що базуються на оцінці критичних значень тих чи інших параметрів, що суттєво впливають на параметричну стійкість замкнутих САК [11, 17].

### **Мета досліджень**

Метою даної статті є дослідження впливу варіацій параметрів підсилювальних ланок, узагальненого коефіцієнта підсилення розімкнутої системи ( $k$ ) та часових затримок ланок запізнення ( $\tau$  – час запізнення або затримки) на стійкість та запаси стійкості лінійних замкнутих систем автоматичного керування, а також розробка аналітичних та алгоритмічних моделей для визначення критичних значень параметрів та їх варіацій при заданих запасах стійкості за амплітудою та за фазою замкнутих систем автоматичного керування з параметрично нестационарними компонентами.

### **Математичні моделі для оцінки критичних значень параметрів САК при варіаціях узагальненого коефіцієнта підсилення**

Узагальнену передаточну функцію розімкнутої системи автоматичного керування  $W(p)$  можна представити [5, 13] таким чином

$$W(p) = \frac{\prod_{i=1}^s k_i \prod_{j=1}^r (\tau_{1j} p + 1) \prod_{l=1}^d (\tau_{2l}^2 p^2 + 2\xi'_{2l} \tau_{2l} p + 1)}{p^\nu \prod_{q=1}^z (T_{1q} p + 1) \prod_{x=1}^y (T_{2x}^2 p^2 + 2\xi_{2x} T_{2x} p + 1)}, \quad (1)$$

де  $\nu$  – порядок астатизму системи;

$s$  – загальна кількість складових, на основі яких формується значення коефіцієнта підсилення  $k$  розімкнутої САК,  $k = \prod_{i=1}^s k_i$ ;

$r$  – загальна кількість типових диференціальних ланок першого порядку з відповідними постійними часу  $\tau_{1m}$ ,  $m = 1 \dots r$ ;

$d$  – загальна кількість типових диференціальних ланок другого порядку з відповідними параметрами  $\tau_{2l}$ ,  $l = 1 \dots d$  та  $\xi'_{2l}$ ,  $l = 1 \dots d$ ;

$z$  – загальна кількість типових аперіодичних ланок з відповідними постійними часу  $T_{1q}$ ,  $q = 1 \dots z$ ;

$y$  – загальна кількість типових коливальних ланок з відповідними постійними часу  $T_{2x}$ ,  $x = 1 \dots y$  та коефіцієнтами демпфірування  $\xi_{2x}$ ,  $x = 1 \dots y$ .

Узагальнену частотну передаточну функцію або амплітудно-фазову частотну функцію  $W(j\omega)$  розімкнutoї САК можна записати у вигляді

$$W(j\omega) = \frac{\prod_{i=1}^s k_i \prod_{m=1}^r (1 + j\tau_{1m}\omega) \prod_{l=1}^d [(1 - \tau_{2l}^2\omega^2) + j2\xi_{2l}'\tau_{2l}\omega]}{(j\omega)^v \prod_{q=1}^z (1 + jT_{1q}\omega) \prod_{x=1}^y [(1 - T_{2x}^2\omega^2) + j2\xi_{2x}T_{2x}\omega]}. \quad (2)$$

При цьому комплексний вираз (2) можна представити в алгебраїчній формі [5, 6, 14, 15]

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \operatorname{Re} W(j\omega) + j \operatorname{Im} W(j\omega) = \\ &= \operatorname{Re} \frac{\prod_{i=1}^s k_i \prod_{m=1}^r (1 + j\tau_{1m}\omega) \prod_{l=1}^d [(1 - \tau_{2l}^2\omega^2) + j2\xi_{2l}'\tau_{2l}\omega]}{(j\omega)^v \prod_{q=1}^z (1 + jT_{1q}\omega) \prod_{x=1}^y [(1 - T_{2x}^2\omega^2) + j2\xi_{2x}T_{2x}\omega]} + \\ &+ j \operatorname{Im} \frac{\prod_{i=1}^s k_i \prod_{m=1}^r (1 + j\tau_{1m}\omega) \prod_{l=1}^d [(1 - \tau_{2l}^2\omega^2) + j2\xi_{2l}'\tau_{2l}\omega]}{(j\omega)^v \prod_{q=1}^z (1 + jT_{1q}\omega) \prod_{x=1}^y [(1 - T_{2x}^2\omega^2) + j2\xi_{2x}T_{2x}\omega]} = U(\omega) + jV(\omega), \end{aligned}$$

де  $\operatorname{Re} W(j\omega) = U(\omega)$  – дійсна частина комплексної частотної передаточної функції  $W(j\omega)$ ;

$\operatorname{Im} W(j\omega) = V(\omega)$  – уявна частина комплексної частотної передаточної функції  $W(j\omega)$ ;

або в показниковій формі [5, 6, 14, 15]

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

де  $A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re} W(j\omega)]^2 + [\operatorname{Im} W(j\omega)]^2}$  – амплітудно-частотна функція;

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im} W(j\omega)}{\operatorname{Re} W(j\omega)} \text{ – фазо-частотна функція.}$$

При функціонуванні САК в умовах нестационарних збурень, що можуть мати як зовнішній, так і внутрішній характер і призводити до змін у часі параметрів передаточної функції (1), часто виникає необхідність оцінювання, а в деяких випадках і корекції значення загального коефіцієнта підсилення розімкнutoї системи

$$k = \prod_{i=1}^s k_i. \quad (3)$$

При цьому згідно з логарифмічним частотним критерієм [2, 4, 5, 11, 16] можуть змінюватися запаси стійкості САК за амплітудою  $\Delta L_{cm} = F(k, \omega_\pi)$  і за фазою

$\Delta\varphi_{cm} = F(k, \omega_{sp})$ , де  $\omega_{sp}$  – частота зрізу, при якій логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ) розімкнutoї САК  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$  перетинає вісь частот  $\omega$ ;  $\omega_\pi$  – частота, при якій логарифмічна фазо-частотна характеристика (ЛФЧХ) розімкнutoї САК  $\varphi(\omega)$  перетинає горизонтальну лінію на рівні  $-\pi$ .

В загальному випадку можна сформувати такі оптимізаційні співвідношення

$$\omega_{sp} = ARG \min_{\omega \in \Omega} |L(\omega)|, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} L(\omega_{sp}) &= 20 \lg A(\omega_{sp}) = 0, \\ \omega_\pi &= ARG \min_{\omega \in \Omega} |\varphi(\omega) + \pi|, \\ \varphi(\omega_\pi) &= -\pi, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\Omega = [-\infty, +\infty]$  – область частот  $\omega$ ,  $\omega \in \Omega$ ;  
 $|L(\omega)|$ ,  $|\varphi(\omega) + \pi|$  – відповідні функції модульного типу, що мінімізуються при визначенні параметрів  $\omega_{sp}$  та  $\omega_\pi$  в області частот  $\omega \in \Omega$ .

Запаси стійкості  $\Delta L_{cm}$  та  $\Delta\varphi_{cm}$  можна визначити за такими залежностями

$$\Delta L_{cm}(k, ARG \min_{\omega \in \Omega} |\varphi(\omega) + \pi|) = \left| 20 \lg |W(j\omega)| \right|_{\omega=\omega_\pi} = \left| 20 \lg A(\omega_\pi) \right| = |L(\omega_\pi)|, \quad (6)$$

$$\Delta\varphi_{cm}(k, ARG \min_{\omega \in \Omega} |L(\omega)|) = \pi + \arctg \frac{\text{Im} W(j\omega)}{\text{Re} W(j\omega)} \Big|_{\omega=\omega_{sp}} = \pi + \varphi(\omega_{sp}). \quad (7)$$

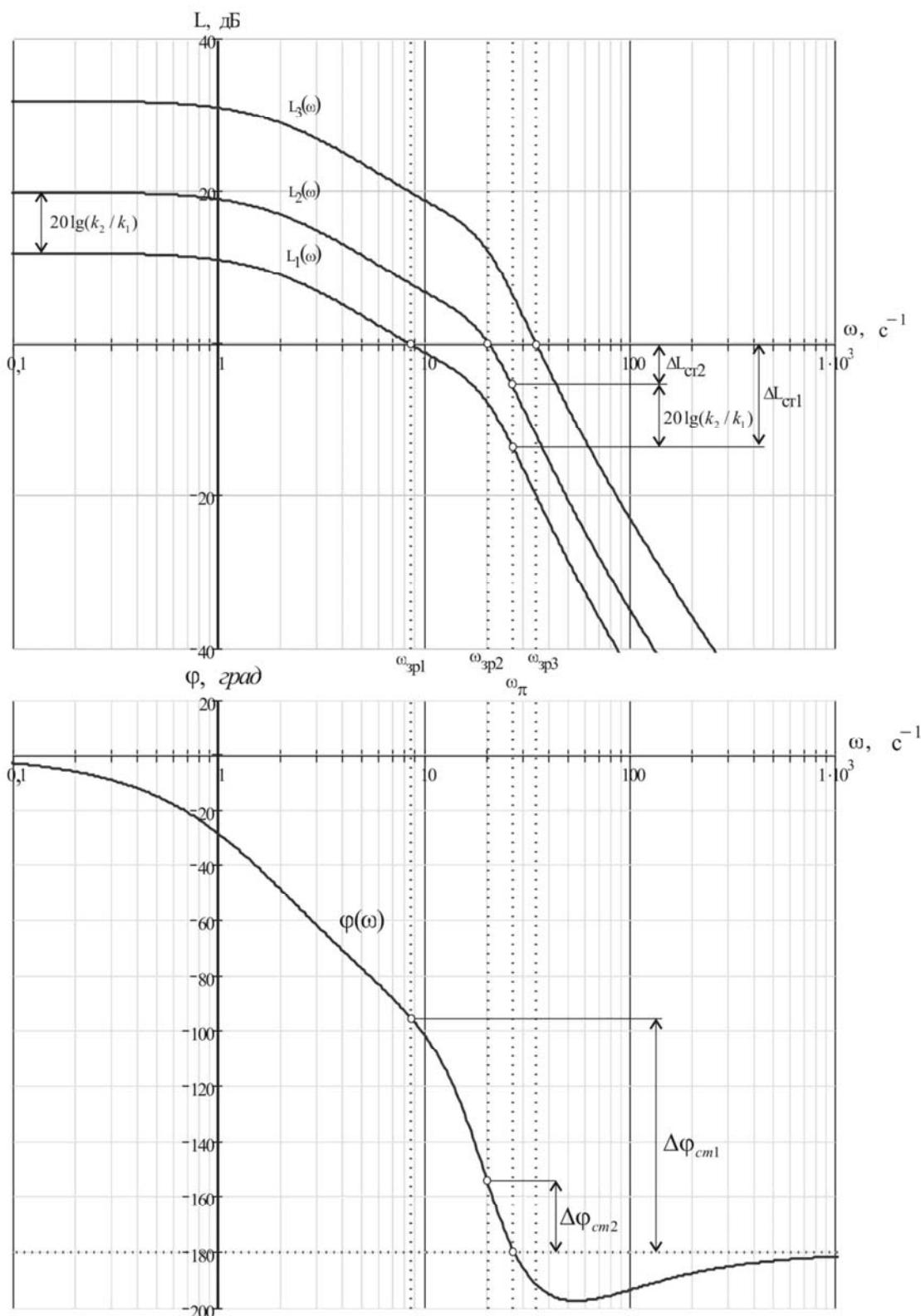
При цьому завжди має справдіжуватись умова  $L(\omega_\pi) < 0$  для забезпечення стійкого стану замкнutoї САК [4, 5, 11, 14].

У деяких випадках замкнuta САК при варіаціях параметра  $k$  може навіть перейти до нейтрально-стійкого (при  $\omega_{sp} = \omega_\pi$ ) або до нестійкого стану (при  $\omega_{sp} > \omega_\pi$ ), що зробить систему непрацездатною.

Проаналізуємо характер впливу параметра  $k$  на стійкість та запаси стійкості замкнutoї САК при його зміні від значення  $k = k_1$  до значення  $k = k_2$ , наприклад при умові  $k_1 < k_2$ .

Як видно з рис. 1, а, де наведено ЛАЧХ  $L_1(\omega)$  та  $L_2(\omega)$ , побудовані відповідно при  $k = k_1$  та  $k = k_2$ , при збільшенні значення  $k$  до рівня  $k_2$  ЛАЧХ  $L_2(\omega)$  зсувається. Визначимо частоту зрізу  $\omega_{sp2}$  шляхом розв'язання оптимізаційної задачі виду (4)

$$\begin{aligned} \omega_{sp2} &= ARG \min_{\omega \in \Omega} \left| L_1(\omega) + 20 \lg \frac{k_2}{k_1} \right| = \\ &= ARG \min_{\omega \in \Omega} \left| 20 \lg W(j\omega) \Big|_{k=k_1} + 20 \lg \frac{k_1 + \Delta k}{k_1} \right| = ARG \min_{\omega \in \Omega} |L_2(\omega)|. \end{aligned} \quad (9)$$



**Рис. 1. Результати моделювання частотних характеристик розімкнутої САК з нестационарним характером коефіцієнтів підсилення та передачі**

Рівняння (9) дозволяє визначати значення частоти зрізу  $\omega_{sp2}$  для скоригованої САК на основі ЛАЧХ нескоригованої САК  $L_1(\omega)$ , величини приросту з будь-яким знаком коефіцієнта підсилення  $\Delta k$ , а також дозволяє перевіряти умову стійкості замкнутої САК  $\omega_{sp2} < \omega_\pi$ , оцінювати швидкодію САК та наближено характеризувати [14] такі кількісні показники якості САК, як тривалість перехідного процесу  $t_p$ , що зв'язана з

параметром  $\omega_{sp2}$  співвідношенням  $t_p \cong \frac{(1\dots2)2\pi}{\omega_{sp2}}$ , та момент часу  $t_{max}$ , при якому

перехідний процес досягає свого максимального значення  $t_{max} \cong \frac{\pi}{\omega_{sp2}}$ .

При цьому на основі (6), (7) також можна сформувати аналітичні моделі для оцінки запасів стійкості  $\Delta L_{cm2}(\omega_\pi)$  та  $\Delta\varphi_{cm2}(\omega_{sp2})$  з використанням нової ЛАЧХ  $L_2(\omega)$  та ЛФЧХ  $\varphi(\omega)$ , яка залишається незмінною при варіаціях  $k$ , оскільки зміна загального коефіцієнта підсилення  $k$  розімкнутої САК впливає тільки на вид її ЛАЧХ:

$$\Delta L_{cm2}(k_2, \omega_\pi) = \left| 20 \lg |W_2(j\omega)| \right|_{\omega=\omega_\pi} = \left| 20 \lg A_2(\omega_\pi) \right| = |L_2(\omega_\pi)|, \quad (10)$$

$$\Delta\varphi_{cm2}(k_2, \omega_{sp}) = \pi + \arctg \frac{\text{Im} W_2(j\omega)}{\text{Re} W_2(j\omega)} \Big|_{\omega=\omega_{sp2}} = \pi + \varphi(\omega_{sp2}). \quad (11)$$

Як правило, при проектуванні САК замовником задаються вимоги щодо забезпечення необхідних (заданих) запасів стійкості, зокрема мінімально можливих значень запасів стійкості за амплітудою  $\Delta L_{cm}^{zad}$  та за фазою  $\Delta\varphi_{cm}^{zad}$ . Запаси стійкості  $\Delta L_{cm2}(k_2, \omega_\pi)$  та  $\Delta\varphi_{cm2}(k_2, \omega_{sp2})$  скоригованої системи мають задовольняти умовам

$$\Delta L_{cm2}(k_2, \omega_\pi) \geq \Delta L_{cm}^{zad}, \quad (12)$$

$$\Delta\varphi_{cm2}(k_2, \omega_{sp}) \geq \Delta\varphi_{cm}^{zad}. \quad (13)$$

Запас стійкості скоригованої САК за амплітудою  $\Delta L_{cm2}(\omega_\pi)$  можна також визначити на основі запасу стійкості за амплітудою  $\Delta L_{cm1}(k_1, \omega_\pi)$  нескоригованої САК та параметру  $\Delta k$

$$\Delta L_{cm2}(k_2, \omega_\pi) = \Delta L_{cm1}(k_1, \omega_\pi) - 20 \lg \frac{k_1 + \Delta k}{k_1}. \quad (14)$$

На основі (6), (10) та (12) при умові  $\Delta L_{cm2}(k_2, \omega_\pi) = \Delta L_{cm}^{zad}$  сформуємо максимально можливе (критичне) значення  $\Delta k_{kp}^L$  приросту коефіцієнта підсилення  $\Delta k$

$$\Delta k_{kp}^L = k_2 - k_1 = \text{ARG} \min_{\Delta k \in R} \left| \Delta L_{cm}^{zad} - \Delta L_{cm1}(k_1, \omega_\pi) + 20 \lg \frac{k_1 + \Delta k}{k_1} \right|. \quad (15)$$

Разом з тим, враховуючи умову  $\Delta\varphi_{cm2}(k_2, \omega_{sp}) = \Delta\varphi_{cm}^{zad}$ , на основі (7), (11) та (13) сформуємо максимально можливе (критичне) значення  $\Delta k_{kp}^\varphi$  приросту коефіцієнта підсилення  $\Delta k$

$$\Delta k_{kp}^\varphi = k_2 - k_1 = ARG \min_{\Delta k \in R} \left| \Delta \varphi_{cm}^{3ad} - \pi - \arctg \frac{\text{Im} W_2(j\omega, \Delta k)}{\text{Re} W_2(j\omega, \Delta k)} \right|_{\omega=\omega_{3p}(\Delta k)}. \quad (16)$$

Максимально можливе (критичне) значення  $\Delta k_{kp}$  приросту коефіцієнта підсилення  $\Delta k$  можна визначити на основі (15), (16) таким чином

$$\Delta k_{kp} = \min \{ \Delta k_{kp}^L, \Delta k_{kp}^\varphi \}. \quad (17)$$

Для забезпечення в САК необхідних запасів стійкості за амплітудою та за фазою треба обов'язково дотримуватись умови

$$\Delta k \leq \Delta k_{kp}.$$

### Математичні моделі для оцінки критичних значень параметрів САК при варіаціях часових затримок її компонентів

У багатьох випадках компоненти комп'ютеризованих систем керування, що реалізують обчислювальні алгоритми різного рівня складності, вносять також часові затримки, що в підсумку призводять до необхідності врахування в передаточній функції (1) ланки запізнення з параметром затримки  $\tau$ , зокрема

$$W^*(p) = \frac{\prod_{i=1}^s k_i \prod_{j=1}^r (\tau_{1j} p + 1) \prod_{l=1}^d (\tau_{2l}^2 p^2 + 2\xi_{2l} \tau_{2l} p + 1)}{p^v \prod_{q=1}^z (T_{1q} p + 1) \prod_{x=1}^y (T_{2x}^2 p^2 + 2\xi_{2x} T_{2x} p + 1)} e^{-\tau p} = W(p) e^{-\tau p}.$$

У загальнююча ланка запізнення з передаточною функцією

$$W_\tau(p) = e^{-\tau p}$$

суттєво впливає на стійкість САК, зменшуючи запаси стійкості за амплітудою та за фазою.

У цілому врахування ланки запізнення призводить тільки до зміни ЛФЧХ розімкнутої САК, оскільки частотні характеристики ланки запізнення мають такий вигляд:

- a)  $A_\tau(\omega) = 1$  (амплітудно-частотна функція);
- б)  $\varphi_\tau(\omega) = -\tau\omega$  (фазо-частотна функція).

При цьому запас стійкості за фазою САК  $\Delta \varphi_{cm}^*$  буде визначатись так

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{cm}^*(\tau, ARG \min_{\omega \in \Omega} |L(\omega)|) &= \pi + \arctg \frac{\text{Im} W(j\omega)}{\text{Re} W(j\omega)} \Big|_{\omega=\omega_{3p}} + \varphi_\tau(\omega_{3p}) = \\ &= \pi + \varphi(\omega_{3p}) - \tau\omega_{3p}. \end{aligned} \quad (18)$$

Оскільки величина  $\varphi_\tau(\omega_{3p}) < 0$ , то САК, що враховує ланку запізнення  $e^{-\tau p}$ , буде мати менший запас стійкості за фазою  $\Delta \varphi_{cm}^*$ , ніж САК без ланки запізнення, тобто при  $k = \text{const}$  та  $\omega_{3p} = \omega_{3p}^* = \text{const}$  справедливою буде нерівність

$$\Delta \varphi_{cm}^*(\tau, ARG \min_{\omega \in \Omega} |L(\omega)|) < \Delta \varphi_{cm}(ARG \min_{\omega \in \Omega} |L(\omega)|),$$

а отже зміниться значення параметру  $\omega_\pi^*$  згідно з розв'язанням наступної оптимізаційної задачі

$$\omega_{\pi}^* = \text{ARG} \min_{\omega \in \Omega} |\varphi^*(\omega) + \pi| = \text{ARG} \min_{\omega \in \Omega} |\varphi(\omega) + \varphi_{\tau}(\omega) + \pi|. \quad (19)$$

При цьому запас системи з передаточною функцією  $W^*(p)$  за амплітудою  $\Delta L_{cm}^*$  необхідно визначати для нового значення частоти  $\omega_{\pi}^*$ , зокрема

$$\Delta L_{cm}^*\left(\tau, \text{ARG} \min_{\omega \in \Omega} |\varphi(\omega) + \pi - \tau\omega|\right) = \left|20 \lg |W^*(j\omega)|\right|_{\omega=\omega_{\pi}^*} = \left|20 \lg A(\omega_{\pi}^*)\right|. \quad (20)$$

Враховуючи співвідношення  $\omega_{\pi}^* < \omega_{\pi}$ , слід зазначити, що в деяких випадках замкнута САК при зміні параметра  $\tau$  може перейти до нейтрально-стійкого (при  $\omega_{sp} = \omega_{\pi}^*$ ) або до нестійкого стану (при  $\omega_{sp} > \omega_{\pi}^*$ ), що також зробить систему непрацездатною.

Для заданого значення запасу стійкості САК за фазою  $\Delta \varphi_{cm}^{3ad} = \text{const}$  можна визначити максимально допустиме (критичне) значення  $\tau_{kp}^{\varphi}$  загального часу затримки

$$\tau_{kp}^{\varphi} = \frac{\pi - \Delta \varphi_{cm}^{3ad} + \arctg \frac{\text{Im} W(j\omega_{sp})}{\text{Re} W(j\omega_{sp})}}{\omega_{sp}}. \quad (21)$$

Для заданого значення запасу стійкості САК за амплітудою  $\Delta L_{cm}^{3ad} = \text{const}$  також можна визначити максимально допустиме (критичне) значення  $\tau_{kp}^L$  загального часу затримки

$$\tau_{kp}^L = \text{ARG} \min_{\omega_{\pi}^* \in \Omega} \left| \Delta L_{cm}^{3ad} - \Delta L_{cm} \left[ \omega_{\pi}^*(\tau) \right] \right| = \text{ARG} \min_{\tau \in R^+} \left| \Delta L_{cm}^{3ad} - \Delta L_{cm} \left[ \omega_{\pi}^*(\tau) \right] \right| \quad (22)$$

Максимально можливе (критичне) значення  $\tau_{kp}$  загального часу затримки можна визначити таким чином

$$\tau_{kp} = \min \left\{ \tau_{kp}^L, \tau_{kp}^{\varphi} \right\}. \quad (23)$$

Для забезпечення в САК необхідних запасів стійкості за амплітудою та за фазою треба обов'язково дотримуватись умови

$$\tau \leq \tau_{kp}.$$

### Результати моделювання

Проаналізуємо отримані результати (4) – (23) на прикладі передаточної функції розімкнутої САК виду (1) з параметрами:  $v=0$ ,  $s=3$ ,  $r=1$ ,  $d=0$ ,  $z=1$ ,  $y=1$ , яку можна представити так

$$W_1(p) = \frac{k_1 k_2 k_3 (\tau_1 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_3^2 p^2 + 2\xi_3 T_3 p + 1)}, \quad (24)$$

де  $\tau_1 = 0,02$  с;  $T_1 = 0,5$  с;  $T_3 = 0,05$  с;  $\xi_3 = 0,5$ ;  $k_1 = 0,2$ ;  $k_2 = 20$ ;  $k_3 = 1$ .

При цьому визначимо значення коефіцієнта підсилення розімкнутої системи

$$k = \prod_{i=1}^s k_i = 4,$$

після чого передаточна функція (24) буде мати такий вигляд

$$W_1(p) = \frac{4(0,02p+1)}{(0,5p+1)(0,0025p^2 + 0,05p + 1)}.$$

Для передаточної функції  $W_1(p)$  на рис. 1, а представлена логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ)  $L_1(\omega)$  з частотою зрізу  $\omega_{zp1} = 8,611 \text{ c}^{-1}$ , а на рис. 1, б – логарифмічна фазо-частотна характеристика (ЛФЧХ)  $\varphi_1(\omega)$  з частотою  $\omega_\pi = 27,229 \text{ c}^{-1}$ . Крім того, на рис. 1, а побудовані ЛАЧХ  $L_2(\omega)$  з частотою зрізу  $\omega_{zp2} = 20,655 \text{ c}^{-1}$  та  $L_3(\omega)$  з частотою зрізу  $\omega_{zp3} = 35,078 \text{ c}^{-1}$  для передаточної функції (15) при значеннях коефіцієнта підсилення розімкнутої системи  $k = 10$  та  $k = 40$ , відповідно.

При застосуванні логарифмічного частотного критерію [5, 14] аналіз ЛФЧХ  $\varphi_1(\omega) = \varphi_2(\omega) = \varphi_3(\omega)$  та ЛАЧХ  $L_1(\omega)$ ,  $L_2(\omega)$ ,  $L_3(\omega)$  показує, що при збільшенні коефіцієнта підсилення розімкнутої системи з  $k = 4$  до  $k = 10$  (при  $\Delta k = 6$ ) замкнута САК залишається стійкою, але запас стійкості за амплітудою  $\Delta L_{cm2}$  зменшується згідно (9) таким чином

$$\Delta L_{cm2} = \Delta L_{cm1} + 20 \lg \frac{k + \Delta k}{k} = \Delta L_{cm1} + 20 \lg 2,5,$$

а відповідно

$$|\Delta L_{cm2}| < |\Delta L_{cm1}|,$$

оскільки:  $L_1(\omega_\pi) < 0$ ,  $L_2(\omega_\pi) < 0$ ,  $20 \lg 2,5 = 7,9588 \text{ дБ} > 0$ .

**При  $\Delta k = 36$  замкнута САК стає нестійкою, бо між частотами  $\omega_{zp3}$  та  $\omega_\pi$  має місце співвідношення  $\omega_{zp3} > \omega_\pi$  та, відповідно,  $L_3(\omega_\pi) > 0$ .**

Дослідження ЛАЧХ та ЛФЧХ для передаточної функції  $W_1(p)$  при різних значеннях параметрів  $\Delta k$  показують, що:

а) для заданого запасу стійкості САК за амплітудою  $\Delta L_{cm}^{zad} = 10 \text{ дБ}$  величина критичного значення  $\Delta k_{kp}^L$ , що визначається згідно з (15), становить  $\Delta k_{kp}^L = 2,092$ ;

б) для заданого запасу стійкості САК за фазою  $\Delta \varphi_{cm}^{zad} = 30 \text{ град.}$  величина критичного значення  $\Delta k_{kp}^\varphi$ , що визначається згідно з (16), становить  $\Delta k_{kp}^\varphi = 4,9$ ;

в) узагальнене критичне значення  $\Delta k_{kp}$  для заданих запасів стійкості за амплітудою  $\Delta L_{cm}^{zad} = 10 \text{ дБ}$  та за фазою  $\Delta \varphi_{cm}^{zad} = 30 \text{ град.}$  визначається згідно з (17) і становить

$$\Delta k_{kp} = \min \left\{ \Delta k_{kp}^L, \Delta k_{kp}^\varphi \right\} = \min \left\{ 2,095; 4,9 \right\} = 2,095;$$

г) критичне значення коефіцієнта підсилення розімкнутої САК, при якому замкнута САК залишається стійкою з забезпеченням заданих запасів стійкості  $\{\Delta L_{cm}^{zad} = 10, \Delta \varphi_{cm}^{zad} = 30\}$ , набуває значення

$$k_{kp} = k + \Delta k_{kp} = 6,092.$$

Отже, для надання САК заданих запасів стійкості за амплітудою та за фазою необхідно при її експлуатації забезпечити виконання умови  $k \leq 6,092$ .

На рис. 2, а побудована ЛАЧХ  $L(\omega)$  розімкнutoї системи з передаточною функцією

$$W_1^*(p) = W_1(p)e^{-\tau p},$$

трансформованою шляхом введення до складу передаточної функції (24) ланки запізнення з передаточною функцією  $W_\tau(p) = e^{-\tau p}$ . Частота зрізу  $\omega_{zp}$  ЛАЧХ  $L(\omega)$  приймає значення  $\omega_{zp} = 11,482 \text{ c}^{-1}$  при таких параметрах моделювання:  $k_1 = 0,4$ ;  $k_2 = 8$ ;  $k_3 = 1,5625$ ;  $\tau_1 = 0,02 \text{ с}$ ;  $T_1 = 0,5 \text{ с}$ ;  $T_3 = 0,05 \text{ с}$ ;  $\xi_3 = 0,5$ .

На рис. 2, б наведені відповідні до ЛАЧХ  $L(\omega)$  (рис. 2, а) логарифмічні фазочастотні характеристики  $\varphi_1(\omega)$  з частотою  $\omega_{\pi 1} = 27,542 \text{ c}^{-1}$ ,  $\varphi_2(\omega)$  з частотою  $\omega_{\pi 2} = 14,45 \text{ c}^{-1}$  та  $\varphi_3(\omega)$  з частотою  $\omega_{\pi 3} = 9,4 \text{ c}^{-1}$  для передаточної функції

$$W_1^*(p) = \frac{5(0,02p + 1)}{(0,5p + 1)(0,0025p^2 + 0,05p + 1)} e^{p\tau}$$

при відповідних часових затримках  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = 0,07 \text{ с}$ ,  $\tau_3 = 0,15 \text{ с}$ , а також ЛФЧХ ланок запізнення:  $\phi_2(\omega) = -\tau_2\omega = -0,07\omega$  та  $\phi_3(\omega) = -\tau_3\omega = -0,15\omega$ .

Дослідження ЛАЧХ та ЛФЧХ для передаточної функції  $W_1^*(p)$  при різних значеннях узагальненої часової затримки  $\tau$  показують, що:

- для заданого запасу стійкості САК за амплітудою  $\Delta L_{cm}^{zad} = 10 \text{ дБ}$  величина критичного значення  $\tau_{kp}^L$ , що визначається згідно з (22), становить  $\tau_{kp}^L = 0,01 \text{ с}$ ;
- для заданого запасу стійкості САК за фазою  $\Delta \varphi_{cm}^{zad} = 30 \text{ град.}$  величина критичного значення  $\tau_{kp}^\varphi$ , що визначається згідно з (21), становить  $\tau_{kp}^\varphi = 0,111 \text{ с}$ ;
- узагальнене критичне значення  $\tau_{kp}$  для заданих запасів стійкості за амплітудою  $\Delta L_{cm}^{zad} = 10 \text{ дБ}$  та за фазою  $\Delta \varphi_{cm}^{zad} = 30 \text{ град.}$  визначається згідно з (23) і становить

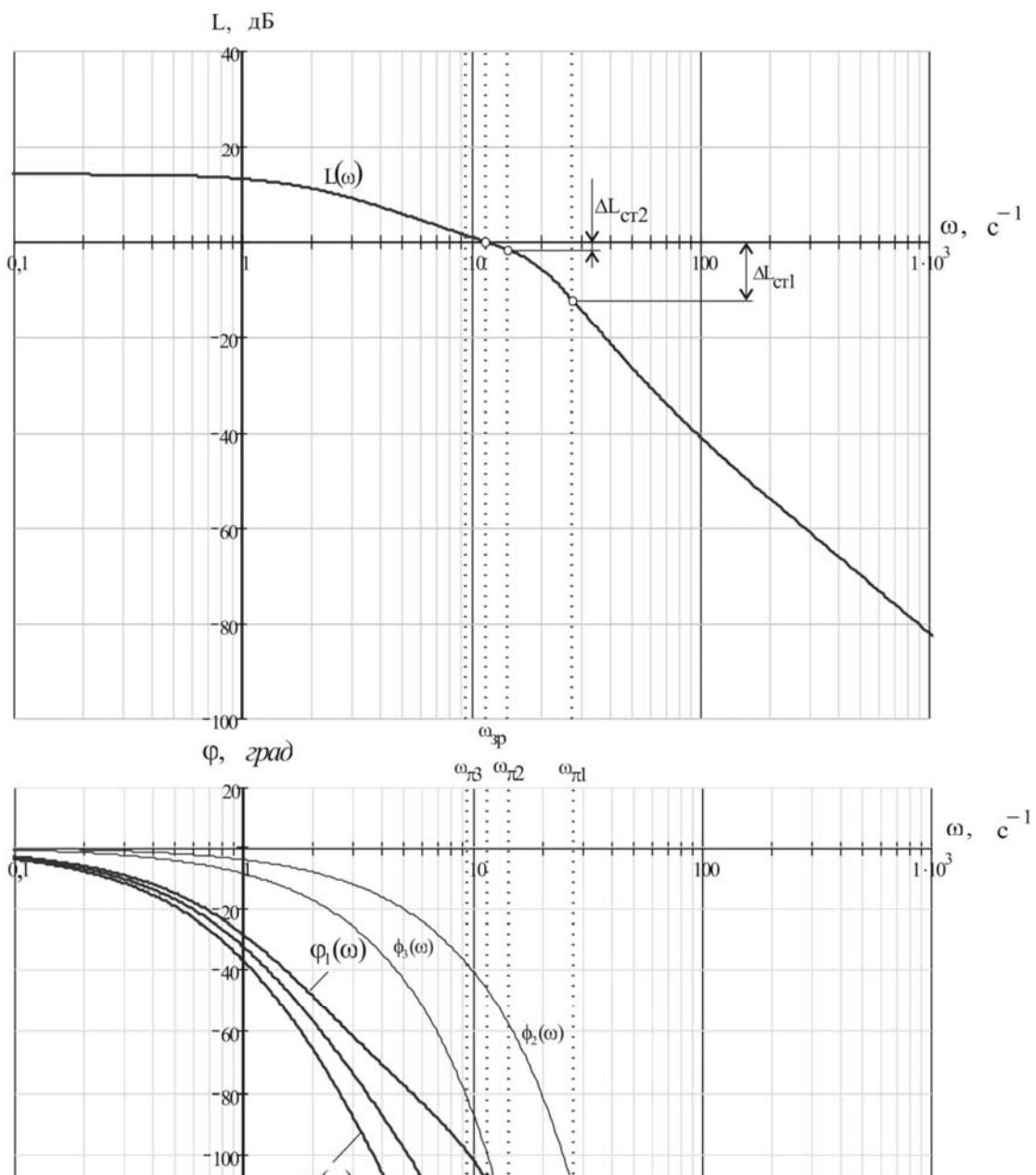
$$\tau_{kp} = \min \left\{ \tau_{kp}^L, \tau_{kp}^\varphi \right\} = \min \left\{ 0,01; 0,111 \right\} = 0,01 \text{ с.}$$

Отже, для надання САК заданих запасів стійкості за амплітудою та за фазою необхідно при її експлуатації забезпечити виконання умови  $\tau \leq 0,01 \text{ с}$ .

Аналіз ЛАЧХ та ЛФЧХ, наведених на рис. 2 показує, що при збільшенні параметра  $\tau$  зменшується запас стійкості САК за фазою, а при  $\tau_3 = 0,15$  замкнута САК стає нестійкою ( $\omega_{zp} > \omega_{\pi 3}$ ).

## Висновки

Результати проведених досліджень показують високу ефективність запропонованого підходу до оцінки параметричної стійкості лінійних САК. Застосування розроблених математичних моделей для визначення відповідних критичних значень, пов'язаних з варіаціями параметрів, дозволить модифікувати процес експериментальних досліджень САК шляхом врахування найбільш небажаних режимів експлуатації на межі критичних варіацій параметрів, що суттєво підвищить гарантоздатність комп'ютеризованих систем керування різного призначення.



**Рис. 2. Дослідження впливу часових затримок компонентів на запаси стійкості комп’ютеризованої САК**

Результати моделювання підтверджують ефективність та працездатність розроблених математичних моделей, що можуть знайти широке застосування при проектуванні комп’ютеризованих систем автоматичного керування з параметрично нестационарними компонентами.

Подальші дослідження доцільно проводити в напрямку врахування інтенсивності зовнішніх збурень при оцінці параметричної стійкості САК.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Азарков В.М., Блохин Л.Н., Житецький Л.С., Куссуль Н.Н. Робастные методы оценивания, идентификации и адаптивного управления. – К.: НАУ, 2004. – 500 с.
2. Аркадьев Ю.В., Панченко А.И., Попруга А.Г., Боярчук В.П. Проектирование по теории автоматического управления. – Херсон: ХГТУ, 2002. – 272 с.
3. Гудвин Г.К., Гребе С.Ф., Сальгадо М.Э. Проектирование систем управления. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2004. – 911 с.
4. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2004. – 832 с.
5. Егоров К.В. Основы теории автоматического регулирования. – М.: Энергия, 1967. – 648 с.
6. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления. – СПб.: Политехника, 2003. – 302 с.
7. Кондратенко Ю.П., Кондратенко Г.В. Системи управління: Навчальний посібник. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. Петра Могили, 2006. – 84 с.
8. Кондратенко Ю.П. Комп'ютерні методи дослідження систем управління. – Миколаїв: Вид – во МДГУ ім. Петра Могили, 2004. – 36 с.
9. Крак Ю.В., Левошич О.Л. Оптимальне керування. – К.: Видавничо-поліграфічний центр Київський університет, 2005. – 106 с.
10. Лурье Б.Я., Энрайт П.Дж. Классические методы автоматического управления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 640 с.
11. Никулин У.А. Основы теории автоматического управления: Частотные методы анализа и синтеза систем. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 640 с.
12. Петров Ю.П. Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 192 с.
13. Подлесный Н.И., Рубанов В.Г. Элементы систем автоматического управления и контроля. – К.: Выща школа, 1991. – 461 с.
14. Теория автоматического управления. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления. /Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1977. – 303 с.
15. Теория автоматического управления: Учебник для вузов/ С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев и др.; /Под ред. В.Б. Яковлева. – М.: Высшая школа, 2003. – 567 с.
16. Ткаченко А.Н. Судовые системы автоматического управления и регулирования. – Л.: Судостроение, 1984. – 288 с.
17. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 616 с.
18. Шарапов В.М., Минаев И.Г., Мусиенко М.П. Теория автоматического управления. – Черкассы: ЧГТУ, 2005. – 200 с.