УДК 62-502

ТИМЧЕНКО В.Л.

КВАЗІЛІНЕАРИЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ПРИ ДОПУСТИМИХ КОЛИВАННЯХ

Запропоновано метод лінеаризації багатовимірних нелінійних динамічних систем при допустимих коливаннях, що перетворює начальну нелінійну систему в лінійну нестаціонарну систему. Розглянуто застосування методу до різного виду рівнянь, які описують динамічні системи, та їх рішення.

The method of multidimensional nonlinear dynamic systems linearization at permissible oscillation that transforms initial nonlinear system to linear non-stationary system has been proposed. The method application to different types of equations, which describe the dynamic systems and its solution has been considered.

Аналіз поведінки нелінійних динамічних систем значно ускладнюється практично неможливістю рішення нелінійної диференціальної системи рівнянь у замкнутому виді [1, 2, 3]. Численні методи рішення не дозволяють встановлювати загальні залежності процесів у динамічній системі та проводити дослідження, наприклад, стійкості та керованості системи.

У той же час широкий клас нелінійних інерційних динамічних систем функціонують в області деякої робочої точки з відомими допустимими значеннями амплітуд коливань. Це, наприклад, інерційні системи стабілізації відносно заданого параметра чи групи параметрів. Удосконалення методів лінеаризації та безпосередньо лінеаризації подібних систем представляють значний практичний інтерес.

У даній статті пропонується метод лінеаризації, що перетворює начальну нелінійну систему в лінійну нестаціонарну систему. На першому етапі здійснюється лінеаризація методом дотичної апроксимації чи найменших квадратів, на другому – використання рішення попередньо лінеаризованої системи рівнянь в якості змінного вектору параметрів та остаточне рішення отриманої системи зі змінними параметрами [4]. Дослідження нестаціонарних лінійних систем складніше ніж стаціонарних, у той же час методи їх дослідження добре розроблені [5, 6]. Оскільки процес лінеаризації при цьому перетворює нелінійне рівняння в досить складне лінійне зі змінними параметрами, то його доцільно назвати процесом квазілінеаризації.

Прийняте припущення про допустимі коливання визначає великий клас систем, що мають достатній запас динамічної стійкості. Допустимі коливання динамічних інерційних систем – це коливання з амплітудами, які не приводять до порушення параметрів робочого процесу функціонування системи. Приймемо також, що амплітуди допустимих коливань відомі з достатньою точністю. Це дозволяє на першому етапі процесу квазілінеаризації застосувати метод найменших квадратів, який дає більш високу точність ніж дотична апроксимація. При цьому належить відмітити, що для показових функцій другого порядку перший етап квазілінеаризації дає тотожний результат для обох методів лінеаризації [2, 7].

Квазілінеаризація нелінійного диференціального рівняння

Розглянемо застосування квазілінеаризації на прикладі рішення скалярного нелінійного диференціального рівняння:

$$\dot{x}(t) = x^n(t)\,. \tag{1}$$

Дотична апроксимація для початкового значення аргументу x_0 дає рівняння:

$$\dot{x} = x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x = x_0^n + nx_0^{n-1}(x - x_0) = nx_0^{n-1}x - (n-1)x_0^n\,. \tag{2}$$

Можливо також записати:

$$\dot{x}_0 + \Delta\dot{x} = x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x\,,$$

та з урахуванням

$$\dot{x}_0 = x_0^n$$

отримаємо:

$$\Delta\dot{x} = nx_0^{n-1}\Delta x\,.$$

Рішення неоднорідного рівняння (2) у вигляді:

$$x^*(t) = e^{nx_0^{n-1}t}x_0 - \int_0^t e^{nx_0^{n-1}(t-\tau)}(n-1)x_0^n d\tau$$

Підставляємо в рівняння (1) в якості змінного параметру:

$$\dot{x}(t) = [x^*(t)]^{n-1}x(t).$$

Знаходимо кінцеве рішення останнього рівняння зі змінним параметром:

$$x(t) = e^{\int_0^t [x^*(\tau)]^{n-1} d\tau}x_0\,.$$

Згідно з методом найменших квадратів для рівняння (1) находимо:

$$\dot{x}_0 + \Delta\dot{x} = (x_0 + \Delta x)^n\,.$$

Далі при

$$\dot{x}_0 = x_0^n$$

отримаємо:

$$\Delta\dot{x} = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n\,.$$

Для амплітуд допустимих коливань від робочої точки $\{-A_0;+A_0\}$ лінеаризоване рівняння має вигляд:

$$\Delta\dot{x} \approx k\Delta x\,,$$

де $$k = \frac{\int_{-A_0}^{A_0}[(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n]\Delta x d(\Delta x)}{\int_{-A_0}^{A_0}(\Delta x)^2 d(\Delta x)}\,.$$

Для функції похідної маємо:

$$\dot{x} = x_0^n + k\Delta x = x_0^n + k(x - x_0) = kx + (x_0^n - kx_0)$$

та отримуємо проміжне рішення:

$$x^*(t) = e^{kt}x_0 + \int_0^t e^{k(t-\tau)}(x_0^n - kx_0)d\tau\,,$$

на основі якого формується та вирішується рівняння зі змінним параметром $x^*(t)$.

Для n=2 при лінеаризації в області $\{-A_0;+A_0\}$ перший етап квазілінеаризації дає однакові значення коефіцієнту лінеаризації для дотичної апроксимації та методу найменших квадратів.

Для нелінійних рівнянь виду:

$y = f(x_1, x_2)$

де x_1; x_2 – незалежні змінні;

лінеаризоване рівняння для першого етапу запишеться:

$\Delta y = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2$.

Коефіцієнти визначаться з наступних рівнянь:

$$k_1 = \frac{[\int_{-A_0}^{A_0} \Delta y \Delta x_1 d(\Delta x_1)][\int_{-B_0}^{B_0} \Delta x_2^2 d(\Delta x_2)] -}{[\int_{-A_0}^{A_0} \Delta x_1^2 d(\Delta x_1)] \int_{-B_0}^{B_0} \Delta x_2^2 d(\Delta x_2) - [\int_{-A_0}^{A_0} \int_{-B_0}^{B_0} \Delta x_1 \Delta x_2 d(\Delta x_1) d(\Delta x_2)]^2} -$$

$$- \frac{[\int_{-A_0}^{A_0} \Delta y \Delta x_2 d(\Delta x_2)][\int_{-A_0}^{A_0} \int_{-B_0}^{B_0} \Delta x_1 \Delta x_2 d(\Delta x_1) d(\Delta x_2)]}{[\int_{-A_0}^{A_0} \Delta x_1^2 d(\Delta x_1)] \int_{-B_0}^{B_0} \Delta x_2^2 d(\Delta x_2) - [\int_{-A_0}^{A_0} \int_{-B_0}^{B_0} \Delta x_1 \Delta x_2 d(\Delta x_1) d(\Delta x_2)]^2}$$

$$k_2 = \frac{[\int_{-A_0}^{A_0} \Delta y \Delta x_2 d(\Delta x_2)][\int_{-B_0}^{B_0} \Delta x_1^2 d(\Delta x_1)]}{[\int_{-A_0}^{A_0} \Delta x_1^2 d(\Delta x_1)] \int_{-B_0}^{B_0} \Delta x_2^2 d(\Delta x_2) - [\int_{-A_0}^{A_0} \int_{-B_0}^{B_0} \Delta x_1 \Delta x_2 d(\Delta x_1) d(\Delta x_2)]^2} -$$

$$- \frac{[\int_{-A_0}^{A_0} \Delta y \Delta x_1 d(\Delta x_1)][\int_{-A_0}^{A_0} \int_{-B_0}^{B_0} \Delta x_1 \Delta x_2 d(\Delta x_1) d(\Delta x_2)]}{[\int_{-A_0}^{A_0} \Delta x_1^2 d(\Delta x_1)] \int_{-B_0}^{B_0} \Delta x_2^2 d(\Delta x_2) - [\int_{-A_0}^{A_0} \int_{-B_0}^{B_0} \Delta x_1 \Delta x_2 d(\Delta x_1) d(\Delta x_2)]^2},$$

де $\{-A_0;+A_0\};\{-B_0;+B_0\}$ – амплітуди допустимих коливань змінних x_1; x_2.

Приклад. Для рівняння

$$\dot{x}(t) = ax^3(t)$$

метод найменших квадратів для начального значення x_0 в області допустимих амплітуд $\{-A_0;+A_0\}$ дає на першому етапі лінеаризації рівняння виду

$$\dot{x}(t) = a[3x_0^2 + \frac{3}{5}(\Delta A_0)^2]x(t) - a[2x_0^3 + \frac{3}{5}(\Delta A_0)^2 x_0] = kx(t) - q,$$

де k , q – є постійні параметри.

Задамо x_0=1; a=0.5; A_0=1 та запишемо тоді

$$\dot{x}(t) = 1.8x(t) - 1.3 .$$

Рішення отриманого рівняння має вигляд

$$x^*(t) = e^{1.8t} - 1.3\int_0^t e^{1.8(t-\tau)}d\tau = e^{1.8t} - \frac{13}{18}(1 - e^{1.8t}) = \frac{31}{18}e^{18t} - \frac{13}{18}.$$

На другому етапі лінеаризації записуємо та вирішуємо лінійне рівняння

$$\dot{x}(t) = 0.5(\frac{31}{18}e^{1.8t} - \frac{13}{18})^2 x(t).$$

Рішення отриманого рівняння має вигляд

$$x(t) = e^{\int_0^t 0.5(\frac{31}{18}e^{1.8\tau} - \frac{13}{18})^2 d\tau} = e^{0.24e^{3.6t} - 0.7e^{1.8t} + 0.26t + 0.46}.$$

Квазілінеаризація системи нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Для системи рівнянь виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 + x_1^2; \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 + x_2^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

отримано для першого етапу лінеаризовану в області робочих точок x_{10} та x_{20} систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}_1 &= k_{11}\Delta x_1 + k_{12}\Delta x_2 + 2x_{10}\Delta x_1; \\ \Delta\dot{x}_2 &= k_{21}\Delta x_1 + k_{22}\Delta x_2 + 2x_{20}\Delta x_2, \end{aligned} \qquad (4)$$

та коефіцієнти лінеаризації функцій виду $x_1 * x_2$ ідентичні по виду тим, що приведені вище для k_1 та k_2 з урахуванням для k_{11}; k_{12} :

$$\Delta y = \Delta\dot{x}_1$$

для k_{21}; k_{22}:

$$\Delta y = \Delta\dot{x}_2.$$

Коефіцієнти лінеаризації для квадратичних функцій дорівнюють відповідно $2*x_{10}$ та $2*x_{20}$.

Якщо перейти від прирощень до повної функції система (4) запишеться

$$\dot{x}_1 = k_{11}(x_1 - x_{10}) + x_{10}x_{20} + k_{12}(x_2 - x_{20}) + x_{10}^2 + 2x_{10}(x_1 - x_{10});$$

$$\dot{x}_2 = k_{21}(x_1 - x_{10}) + x_{10}x_{20} + k_{22}(x_2 - x_{20}) + x_{20}^2 + 2x_{20}(x_2 - x_{20}),$$

Згуртуємо відповідні члени при x_1, x_2 та отримаємо систему лінійних рівнянь у векторно-матричній формі:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{Q},$$

де матриця $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \bar{k}_{11} & k_{12} \\ k_{21} & \bar{k}_{22} \end{vmatrix}$ з новими значеннями

$$\bar{k}_{11} = k_{11} + 2x_{10}; \ \bar{k}_{22} = k_{22} + 2x_{20};$$

вектор чисельних значень $\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} x_{10}x_{20} - k_{11}x_{10} - k_{12}x_{20} - x_{10}^2 \\ x_{10}x_{20} - k_{21}x_{10} - k_{22}x_{20} - x_{20}^2 \end{vmatrix}$;

вектор змінних $\mathbf{X} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$.

Тоді проміжне рішення запишеться у вигляді:

$$\mathbf{X}^*(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t-\tau)dt}\mathbf{Q}dt,$$

де $\mathbf{X}^*(t) = \begin{vmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{vmatrix}$; $\mathbf{X}_0 = \begin{vmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{vmatrix}$.

Матрицю $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ можна знайти за допомогою розкладу Сильвестра

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{2}\left(e^{p_i t} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2} \frac{\mathbf{A} - p_j \mathbf{E}}{p_i - p_j} \right),$$

де $\mathbf{E}$ – одинична матриця ;

p_i, p_j – корні характеристичного поліному однорідного диференціального рівняння (власні числа матриці).

Рішення $x_1^*(t)$ та $x_2^*(t)$ як явні функції часу підставляються в систему рівнянь (3) та отримуємо лінійну систему зі змінними параметрами:

$$\dot{x}_1(t) = x_1^*(t)[x_1(t) + x_2(t)];$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2^*(t)[x_1(t) + x_2(t)].$$

У векторно-матричній формі система має вигляд:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}^*(t)\mathbf{X}(t),$$

де матриця $\mathbf{A}^*(t) = \begin{vmatrix} x_1^* & x_1^* \\ x_2^* & x_2^* \end{vmatrix}$.

Рішення векторно-матричного рівняння визначається за допомогою матриціанту чи з урахуванням вимог до виду матриці $\mathbf{A}^*(t)$ [2,7] з виразу:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\int_0^t [\mathbf{A}^*(\tau)]d\tau}\mathbf{X}(0).$$

Квазілінеаризація багатовимірних нелінійних рівнянь.

Розглянемо порядок застосування квазілінеаризації для однорідних багатовимірних нелінійних рівнянь виду

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X})\mathbf{X}(t). \tag{5}$$

1.Проводимо лінеаризацію нелінійної функції, представленої у вигляді аналітичної функції, за допомогою дотичної апроксимації та з урахуванням векторно-матричних перетворень

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X})\mathbf{X}(t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{X}(0))\mathbf{X}(0) + \left[\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{X}(t))\mathbf{X}(t)}{d\mathbf{X}^{\mathbf{T}}(t)}\right]_{\mathbf{X}(0)}[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(0)] =$$

$$= \mathbf{R}\mathbf{X}(t) + [\mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) - \mathbf{R}]\mathbf{X}(0),$$

де матриця параметрів для значень $\mathbf{X}(0)$ рівняється $\mathbf{R} = \left[\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{X}(t))\mathbf{X}(t)}{d\mathbf{X}^{\mathbf{T}}}\right]_{\mathbf{X}(0)}$ та визначається як якобіан.

2. Знаходимо рішення та здійснюємо відповідні перетворення отриманої неоднорідної стаціонарної лінійної системи

$$\mathbf{X}^*(t) = e^{\mathbf{R}t}\mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{R}(t-\tau)}[\mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) - \mathbf{R}]\mathbf{X}(0)d\tau =$$

$$e^{\mathbf{R}t}\mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{R}(t-\tau)}d\tau[\mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) - \mathbf{R}]\mathbf{X}(0) =$$

$$e^{\mathbf{R}t}\mathbf{X}(0) - (\int_0^t e^{\mathbf{R}(t-\tau)}\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}d(t-\tau)[\mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) - \mathbf{R}]\mathbf{X}(0) =$$

$$e^{\mathbf{R}t}\mathbf{X}(0) - (\int_0^t e^{\mathbf{R}(t-\tau)}d\mathbf{R}\tau)\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) - \mathbf{R}]\mathbf{X}(0) =$$

$$[e^{\mathbf{R}t}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) + \mathbf{E}]\mathbf{X}(0),$$

де $\mathbf{E}$ – одинична матриця.

3. На основі знайденого рішення $\mathbf{X}^*$(t), представляємо векторно-матричну систему нелінійних диференційних рівнянь (5) у вигляді системи лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}^*(t))\mathbf{X}(t),$$

де $\mathbf{A}(\mathbf{X}^*(t))$ – матриця, компоненти якої є відомими функціями часу.

Загалом для багатовимірної нелінійної системи керування запропонований метод приводе к лінійній нестаціонарній системі виду

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \overline{\mathbf{A}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \qquad (6)$$

де $\overline{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}^*(t))$ – матриця, компоненти якої представляють відомі функції часу, безперервні і диференційовані.

Застосування квазілінеаризації значно підвищує точність аналітичного рішення в межах початкового значення, дозволяє привести нелінійну систему рівнянь до нестаціонарної системи та провести аналітичні дослідження керованості і стійкості для керованих динамічних систем.

ЛІТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Беллман Р., Калаба Р. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
2. Корн Г. Справочник по математике/ Корн Г., Корн Т. – М.: Наука, 1984. – 831 с.
3. Найфэ Ф. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 536 с.
4. Тимченко В.Л. Линеаризация уравнения динамики заякоренного судна // Межведом. сб. научн. трудов “Судостроение”. № 37, Киев – 1988, С. 77-81.
5. Михайлов Ф.А. Теория и методы исследования нестационарных линейных систем. – М.: Наука, 1986. – 320 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука – 712 с.
7. Чаки Ф. Современная теория управления – М.: Мир, 1975. – 424 с.