УДК 519.7

Воробйова А.І., Курікша О.В.

СИМЕТРІЙНИЙ АНАЛІЗ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО ПАКЕТУ MAPLE 11

Розглянуто застосування математичного пакету Maple 11 до відшукання симетрій систем диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП) на прикладі моделі Фрьоліха-Пайерлса у нерівноважному стані для одновимірного випадку.

***Ключові слова**:* груповий аналіз диференціальних рівнянь, оператори симетрії, група інваріантності.

Применение математического пакета Maple 11 для вычисления симметрий систем диференциальних уравнений в частичных производных ДУЧП рассмотрено на примере модели Фрёлиха-Пайерлса в неравновесном состоянии для одномерного случая.

***Ключевые слова:** групповой анализ дифференциальных уравнений, операторы симметрии, группа инвариантности.*

The application of mathematical program Maple 11 for calculation of symmetries systems of partial differential equations (PDEs) is considered to example of Fröhlich-Peierls Hamiltonian model in nonequilibrium state for one dimensional case.

***Key words:** group analysis of differential equalizations, operators of symmetry, group of invariance.*

ВСТУП

Груповий аналіз є ефективним інструментом при дослідженні диференціальних рівнянь. Основні ідеї групового аналізу були сформульовані Софусом Лі ще у XIX столітті. Головним інструментом, яким користувався Лі, є опис властивостей диференціальних рівнянь за допомогою груп [2]. Подальший розвиток груповий аналіз диференціальних рівнянь знайшов у роботах Л.В. Овсяннікова [3], який зокрема звернув увагу на можливість побудови окремих класів точних розв'язків диференціальних рівнянь механіки та математичної фізики за допомогою алгебр Лі.

Група симетрій системи диференціальних рівнянь – це група, за допомогою якої, знаючи деякий розв'язок сиситеми, можна відшукати і інші розв'язки цієї системи. Дослідження симетрій диференціальних рівнянь є процес алгоритмізований, який використовується у багатьох пакетах прикладних програм. В даній статті розглянуто відшукання групи симетрій системи диференціальних рівнянь в частинних похідних за допомогою математичного пакету Maple 11.

1. АЛГОРИТМ ВІДШУКАННЯ СИМЕТРІЙ СИСТЕМИ ДРЧП НА ПРИКЛАДІ МОДЕЛІ ФРЬОЛІХА-ПАЙЕРЛСА

Рівняння для рівноважних та нерівноважних станів моделі Фрьоліха-Пайерлса для електронів, що взаємодіють с фононами тільки при певних дискретних модах отримані в роботі [5]. В одновимірному випадку нерівноважні стани описуються системою зачеплених рівнянь:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}W(t,x)+\omega_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(t,x)=-4\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left|\Psi(t,x)\right|^2, \qquad (1)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x)=\left(-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\mu\right)\Psi(t,x)+W(t,x)\Psi(t,x), \qquad (2)$$

де ω_0, α, m, μ – дійсні параметри.

Хвильова функція $\Psi(t,x)$ задовольняє рівняння Шрьодінгера з залежним від часу потенціалом, що задається дійсною функцією $W(t,x)$, яка є розв'язком неоднорідного рівняння Даламбера з правою частиною $-4\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left|\Psi(t,x)\right|^2$.

Очевидно, що система рівнянь (1)-(2) не буде мати дуже широкі симетрії, оскільки ліва частина рівняння (1) інваріантна відносно перетворення Лоренца, а ліва частина рівняння (2) інваріантна відносно перетворення Галілея. Перед тим, як шукати симетрії системи рівнянь (1)-(2) віднормуємо коефіцієнти, зробивши заміну:

$$W(t,x)=\widetilde{W}(t,\widetilde{x}), \qquad \Psi(t,x)=\frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}e^{i\mu t}\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x}), \qquad \widetilde{x}=\frac{x}{\omega_0}.$$

Тоді маємо систему:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widetilde{W}(t,\widetilde{x})+\frac{\partial^2}{\partial \widetilde{x}^2}\widetilde{W}(t,\widetilde{x})=-\frac{\partial^2}{\partial \widetilde{x}^2}\left|\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x})\right|^2, \qquad (3)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x})=-\frac{1}{2m\omega_0^2}\frac{\partial^2}{\partial \widetilde{x}^2}\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x})+\widetilde{W}(t,\widetilde{x})\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x}), \qquad (4)$$

Представивши функцію $\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x})$ через амплітуду і фазу $\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x})=\rho(t,\widetilde{x})e^{i\varphi(t,\widetilde{x})}$ зводимо систему (3)-(4) до системи вигляду:

$$F_1=\widetilde{W}_{tt}-\widetilde{W}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}-2\left(\rho_{\widetilde{x}}^2+\rho\rho_{\widetilde{x}\widetilde{x}}\right)=0, \qquad (5)$$

$$F_2=\rho_t+\frac{1}{2m\omega_0^2}\left(2\rho_{\widetilde{x}}\varphi_{\widetilde{x}}+\rho\varphi_{\widetilde{x}\widetilde{x}}\right)=0, \qquad (6)$$

$$F_3=\rho\varphi_t-\frac{1}{2m\omega_0^2}\left(\rho_{\widetilde{x}\widetilde{x}}-\rho\varphi_{\widetilde{x}}^2\right)+\rho\widetilde{W}=0. \qquad (7)$$

Будемо говорити, що система рівнянь (5)-(7) задає многовид $[F]$ у просторі $\underset{2}{V}$, де $V=\left\langle t,\widetilde{x},\widetilde{W},\rho,\varphi\right\rangle$, а F – вектор з компонентами F_1,F_2,F_3.

Алгоритм Лі відшукання симетрій диференціальних рівнянь ґрунтується на інфінітезимальному критерієві інваріантності [1,3,4].

Інфінітезимальний оператор групи інваріантності системи (5)-(7) будемо шукати у вигляді:

$$X=\tau(t,\widetilde{x},\widetilde{W},\rho,\varphi)\partial_t+\xi(t,\widetilde{x},\widetilde{W},\rho,\varphi)\partial_{\widetilde{x}}+\eta_1(t,\widetilde{x},\widetilde{W},\rho,\varphi)\partial_{\widetilde{W}}+$$
$$+\eta_2(t,\widetilde{x},\widetilde{W},\rho,\varphi)\partial_\rho+\eta_3(t,\widetilde{x},\widetilde{W},\rho,\varphi)\partial_\varphi$$

Оскільки система рівнянь (5)-(7) містить частинні похідні до другого порядку включно, то необхідно знайти друге продовження $\underset{2}{X}$ оператора X, яке має вигляд:

$$\underset{2}{X}=X+\eta_1^t\partial_{\widetilde{W}_t}+\eta_1^{\widetilde{x}}\partial_{\widetilde{W}_{\widetilde{x}}}+\eta_2^t\partial_{\rho_t}+\eta_2^{\widetilde{x}}\partial_{\rho_{\widetilde{x}}}+\eta_3^t\partial_{\varphi_t}+\eta_3^{\widetilde{x}}\partial_{\varphi_{\widetilde{x}}}+\eta_1^{tt}\partial_{\widetilde{W}_{tt}}+\eta_1^{t\widetilde{x}}\partial_{\widetilde{W}_{t\widetilde{x}}}+\eta_1^{\widetilde{x}\widetilde{x}}\partial_{\widetilde{W}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}}+$$
$$+\eta_2^{tt}\partial_{\rho_{tt}}+\eta_2^{t\widetilde{x}}\partial_{\rho_{t\widetilde{x}}}+\eta_2^{\widetilde{x}\widetilde{x}}\partial_{\rho_{\widetilde{x}\widetilde{x}}}+\eta_3^{tt}\partial_{\varphi_{tt}}+\eta_3^{t\widetilde{x}}\partial_{\varphi_{t\widetilde{x}}}+\eta_3^{\widetilde{x}\widetilde{x}}\partial_{\varphi_{\widetilde{x}\widetilde{x}}}$$

Додаткові координати в операторові $\underset{2}{X}$ обчислюємо наступним чином:

$$\eta_1^t = D_t(\eta_1) - \widetilde{W}_t D_t(\tau) - \widetilde{W}_{\tilde{x}} D_t(\xi),$$

$$\eta_1^{\tilde{x}} = D_{\tilde{x}}(\eta_1) - \widetilde{W}_t D_{\tilde{x}}(\tau) - \widetilde{W}_{\tilde{x}} D_{\tilde{x}}(\xi),$$

$$\eta_1^{tt} = D_t(\eta_1^t) - \widetilde{W}_{tt} D_t(\tau) - \widetilde{W}_{t\tilde{x}} D_t(\xi),$$

$$\eta_1^{t\tilde{x}} = D_{\tilde{x}}(\eta_1^t) - \widetilde{W}_{tt} D_{\tilde{x}}(\tau) - \widetilde{W}_{t\tilde{x}} D_{\tilde{x}}(\xi),$$

$$\eta_1^{\tilde{x}\tilde{x}} = D_{\tilde{x}}(\eta_1^{\tilde{x}}) - \widetilde{W}_{t\tilde{x}} D_{\tilde{x}}(\tau) - \widetilde{W}_{\tilde{x}\tilde{x}} D_{\tilde{x}}(\xi),$$

де оператори повного диференціювання по змінних t і $\tilde{x}$ відповідно мають вигляд

$$D_t = \partial_t + \widetilde{W}_t \partial_{\widetilde{W}} + \rho_t \partial_\rho + \varphi_t \partial_\varphi + \widetilde{W}_{tt} \partial_{\widetilde{W}_t} + \widetilde{W}_{t\tilde{x}} \partial_{\widetilde{W}_x} + \rho_{tt} \partial_{\rho_t} + \rho_{t\tilde{x}} \partial_{\rho_{\tilde{x}}} + \varphi_{tt} \partial_{\varphi_t} + \varphi_{t\tilde{x}} \partial_{\varphi_{\tilde{x}}} + \ldots,$$

$$D_{\tilde{x}} = \partial_{\tilde{x}} + \widetilde{W}_{\tilde{x}} \partial_{\widetilde{W}} + \rho_{\tilde{x}} \partial_\rho + \varphi_{\tilde{x}} \partial_\varphi + \widetilde{W}_{t\tilde{x}} \partial_{\widetilde{W}_t} + \widetilde{W}_{\tilde{x}\tilde{x}} \partial_{\widetilde{W}_x} + \rho_{t\tilde{x}} \partial_{\rho_t} + \rho_{\tilde{x}\tilde{x}} \partial_{\rho_{\tilde{x}}} + \varphi_{t\tilde{x}} \partial_{\varphi_{\tilde{x}}} + \varphi_{\tilde{x}\tilde{x}} \partial_{\varphi_{\tilde{x}}} + \ldots.$$

Решта додаткових координат обчислюються аналогічно.

Умова інваріантності для системи (5)-(7) запишеться наступним чином:

$$\underset{2}{X} F \Big|_{[F]} = 0 .$$

Тобто після отримання продовженого оператора $\underset{2}{X}$, необхідно подіяти ним на функції $F = (F_1, F_2, F_3)$ та перейти на многовид $[F]$.

Наступним кроком є побудова визначальної системи рівнянь. Після дії продовженим оператором, та переходу на многовид, маємо суми різних одночленів, які містять частинні похідні першого та другого порядку функцій $\widetilde{W}$, ρ та φ. Коефіцієнти при цих одночленах є функціями від t, $\tilde{x}$, $\widetilde{W}$, ρ, φ і не залежать від похідних. Тому ці рівності будуть виконуватися тоді і тільки тоді, коли ці коефіцієнти дорівнюють нулю. З цієї умови і отримуємо визначальні рівняння, розв'язавши які отримуємо, що

$$\tau = C_1,$$

$$\xi = C_2,$$

$$\eta_1 = C_3 t + C_4,$$

$$\eta_2 = 0,$$

$$\eta_3 = -\frac{C_3}{2} t^2 - C_4 t + C_5,$$

де $C_1, \ldots, C_5$ – довільні сталі інтегрування.

Отже, інфінітезимальний оператор групи інваріантності системи (5)-(7) є лінійною комбінацією наступних операторів:

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_{\tilde{x}}, \quad X_3 = t\partial_{\widetilde{W}} - \frac{t^2}{2}\partial_\varphi, \quad X_4 = \partial_{\widetilde{W}} - t\partial_\varphi, \quad X_5 = \partial_\varphi .$$

Тобто система рівнянь (5)-(7) допускає п'ятипараметричну групу інваріантності.

2. ОБЧИСЛЕННЯ СИМЕТРІЙ СИСТЕМИ (5)-(7) ЗА ДОПОМОГОЮ MAPLE 11

Розглянемо тепер, як за допомогою математичного пакету Maple 11 можна знайти інфінітезимальні оператори групи інваріантності системи ДРЧП на прикладі системи (5)-(7).

Спочатку завантажуємо пакет **PDEtools**:

```
> restart : with(PDEtools) :
```

Визначаємо залежні та незалежні змінні:

```
> DepVars := [w, ρ, φ](x, t);
DepVars := [w(x, t), ρ(x, t), ϕ(x, t)]
```

Використовуємо команди diff_table та declare для компактності вводу та виводу на екран результатів:

> $declare\left(\left(w, \rho, \varphi\right)(t, x)\right);$
$W, \mathrm{P}, \Phi := diff\_table\left(w(t, x)\right), diff\_table\left(\rho(t, x)\right), diff\_table\left(\varphi(t, x)\right):$

$w(t, x)$ *will now be displayed as* w
$\rho(t, x)$ *will now be displayed as* ρ
$\phi(t, x)$ *will now be displayed as* ϕ

Вводимо самі рівняння та об'єднуємо їх в систему:

> $pde1 := diff\left(W[t], t\right) - diff\left(W[x], x\right) + 2\cdot diff\left(\mathrm{P}[\ ]\cdot\mathrm{P}[x], x\right);$

$$pde2 := \mathrm{P}[t] + \frac{1}{2\cdot m\cdot\omega^2}\cdot\left(2\cdot\ \mathrm{P}[x]\cdot\Phi[x] + \mathrm{P}[\ ]\cdot diff\left(\Phi[x], x\right)\right);$$

$$pde3 := \mathrm{P}[\ ]\cdot\Phi[t] - \frac{diff\left(\mathrm{P}[x], x\right) - \mathrm{P}[\ ]\cdot\Phi[x]^2}{2\cdot m\cdot\omega^2} + W[\ ]\cdot\mathrm{P}[\ ];$$

$$pde1 := w_{t,t} - w_{x,x} + 2\,\rho_x^2 + 2\,\rho\,\rho_{x,x}$$

$$pde2 := \rho_t + \frac{1}{2}\,\frac{2\,\rho_x\,\phi_x + \rho\,\phi_{x,x}}{m\,\omega^2}$$

$$pde3 := \rho\,\phi_t - \frac{1}{2}\,\frac{\rho_{x,x} - \rho\,\phi_x^2}{m\,\omega^2} + w\,\rho$$

> $PDESYS := \left[pde1, pde2, pde3\right];$

$$PDESYS := \left[w_{t,t} - w_{x,x} + 2\,\rho_x^2 + 2\,\rho\,\rho_{x,x}, \rho_t + \frac{1}{2}\,\frac{2\,\rho_x\,\phi_x + \rho\,\phi_{x,x}}{m\,\omega^2}, \rho\,\phi_t - \frac{1}{2}\,\frac{\rho_{x,x} - \rho\,\phi_x^2}{m\,\omega^2} + w\,\rho\right]$$

Інфінітезимальні оператори для системи ДРЧП знаходимо за допомогою команди **Infinitesimals**:

> $G := Infinitesimals\left(PDESYS\right);$

$$G := \left[\_\xi_1(t, x, w, \rho, \phi) = 1, \_\xi_2(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\eta_1(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\eta_2(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\eta_3(t, x, w, \rho, \phi) = 0\right], \left[\_\xi_1(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\xi_2(t, x, w, \rho, \phi) = 1, \_\eta_1(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\eta_2(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\eta_3(t, x, w, \rho, \phi) = 0\right], \left[\_\xi_1(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\xi_2(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\eta_1(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\eta_2(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\eta_3(t, x, w, \rho, \phi) = 1\right], \left[\_\xi_1(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\xi_2(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\eta_1(t, x, w, \rho, \phi) = -1, \_\eta_2(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\eta_3(t, x, w, \rho, \phi) = t\right], \left[\_\xi_1(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\xi_2(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\eta_1(t, x, w, \rho, \phi) = -t, \_\eta_2(t, x, w, \rho, \phi) = 0, \_\eta_3(t, x, w, \rho, \phi) = \frac{1}{2}\,t^2\right]$$

Перевірка:

> $map(SymmetryTest, [G], PDESYS);$

$[\{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}]$

Отже, за допомогою пакету Maple 11 були знайдені такі ж самі інфінітезимальні оператори групи симетрій системи (5)-(7).

Використовуючи команду SymmetryTransformation, можна для кожного із п'яти отриманих операторів знайти перетворення змінних t, $\tilde{x}$, $\tilde{W}$, ρ, φ, які залишають систему (5)-(7) інваріантною.

> $NewVars := [f, g, h](r, s);$

$NewVars := [f(r,s), g(r,s), h(r,s)]$

> $SymmetryTransformation(G[5], DepVars, NewVars);$

$$\left\{r = x, s = t, f(r,s) = w(x,t) - \_\varepsilon\, t, h(r,s) = \frac{1}{2}\,\_\varepsilon\, t^2 + \phi(x,t), g(r, s) = \rho(x,t)\right\}$$

Тут визначені нові залежні f, g, h та незалежні r, s змінні, _ε – груповий параметр.

ВИСНОВКИ

В даній статті розглянуто алгоритм відшукання інфінітезимальних операторів групи симетрій для системи ДРЧП на прикладі моделі Фрьоліха-Пайерлса. Знання групи симетрій диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь дозволяє використовувати метод симетрійної редукції для побудови точних розв'язків цього рівняння (системи) [1,6]. Для багатовимірних рівнянь – це інколи єдиний ефективний спосіб отримання класів точних розв'язків. Сучасний математичний пакет Maple 11 дає можливість ефективно обчислити симетрії системи ДРЧП та перейти до наступного етапу побудови точних розв'язків для цієї системи

ЛІТЕРАТУРА

1. Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. – К.: Ін-т математики НАН України, 2002. – 360 с.
2. Lie S. Theorie der Transformationsgruppen. – Vol. 1-3. – Leipzig, 1888, 1890, 1893.
3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
4. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.
5. Petrina D.Ya. Equilibrium and nonequilibrium states of model Fröhlich-Peierls Hamiltonian // Ukr.Math.J. – 2003. – № 8. – P. 1069-1087.
6. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – К.: Наук. думка, 1989. – 336 с.

Рецензенти: д.т.н., проф. Фісун М.Т.
д.т.н., проф. Казарєзов А.Я.

 Стаття надійшла до редколегії 10.04.09