УДК 681.5

Лісяной Г.В.

МЕТОД УДОСКОНАЛЕННЯ ПОКРОКОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

У статті запропоновано один з можливих шляхів підвищення ефективності оптимізації, за деяким критерієм, системи управління в умовах невизначеності, який істотно зменшує трудомісткість пошуку оптимуму критеріальної функції. При цьому затрати машинного часу знаходяться у функціональній залежності від складності системи управління.

Ключові слова: *покрокова оптимізація, невизначеність, критеріальна функція.*

В статье предложен один из возможных путей повышения эффективности оптимизации, за некоторым критерием, системы управления в условиях неопределенности, который существенно уменьшает трудоемкость поиска оптимума критериальной функции. При этом затраты машинного времени находятся в функциональной зависимости от сложности системы управления.

Ключевые слова: *пошаговая оптимизация, неопределенность, критериальная функция.*

One of possible ways of rise of efficiency of optimization is offered in article, after some criterion, systems of management in the conditions of vagueness substantially diminishing labour intensive of search of optimum of criterion function. Thus expenditures of machine time are in the functional dependence from complication of the system of management.

Key words: *step-by-step optimization, vagueness, criterion function.*

ВСТУП

Одним зі шляхів підвищення ефективності систем керування й обробки інформації є використання більш точних і достовірних математичних моделей об’єктів і процесів на основі застосування сучасних методів ідентифікації, що стає можливим із застосуванням цифрової обчислювальної техніки.

Основні задачі розробки математичних моделей об’єктів і процесів відповідають державним науково-технічним програмам, які сформовані в законах України «Про національну програму інформатизації». У зв’язку з цим актуальність статті очевидна.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

У цей час для оптимізації різних об’єктів розроблена значна кількість оптимізаційних методів, заснованих як на базі теоретичних, так і експериментальних досліджень. Умовно вони можуть бути розділені на дві групи: аналітичні й експериментально-статистичні. Аналітичні методи засновані на використанні математичної моделі об’єкта. До них відносяться: методи дослідження функцій класичного аналізу [1, 2, 3, 4]; методи, які засновані на використанні невизначених множників Лагранжа [2]; варіаційне обчислення [5, 6, 7]; динамічне, лінійне, нелінійне й геометричне програмування [4, 8]; комбіновані методи [1, 9, 10].

В основу всіх методів пошуку оптимальних рішень покладений принцип перебору якоїсь малої частки варіантів, виділеної на підставі логічної процедури аналізу вихідної моделі. Цю малу частку, тобто невелике число варіантів, виділяють за різними ознаками. Наприклад, при градієнтних методах пошуку оптимальних рішень замість експериментальної перевірки всіх можливих варіантів ведення технологічного процесу обмежуються постановкою невеликої їхньої частини за напрямком градієнта, що приводить до оптимального рішення при порівняно невеликому числі досліджень.

Мета роботи – розробка алгоритму оптимізації методом градієнта в умовах невизначеності.

ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

Нехай існує система, на вхід якої надходять дані, перша частина яких $\overline{X}_1$ (статистична) утворюється шляхом вимірювання й представляється законами розподілу ймовірностей, а друга $\overline{X}_2$ (нечітка) – задається експертом у вигляді функцій приналежності. Перетворення, які відбуваються в системі, характеризуються вектором коефіцієнтів $\overline{C}$. Отже, вихід системи можна представити рівнянням

$$\overline{Y} = F\left(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{C}\right). \tag{1}$$

Необхідно оптимізувати роботу системи керування (СК) за деяким критерієм $Q\left(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{C}\right)$.

Нехай, для прикладу, функція F визначення може бути представлена у вигляді

$$Y_i = C_1 X_{11} + C_2 X_{12} + \ldots, \tag{2}$$

де C_i – вагові коефіцієнти.

Оскільки початкові дані $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$ є невизначеними, то відповідно до методу узагальнюючих функцій, представимо задачі в операторній формі:

$$\beta_Y = \prod_{i=1}^{n-1} \Phi_i^{(2)} \left[\left(\Phi_{1i}^{(1)} \beta_{x_{1,i}}\right)\left(\Phi_{2i}^{(1)} \beta_{x_{2,i}}\right)\right]. \tag{3}$$

При розв’язанні задачі оптимізації покроковим методом можлива ситуація, коли через невизначеність даних наступна точка буде віддалена від оптимуму на більшу відстань, ніж початкова. Алгоритм, що реалізує такий метод, можна вважати нестійким. У літературі трактується поняття нестійкості алгоритму оптимізації в умовах невизначеності. Тому дамо визначення стійкості алгоритму оптимізації в умовах невизначеності.

Будемо називати покроковий (ітераційний) алгоритм нестійким в умовах узагальненої невизначеності (*G-нестійким*), якщо існує така точка в просторі станів, для якої функція порівняння для двох послідовних точок траєкторії оптимізації задовольняє умові:

$$\int_{-\infty}^{0} \beta_\Delta\left(\Delta_Q\right) d\Delta_Q > 0, \tag{4}$$

де Q – критерій оптимізації.

Ступінь нестійкості $S = \dfrac{\int_{-\infty}^{0} \beta_\Delta\left(\Delta_Q\right) d\Delta_Q}{\int_{-\infty}^{+\infty} \beta_\Delta\left(\Delta_Q\right) d\Delta_Q}$. (5)

Тоді будемо називати алгоритм абсолютно нестійким, якщо *S=0,* і умовно нестійким, якщо *S=1*.

Для визначення мінімального значення багатопараметричної функції $Q\left(\overline{C}\right)$ можна використати один з найвідоміших однокрокових методів – градієнтний. Основна його ідея полягає в тому, щоб рухатися до мінімуму в напрямку найшвидшого зменшення функції, що визначається антиградієнтом. Ця ідея реалізується в такий спосіб. Вибирається будь-яким способом початкова крапка, у ній обчислюється градієнт аналізованої функції ∇ й робиться невеликий крок у зворотному, антиградієнтному напрямку, і так далі за формулою:

$$\overline{C}_{k-1} = \overline{C}_k - h\nabla, \tag{6}$$

де $h = const$ – крок.

Продовжуючи цей процес, рух здійснюється до знаходження мінімального значення функції.

Оскільки градієнт обчислюється через похідні, то для обчислення узагальнюючої функції градієнта не повністю визначеного критерію оптимізації визначимо поняття похідної невизначеної величини.

Похідну невизначеної функції $x(t)$ можна представити в такий спосіб:

$\beta_t(x') = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\dfrac{\beta(x_2 - x_1)}{\Delta t}\right) \approx \dfrac{\beta(x_2 - x_1)}{\Delta t}$, при малому Δt. (7)

Представляючи (7) в операторній формі, отримуємо:

$$\beta_t(x') = \Phi^{(2)}[\beta(x_2)\beta(x_1)], \tag{8}$$

де $\Phi^{(2)}$ – бінарний оператор різниці, що залежить від таких параметрів, як перший початковий момент $m_{x'}$, другий центральний момент $D_{x'}$; $r_{x'}$ – другий центральний змішаний момент похідної.

$$m_{x'}(t) = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{m_x(t + \Delta t) - m_x(t)}{\Delta t} = m_x(t), \tag{9}$$

$$D_{x'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \omega^2 G_x(\omega) d\omega, \tag{10}$$

де ω – частота; $G_x(\omega)$ – спектральна щільність невизначеної величини.

$$r_{x'}(t_1, t_2) = \frac{1}{D_{x'}} \frac{\partial^2 R_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}, \tag{11}$$

де R_x – другий змішаний центральний момент невизначеної величини.

Тоді узагальнюючу функцію градієнта ∇Q можна представити в операторній формі, з огляду на (6)

$$\beta_\nabla = \overline{\Phi}^{(2)}\left[\beta_Q(C_{i2})\beta_Q(C_{i1})\right], \tag{12}$$

а відповідна функція порівняння

$$\beta_{\delta Q} - \Phi^{(2)}\beta_Q\left(\overline{C}_1 + h\nabla\right)\beta_Q\left(\overline{C}_1\right), \tag{13}$$

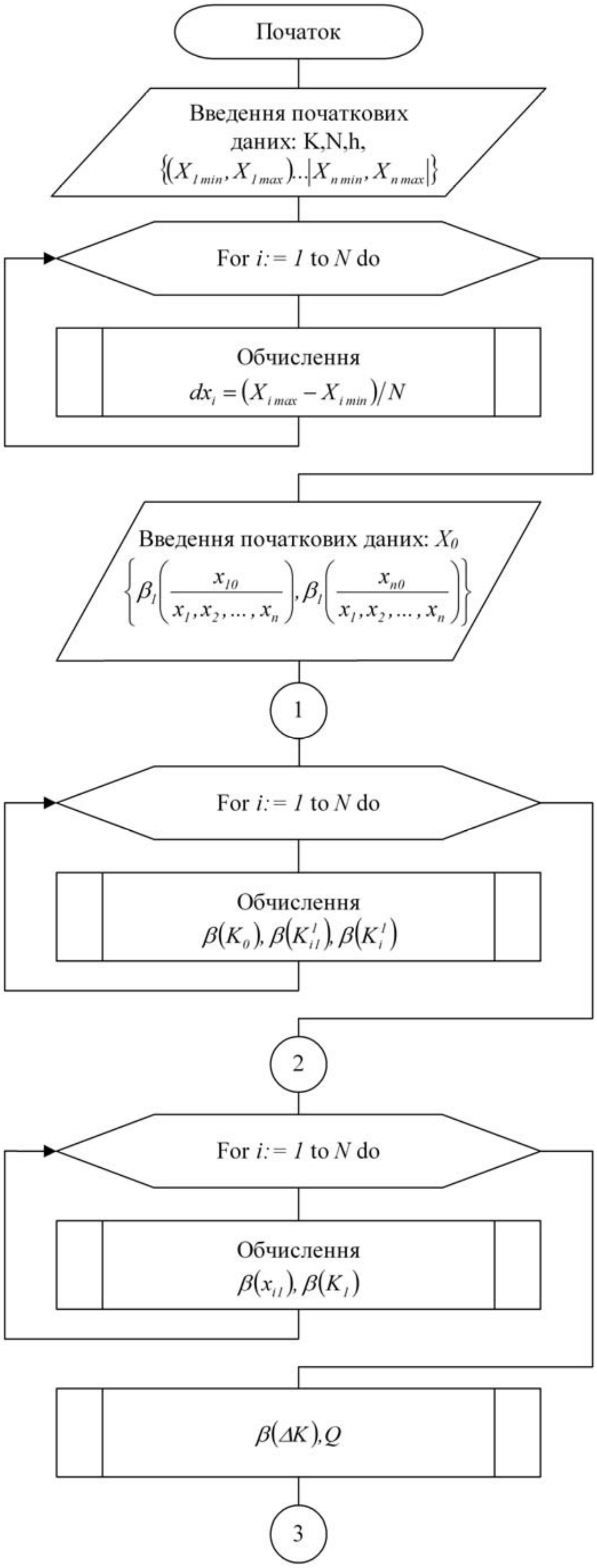
де $\Phi^{(2)}$ – бінарний оператор знаходження різниці невизначених даних $Q\left[\mathrm{C} - \overline{h}\nabla\right]$ і $Q\left(\overline{C}\right)$.

За визначенням (4), (5) градієнтний метод буде *G-нестійким*, якщо існує хоча б одна крапка, в якій ступінь нестійкості дорівнює нулю, і умовно *G-нестійким*, якщо його значення перебуває в інтервалі *(0,1)*.

Для моделювання процесу оптимізації систем керування в умовах невизначеності градієнтним методом розроблено алгоритм, що представлений на рис. 1.

Початковими даними алгоритму є:

- критерій оптимуму *К* – функція *n* змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- область визначення критерію – діапазон зміни кожного параметра $\{(X_{1\min}, X_{1\max}), \ldots, (\mathrm{X}_{n\ \min}, X_{n\ \max})\}$;


Початок
Введення початкових даних: K,N,h,
$\{(X_{1\,min}, X_{1\,max})...|X_{n\,min}, X_{n\,max}|\}$
For i:= 1 to N do
Обчислення
$dx_i = (X_{i\,max} - X_{i\,min})/N$
Введення початкових даних: X_0
$\left\{\beta_1\left(\frac{x_{10}}{x_1, x_2, ..., x_n}\right), \beta_1\left(\frac{x_{n0}}{x_1, x_2, ..., x_n}\right)\right\}$
1
For i:= 1 to N do
Обчислення
$\beta(K_0), \beta(K_{i1}^1), \beta(K_i^1)$
2
For i:= 1 to N do
Обчислення
$\beta(x_{i1}), \beta(K_1)$
$\beta(\Delta K), Q$
3

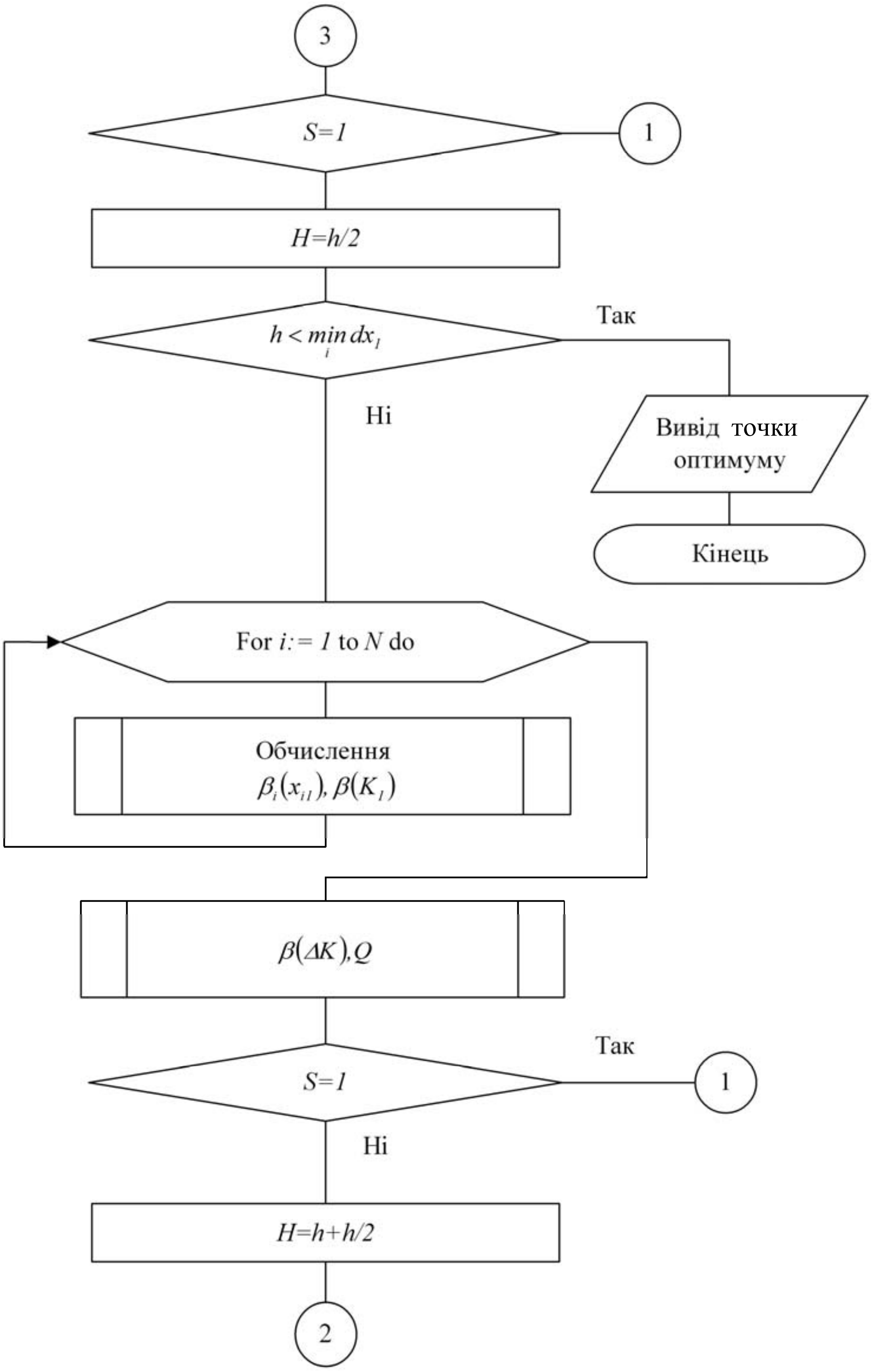


Рис. 1. Алгоритм оптимізації методом градієнта в умовах невизначеності

- вектор початкових умов – $\{x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \dots, x_n = x_{n0},\}$;
- набір функцій приналежності змінних x_{i0} з параметрами

$$\{x_1, x_2, \dots, \mathrm{x_n}\} - \left\{\beta_1\left(\frac{x_{10}}{x_1, x_2, \dots, \mathrm{x_n}}\right), \beta_1\left(\frac{x_{n0}}{x_1, x_2, \dots, \mathrm{x_n}}\right)\right\};$$

- кількість кроків розбивки для діапазонів зміни параметрів N;
- величина кроку пошуку екстремуму h.

В алгоритмі обчислюються:

- значення кроків дискретизації за кожним параметром

$$dx_i = \frac{X_{i\ \max} - X_{i\ \min}}{\mathrm{N}};$$

- значення узагальнюючих функцій критерію оптимальності

$$\beta(K_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\!\!\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{x_{i0}}{x_1 = x_{10}, \ldots, \mathrm{x_n} = x_{n0}}\right)\delta\left[K_0 - f(x_{10},\ldots,x_{n0})\right]dx_{10}\ldots\mathrm{dx}_{\mathrm{n}0},$$

$$\beta(K_{i1}^i) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{n}\!\!\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{x_{i1}}{x_1 = x_{10}, \ldots, \mathrm{x_i} = x_{i0} + dx_1\ldots x_{n0}}\right)\delta\left[K_0 - f(x_{10},\ldots,x_{n0})\right]dx_{10}\ldots\mathrm{dx}_{\mathrm{n}0};$$

- значення узагальнюючої функції часткових похідних критерію $K_i^1 = \dfrac{\partial K}{\partial x_i}$ за кожним параметром

$$\beta(K_i^1) = \Phi^{(2)}\left[\beta(K_1)\beta(K_0)\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\beta(K_1)\beta(K_0)\delta\left[K_i^1 - \frac{K_1 - K_0}{dx_i}\right]dK_1 dK_0;$$

- значення узагальнюючої функції координат наступної крапки на шляху пошуку – якщо наступна крапка вибирається за правилом

$$x_{i1} = x_{i0} + \frac{K_i^1}{\max\limits_i K_i^1}h \text{ те } \beta_i(x_{i1}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\beta(K_i^1)\cdot\delta\left[x_{i1} - \left(x_{i0} + \frac{K_i^1}{\max\limits_i K_i^1}\cdot h\right)\right]dK_i^1$$

- значення критерію оптимуму в наступній крапці

$$\beta(K_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}\beta_i\left(\frac{x_{i1}}{x_1 = x_{11}, \ldots, \mathrm{x_{1n}} = x_{n1}}\right)\cdot\delta\left[K_1 - f(x_{11},\ldots,x_{n1})\right]dx_{11}\ldots dx_{n1}$$

Перевіряємо стійкість алгоритму пошуку.

1. Визначаємо функцію порівняння значень критерію оптимальності в крапках X_0 і X_1

$$\beta(\Delta K) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\beta(K_0)\beta(K_1)\delta\left[\Delta K_1 - (K_1 - K_0)\right]dK_1 dK_0$$

2. Визначаємо критерій стійкості в умовах невизначеності

$$Q = \int\limits_{-\infty}^{0}\beta(\Delta K)d\Delta K.$$

Приймаємо рішення:

- якщо при пошуку мінімуму $S = 1$ рухаємося далі;
- якщо $S \neq 1$, то вертаємося назад у крапку X_0 і робимо з неї два пробних кроки з параметром $h' = h/2$ і $h' = h + h/2$;
- повторюємо для обох крапок дії, починаючи із блоку 3. Якщо для якоїсь крапки $S = 1$, то приймаємо її за наступну. Якщо ні, то продовжуємо змінювати h. Якщо досягнуто $h < \min\limits_i \mathrm{dx_i}$, то оптимум знайдений.

ВИСНОВКИ

Запропоновано більш досконалий метод покрокової оптимізації систем керування в умовах невизначеності, що істотно зменшує трудомісткість пошуку оптимуму критеріальної функції.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1987. – 400 с.
2. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – Изд. 3-е. – М.: Физматгиз, 1962. – 384 с.
3. Доброускос А.П. Симплексный поиск. – М.: Энергия, 1979. – 175 с.
4. Метод статистических испытаний метод Монте-Карло / Под ред. Ю.А. Шрейдера. – М.: Физматгиз, 1962. – 331 с.
5. Эльсгольц Л.Э. Вариационное исчисление. – М.: Гостехиздат, 1958. – 164 с.
6. Розоноэр Л. И. Вариационный подход к проблеме инвариантности // Автоматика и телемеханика», 1963. – Т. XXIV. – № 7. – С. 861-871.
7. Файн А.М. Вариационный метод для расчета температурных полей в элементах конструкций / Инж.физ. журнал, 1969. – № 5. – С. 854-865.
8. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
9. Николаев Е.Г. О скорейшем спуске, основанном на методе случайного градиента / Автоматика и вычислительная техника, 1970. – № 3. – С. 40-46.
10. Растрыгин Л.А. Случайный поиск в задачах оптимизации многопараметрических систем. – Рига.: «Знание», 1965. – 190 с.

Рецензенти: д.т.н., проф. Фісун М.Т.,
д.т.н., проф. Кондратенко Ю.П.

Стаття надійшла до редакції 12.02.09