УДК. 519.853+517.9

Трунов О.М.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

Досліджено можливості використання методу рекурентної апроксимації до задач нелінійного програмування та оптимального проектування. Дано аналіз умов збіжності рекурентних розв'язків та проаналізовано зв'язок методу з відомими підходами Ньютона-Канторовича, квазілінеризації Белмана – Калаби.

Ключові слова: *нелінійне математичне програмування, оптимальне проектування, рекурентна апроксимація, збіжність розв'язків, умови збіжності.*

Исследованны возможности использования метода рекуррентной аппроксимации к решению задач нелинейного программирования и оптимального проектирования. Проведен анализ условий сходимости рекуррентных решений, проанализирована связь с известными подходами Ньютона-Канторовича, квазилинеризация Белмана –Калаби.

Ключевые слова: *нелинейное математическое программирование, оптимальное проектирование, рекуррентная аппроксимация, сходимость решений, условия сходимости.*

Possibilities of use of a method of recurrent approximation to the decision of problems of nonlinear programming and optimum designing are investigated.

Let's carry out the analysis of conditions of convergence of recurrent solutions, connection with Newton-Kantorovich's known approaches, quasilinearization by Bellman-Kalaba is analysed.

Key words: *nonlinear programming, optimal system design, recurrent approximation, convergence to solutions, condition of convergence.*

Загальний стан проблеми застосування сучасних методів оптимального проектування елементів динамічних систем, у тому числі і систем керування визначається як проблемами нелінійного моделювання, так і проблемами пошуку розв'язку задачі з обмеженнями в умовах, коли структура цільової функції динамічно змінюється відповідно до конструктивних рішень, що приймаються [1, 2]. Особливу актуальність задачі оптимального проектування набувають у випадках, коли динамічна система, будь-то стаціонарний енергетичний комплекс, або підводні апарати чи мобільні роботи, або носії технологічного обладнання, проектується за визначеною системою показників багатокритеріальної оптимізації для об'єктів, що описуються нелінійними моделями, а самі системи створюються в одиничному примірнику.

За цих умов задача оптимального проектування та прийняття рішень набуває особливого значення як із загально методологічного погляду, так і з практичного погляду. В сучасних умовах розвитку теорії програмування та оптимального проектування та управління цей науковий аналіз здійснюється методами експертних систем та теорії прийняття рішень [1, 2]. Найбільш поширені підходи призводять до загальновідомої задачі нелінійного програмування, яка розв'язується, наприклад, методом множників Лагранжа, або методом мінімізації функціоналу, останній є джерелом двоточкових крайових задач.

Застосування цих двох підходів у залежності від кількості змінних аналізу приводить задачу максимізації прибутків або мінімізації збитків з обмеженнями рівностями до задачі пошуку розв'язку окремих незалежних нелінійних алгебраїчних рівнянь або системи рівнянь. Як свідчать роботи Р. Беллмана, Куна-Таккера, Л.В. Канторовича, Г.П. Акілова [2-4] проблемі побудови стандартного алгоритму пошуку розв'язку таких задач присвячено багато робіт, але незважаючи на це застосовність відомих методів послідовних наближень Ньютона – Канторовича, квазілінеаризації обмежена випадком, коли перша похідна від образів утворених дією оператора не дорівнює нулю. Остання умова довгий час обмежувала застосовність одного з найефективніших методів – квазілінеаризації до розв'язку задач випадками, у яких оператор є строго монотонним, а його дія на множині визначення утворює опуклі множини з одним простим коренем. Разом з тим метод рекурентної апроксимації, запропонований автором у роботах [5, 6], відрізняється відсутністю обмежень, що накладаються на значення першої похідної від дії оператора. Однак, незважаючи на ці суттєві переваги методу, на теперішній час застосованість його до задач динамічного моделювання недостатньо вивчено.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Припустимо, що вектор станів системи $\overline{X}$ сформовано і він має n компонент. Також вважаємо, що цільова функція $f(\overline{X})$ задана, а обмеження надані рівностями у вигляді $g_i(\overline{X}) = 0$; $i = \overline{1,m}$.

Тоді функція Лагранжа має вигляд:

$$L(\overline{X}) = f(\overline{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\overline{X})$$

Пошук мінімуму цієї функції відповідно до теореми Куна-Таккера приводить до задачі про сідлову точку функції Лагранжа. Остання за умов лінійності обмежень у загальному вигляді зводиться до системи рівнянь з відокремленими лінійним та нелінійним оператором

$$L_1(\overline{X}) - L_2(\overline{X}, \overline{\lambda}) = 0, \tag{1}$$

де $L_1(\overline{X})$ образ утворений дією лінійного оператора, а $L_2(\overline{X}, \overline{\lambda})$ нелінійного у просторі визначення векторів $\overline{X}$ та $\overline{\lambda}$. У випадку одновимірності вектора $\overline{X}$ при наявності тільки одного з обмежень у формі алгебраїчного оператора рівняння (1) зводяться до алгебраїчного рівняння, як правило, нелінійного.

Таким чином, задача нелінійного математичного програмування зводиться до пошуку розв'язку кореня як нелінійного алгебраїчного рівняння, так і системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, або нелінійного операторного рівняння. Незважаючи на наведенні успіхи у розв'язанні таких рівнянь [5, 6] *нерозв'язаними проблемами є*: побудова ефективного узагальненого алгоритму пошуку розв'язку; забезпечення збіжності; визначення умов збіжності.

Головною метою цієї роботи є: дослідити можливість використання запропонованого в [5] методу рекурентних апроксимацій для розв'язку задач знаходження коренів нелінійних рівнянь, системи нелінійних рівнянь та задач варіаційного числення. Особливу увагу при цьому буде приділено дослідженню характеру збіжності рекурентних апроксимацій та зв'язку запропонованого підходу з відомими методами Ньютона-Канторовича, квазілінеаризації Беллмана-Калаби.

2. ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ЗБІЖНІСТЬ РЕКУРЕНТНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Розглянемо задачу знаходження кореня скалярного рівняння (1) методом рекурентної апроксимації. Припустимо, що ліва частина цього рівняння $L(x) = L_1(x) - L_2(x)$ – монотонно спадна строго опукла функція, що має n похідних, до того ж $L_1'(x) < L_2'(x)$ для всіх x, що належать області визначення, тобто вона має один простий корінь x^*, (рис. 1) $L'(x^*) \neq 0$. Утворимо послідовність $\{x_n\}$ та дослідимо її збіжність.

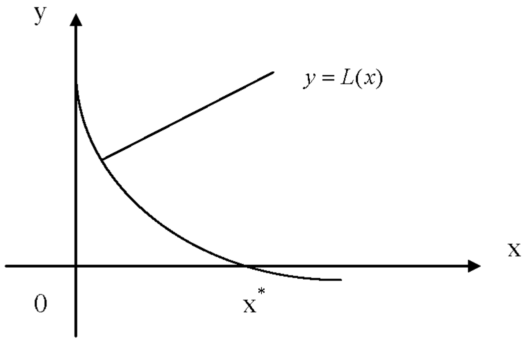

Рис. 1

Нехай x_0 – перше наближення для кореня x^*, причому $x_0 < x^*$, а $L'(x_0) < 0$. Тоді, представляючи $L_1(x)$ та $L_2(x)$ в околі точки $x = x_0$ у вигляді рекурентної апроксимації через послідовність $\{\Delta_n\}$ [5], отримаємо (див. рис. 2 – штрихова крива).

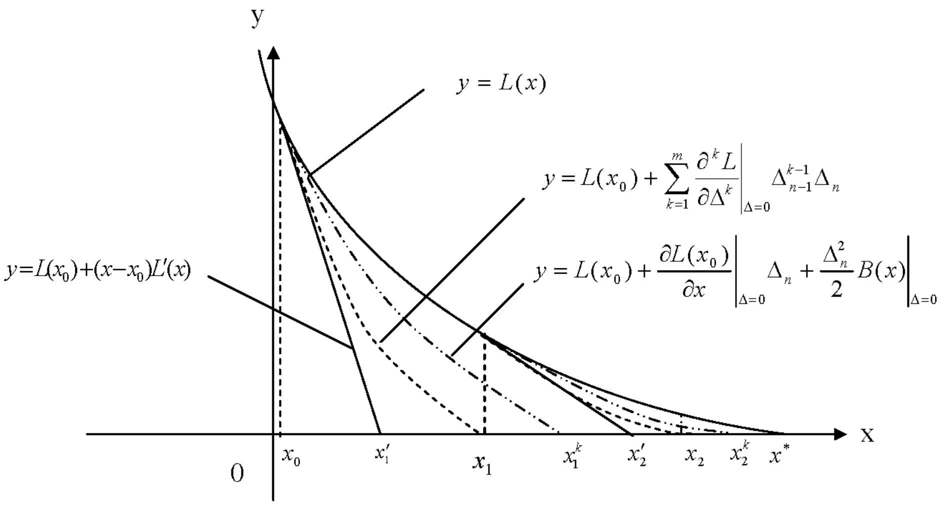

Рис. 2

$$L(x) = L_1(x_0) + \frac{\partial L_1}{\partial \Delta}\Bigg|_{\Delta = 0} \cdot \Delta_n - L_2(x_0) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^k L_2}{\partial \Delta^k}\Bigg|_{\Delta = 0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}\Delta_n}{k!}. \tag{2}$$

Тоді наступне наближення отримується з розв'язку лінійного рівняння відносно x,

$$x_1 = x_0 - \frac{L_1(x_0) - L_2(x_0)}{\frac{\partial L_1(x)}{\partial \Delta}\Big|_{\Delta = 0} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^k L_2}{\partial \Delta^k}\Big|_{\Delta = 0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}} \tag{3}$$

потім процес повторюється, для x знаходиться нове значення x_2 і т. д. як показано, на мал. 2. Загальне рекурентне співвідношення має вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{L_1(x_n) - L_2(x_n)}{\frac{\partial L_1}{\partial \Delta}\Big|_{\Delta = 0} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^k L_2}{\partial \Delta^k}\Big|_{\Delta = 0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}} \tag{4}$$

Якщо на початку $x_0 < x^*$, то з малюнку 2 видно, що $x_0 < x_1 < x_2 ... < x^*$. Але більш строго це випливає з нерівності $L(x_n) > 0$, $L'(x_n) < 0$, $L''(x_n) > 0$ для двох членів ряду або, за умови збіжності знаменника, останній виразиться через різні значення оператора в точках x_{n+1} і x_n тобто

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[\, L_1(x_n) - L_2(x_n) \,]\Delta_n}{L_1(x_{n+1}) - L_1(x_n) + L_2(x_n) - L_2(x_{n+1})}$$

Звідки видно, що для спадного оператора та при умові $x_0 < x^*$, тобто $\Delta_n > 0$ і $L(x_{n+1}) < L(x_n)$ виконується $x_{n+1} > x_n > x_0$, так як другий член за цих умов лише додатній.

У співвідношеннях (2)-(4) в якості Δ_{n-1} на *n*-ому кроці може бути використана кусково-лінійна апроксимація. Так, якщо оператор *L(x)* розкласти в ряд Маклорена по Δ у відповідності з [3] та обмежитися двома членами, то

$$L(x) = L_1(x_0) + \left.\frac{\partial L_1(x)}{\partial \Delta}\right|_{\Delta = 0} \cdot \Delta - L_2(x_0) - \left.\frac{\partial L_2(x)}{\partial \Delta}\right|_{\Delta = 0} \cdot \Delta \qquad (5)$$

звідки за умови, що x – корінь, тобто $x = x^*$, а

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \Delta}\right|_{\Delta = 0} = \left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{x = x_n} \qquad (6)$$

в силу лінійності $x = x_n + \Delta_n$, маємо

$$\Delta_{n-1} = -\frac{L_1(x_{n-1}) - L_2(x_{n-1})}{L_1'(x_{n-1}) - L_2'(x_{n-1})} \qquad (7)$$

Аналогічний результат отримаємо, якщо обчислимо безпосередньо Δ_n за визначенням [5] скориставшись для знаходження *n*-го наближення методом Ньютона-Канторовича.

$$\Delta_{n-1} = x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - \frac{L(x_{n-1})}{L'(x_{n-1})} - x_{n-1} = -\frac{L(x_{n-1})}{L'(x_{n-1})} \qquad (8)$$

Ця апроксимація ефективна, але більш раціональна з точки зору збіжності на даному кроці заміни нелінійного оператора буде кусково-параболічна апроксимація. Вона випливає з розкладу *L(x)* в ряд Маклорена. Так, якщо в розкладі обмежиться трьома членами, тобто

$$L(x) = L(x_0) + \left.\frac{\partial L(x)}{\partial \Delta}\right|_{\Delta = 0} \cdot \Delta + \left.\frac{\partial^2 L(x)}{\partial \Delta^2}\right|_{\Delta = 0} \cdot \frac{\Delta^2}{2} \qquad (9)$$

отримаємо

$$\Delta = -\frac{L'(x)}{L''(x)} + \sqrt{\left[\frac{L'(x)}{L''(x)}\right]^2 - \frac{2L(x)}{L''(x)}} \qquad (10)$$

Така апроксимація остання, в якій Δ безпосередньо визначається через властивості оператора. Подальше утримання членів із більш високим ступенем Δ у ряді Маклорена при апроксимації-розкладі не дає простих виразів, розв'язаних відносно Δ.

Іншим підходом до апроксимації нелінійного оператора буде кусково-повнополіноміальна відносно до наближеного попереднього значення Δ_{n-1}, а лінійна відносно шуканого значення. Так, наприклад, для квадратичної апроксимації для оператора маємо

$$L(x) = L(x_0) + L'\Delta_n - L''\frac{L}{L'}\frac{\Delta_n}{2} \qquad (11)$$

звідки для наближеного значення кореня $x \approx x^*$

$$\Delta_n = -\frac{L}{L'\left[1 - \dfrac{L''L}{2(L')^2}\right]}, \qquad (12)$$

а $x_{n+1} = x_n - \dfrac{L}{L'\left[1 - \dfrac{L''}{2(L')^2}\right]}$ (13)

Для кубічної апроксимації, у свою чергу, маємо

$$L(x) = L(x_0) + L'\Delta_n - \frac{L''L}{L'} \cdot \frac{\Delta_n}{2} + L'''\left(\frac{L}{L'}\right)^2 \frac{\Delta_n}{6} \tag{14}$$

$$\Delta_n = -\frac{L}{L'[1 - \dfrac{L''L}{2(L')^2} + \dfrac{L'''L^2}{6(L')^3}]} \tag{15}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{L}{L'\left[\ 1 - \dfrac{L''L}{2(L')^2} + \dfrac{L'''L^2}{6(L')^3}\ \right]} \tag{16}$$

За аналогією можна отримати вирази діючи як у випадках побудови співвідношень (11)-(16), використовуючи квадратичну апроксимацію для наближеного значення Δ_{n-1} за виразом (10).

Продемонструємо цей підхід, що полягає у представленні нелінійного оператора як квадратично визначеної функції від шуканого наближення для Δ_n та попереднього Δ_{n-1}

$$L(x) = L\ (x_0) + \frac{\partial L}{\partial \Delta}\bigg|_{\Delta = 0} \cdot \Delta_n + \frac{\Delta_n^2}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\bigg|_{\Delta = 0} \frac{2\Delta_{n-1}^{k-2}}{k!}.$$

Введемо позначення

$$B(x) = 2\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\bigg|_{\Delta = 0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-2}}{k!}.$$

Припустимо, що всюди на проміжку існування x існують похідні Фреше і хоча б одна з них починаючи з другої не дорівнює нулю тобто

$$B(x) \neq 0,$$

а також існує границя відношень

$$\lim_{B(x)\to 0} \frac{L'(x)}{B(x)}, \text{ разом } \lim_{B(x)\to 0} \frac{L(x)}{B(x)},$$

тоді Δ_n визначиться як корінь рівняння наступним чином

$$\Delta_n = -\frac{L'(x)}{B(x)} + \sqrt{\left[\frac{L'(x)}{B(x)}\right]^2 - \frac{2L(x)}{B(x)}}.$$

У цих співвідношеннях Δ_{n-1} залежно від властивостей $L'(x)$ визначається за виразом (8), або (10). В роботі [5] показано й інший підхід до визначення Δ_{n-1}.

Так, щоб визначити Δ_{n-1}, тобто наближене значення Δ_n для даного x_n, у відповідності з рекурентним співвідношенням [5], завдяки якому і забезпечується збіжність, необхідно знати два попередніх її значення, які позначимо Δ_{n-3} і Δ_{n-2}, якщо вони відомі, наступне значення розраховується

$$\Delta_{n-1} = \frac{\Delta_{n-2} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\bigg|_{\Delta = 0} \frac{\Delta_{n-3}^{k-1}}{k!}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\bigg|_{\Delta = 0} \frac{\Delta_{n-2}^{k-1}}{k!}}.$$

В якості Δ_{n-3} і Δ_{n-2}, можна вибирати, наприклад, вирази (6) та (9).

Таким чином, при висловлених обмеженнях, накладених на *L(x)* та підтвердженою принциповою реальністю реалізації пошукового алгоритму, ми встановимо властивості послідовності $\{x_n\}$:

– по-перше, двосторонню збіжність;
– по-друге, квадратичну збіжність,

$$\left|x_{n+1}-x^*\right| \le M\left|x_n-x^*\right|^2, \tag{17}$$

яка не так очевидна, а вимагає доведення. Для цього обчислимо нев’язки та порівняємо їх, враховуючи, що $L(x^*)=0$.

$$\left|\ x_{n+1}-x^*\ \right| = x_n - \frac{L(x_n)}{\sum\limits_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}} - x^* = x_n - \frac{L(x_n)}{\sum\limits_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}} -$$

$$- \left(x^* - \frac{L(x^*)}{\sum\limits_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta=0} \frac{(x-x^*)_{n-1}^{k-1}}{k!}} \right) = \Psi(x_n)-\Psi(x^*), \tag{18}$$

$$\text{де } \Psi(x) = x - \frac{L(x)}{\sum\limits_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta=0} \frac{(x-x^*)\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}} \tag{19}$$

Розкладаючи $\Psi(x)$ в ряд Тейлора в околі x^*, обмежившись трьома членами ряду, отримаємо

$$x_{n+1}-x^* = (x_n-x^*)\Psi'(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^2}{2}\Psi''(x^*). \tag{20}$$

Після диференціювання Ψ маємо

$$\Psi'(x) = \frac{L(x)\sum\limits_{k=2}^{m} \left.\frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-2}}{k(k-2)!}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}\right)^2} \tag{21}$$

звідки в силу $L(x^*)=0, \Psi'(x^*)\equiv 0.$

Отже, $\left|x_{n+1}-x^*\right| \le k\left|x_n-x^*\right|^2$, (22)

де $k=\max\frac{\Psi''(x)}{2}$. (23)

Не менш важливо показати також, що різниця між послідовними наближеннями визначається співвідношеннями похідних *L(x)*.

Обчислимо аналогічну різницю

$$x_{n+1}-x_n = \Psi(x_n)-\Psi(x_{n-1}) = (x_n-x_{n-1})\Psi'(x_{n-1}) + \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2}\Psi''(x_{n-1}) =$$

$$= \frac{(x_n-x_{n-1})L(x_{n-1})\sum\limits_{k=2}^{m} \left.\frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-2}^{k-2}}{k(k-2)!}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}\right)^2} + \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2}\Psi''(x_{n-1}). \tag{24}$$

$$\left[\frac{\Psi''(x_{n-1})}{2} - \frac{\sum_{k=2}^{m} \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\bigg|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-2}^{k-2}}{k(k-2)!}}{\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\bigg|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-2}^{k-1}}{k!}\right)}\right] \tag{25}$$

Таким чином, $\left|x_{n+1} - x_n\right| \le k_1 \left|x_n - x_{n-1}\right|^2$,

$$k_1 = \max_{x_0 \le x \le x^*} \left| \frac{\left|\sum_{k=2}^{m} \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\bigg|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-2}}{k(k-2)!}\right|}{\left|\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^k L}{\partial \Delta^k}\bigg|_{\Delta=0} \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}\right|} + \left|\frac{\Psi''(x_{n-1})}{2}\right| \right| \tag{26}$$

Таким чином, доведено, що запропонована в [5] рекурентна апроксимація має двосторонню квадратичну збіжність для довільного неперервного оператора, що існує на відрізку $[x_0, x^*]$, навіть при наявності локальних екстремумів ($L'(x) = 0$) і навіть для непростих коренів $L'(x^*) = 0$.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо задачу знаходження розв'язку системи рівнянь

$$\begin{cases} L_1(x_1,\dots x_i,\dots x_N) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_i(x_1,\dots x_i,\dots x_N) = 0 \qquad i = 1,2\dots N \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_N(x_1,\dots x_i,\dots x_N) = 0 \end{cases}$$

або, якщо ввести N-вимірний вектор x, то в векторному позначенні $L(x)=0$.

Припустимо, що при відповідних вимогах розділу 1 до оператора $L(x)$ та його похідних знайдено x_0 – початкове наближення вектора x, тоді, застосовуючи рекурентну апроксимацію (1), запишемо

$$L(x) \cong L(x_0) + J(x_0)(x - x_0), \tag{27}$$

де $J(x_0)$ – матриця, елементами якої є

$$J_{ij}(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^i L_i(x)}{\partial \Delta_j^i}\bigg|_{\Delta_j=0} \frac{\Delta_j^{i-1}}{l!}. \tag{28}$$

Нове наближення визначимо за формулою

$$x_l = x_0 - J(x_0)^{-1} L(x_0), \tag{29}$$

або рекурентна послідовність визначить і наближення вектора

$$x_{n+1} = x_n - J(x_n)^{-1} L(x_n). \tag{30}$$

Властивості квадратичної збіжності цієї послідовності при аналогічних припущеннях для $L(x)$ доводяться аналогічно доведенням розділу 2.

4. ЗАСТОСУВАННЯ РЕКУРЕНТНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Зведення задач дослідження поведінки динамічних систем до задач максимізації функціоналу призводить до пошуку розв'язків нелінійних диференційних рівнянь з двоточковими крайовими умовами. Розглянемо задачу максимізації функціоналу

$$J(U) = \int_0^b g(x, x')dt \tag{31}$$

з початковими умовами *U(0) = C*. Обертаючи в нуль першу варіацію обираємо рівняння Ейлера.

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial x'}\right) = 0 \qquad (32)$$

з кінцевою умовою, або умовою трансверсальності для даної варіаційної задачі. Якщо функція g представлена у вигляді класичної форми відносно U та U' та лінійного доданку відносно U, то рівняння Ейлера лінійно та двоточкова крайова задача може бути розв'язана.

У загальному випадку маємо загальні труднощі пов'язані з нелінійними задачами.

Продемонструємо застосування методу рекурентної апроксимації на прикладі задачі пошуку оптимальної траєкторії переміщення підводного апарату. Нехай у площині XOY апарат переміщується із зміною швидкістю v(x,y). Тоді позначивши початкову координату $P_0(x_0,y_0)$, а кінцеву $P_1(x_1,y_1)$ поставимо задачу про оптимальну траєкторію за критерієм мінімуму часу, як задачу мінімізації функціоналу.

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dS}{v(x,y)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)} dx$$

Тоді рівняння Ейлера для неї запишемо

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sqrt{1+y^{12}}}{v(x,y)}\right] - \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{\sqrt{1+y^{12}}}{v(x,y)}\right]\right\} = 0$$

Припустимо, що швидкість пропорційна y, тобто *V(x,y)=ky*, тоді рівняння Ейлера перетворюється на диференціальне рівняння

$$1 + y'2 + yy'' = 0$$

з двоточковими крайовими умовами

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1 .$$

Розглянемо випадок збільшення удвічі координати, що визначає глибину занурення

$$y(1) = 1; \qquad y(2) = 2.$$

Числовий приклад наведено у таблиці 1. Аналіз даних таблиці наочно демонструє перевагу застосування методу рекурентної апроксимації.

Таблиця 1

Співставлення чисельних результатів

x	$y_0(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_3(x)$
1,00	1,00	1,000000	1,000000	1,000000
1,25	1,25	1,386195	1,391934	1,391941
1,50	1,50	1,651987	1,658305	1,658312
1,75	1,75	1,848866	1,854642	1,854050
2,00	2,00	2,000000	2,000000	2,000000

Застосування методу рекурентної апроксимації до задач варіаційного числення може здійснюватися таким чином. По-перше, як рекурентна апроксимація самого функціонала (31) як нелінійного оператора, а по-друге, відповідного диференційного рівняння Ейлера (32).

Припустимо $L(U,U',t)$ – є нелінійний оператор, яким позначено ліву частину рівняння Ейлера (32), тоді, застосовуючи розклад L, маємо

$$\left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_{S=S_n} + \left.\frac{\partial^2 g}{\partial U^2}\right|_{S=S_n} \cdot \Delta_n + \left.\frac{\partial^2 g}{\partial U \partial U'}\right|_{S=S_n} \cdot \Delta'_n -$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial U'}\right|_{S=S_n} + \left.\frac{\partial^2 g}{\partial U' \partial U}\right|_{S=S_n} \cdot \Delta_n + \left.\frac{\partial^2 g}{\partial (U')^2}\right|_{S=S_n} \cdot \Delta'_n\right) = 0 \qquad (33)$$

де S – вектор з компонентами U, U', t , а S_n – його наближене значення має компоненти U_n, U'_n, t , $\Delta_n = U_{n+1} - U_n$

Початкові умови при цьому мають вигляд:

$U_{n+1}(0) = C$,

а кінцеві лінеаризуються наступним чином

$$\left.\frac{\partial g}{\partial U'}\right|_{S_{nb}} + \left.\frac{\partial^2 g}{\partial U'\partial U}\right|_{S_{nb}} \cdot \Delta_n + \left.\frac{\partial^2 g}{\partial ()^2}\right|_{S_{nb}} \cdot \Delta'_n = 0,$$

де S_{nb} – значення вектора S_n у кінцевий момент $t = b$.

З іншого боку, розклавши безпосередньо підінтегральний вираз (31), теж скориставшись рекурентною апроксимацією в околі точки, S_n маємо

$$J_n = \int_a^b \left\{ \left. g \right|_{S_n} + \left.\frac{\partial g}{\partial U}\right|_{S_n} \cdot \Delta_n + \left.\frac{\partial g}{\partial U'}\right|_{S_n} \cdot \Delta'_n + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 g}{\partial U^2}\right|_{S_n} \cdot \Delta_{n-1}\Delta_n + 2\left.\frac{\partial g}{\partial U \partial U'}\right|_{S_n} \cdot \Delta_n \Delta'_n + \frac{\partial^2 g}{\partial (U')^2} \cdot \Delta'_n \Delta'_{n-1} \right) \right\} dt \qquad (34)$$

Прямі обрахунки рівняння Ейлера для функціонала (34) свідчать, що воно співпадає з (33). Таким чином, найближчий підхід до точного варіаційного рівняння є еквівалентним підходу точному до наближеного варіаційного рівняння.

Однак значною перевагою другого підходу є те, що застосування методів динамічного програмування та інваріантного занурення дозволяє уникати двоточкової крайової задачі і, як наслідок, необхідності пошуку розв'язків лінійної системи алгебраїчних рівнянь.

Тепер зупинимось на питанні, як використовуючи рекурентну апроксимацію отримати оцінки верхньої, нижньої межі для визначеного класу задач. Для точності розглянемо, знову ж таки, задачу мінімізації функціоналу.

$$J(x) = \int_0^1 (x'^2 + \varphi(x))dt$$

за умов, що на x накладені обмеження $x(0) = C, \quad x'(b) = 0$, які спростили до вигляду

$$x(0) = C, \quad x'(b) = 0 \qquad (35)$$

Друга умова дозволяє не накладати на кінцеві значення $x(1)$.

Припустимо, що $\varphi(x_n)$ є опуклою функцією, тоді можна записати

$$\varphi(x_n) = \max_{x_{n-1}}[\varphi(x_{n-1}) + \Delta_n \sum_{k=1}^{N} \left.\frac{\partial^k \varphi}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta = 0} \cdot \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!}],$$

з іншого боку

$$\min_{x_n} J(x_n) = \min_{x_n} \int_0^1 \left[(x'_n\ )^2 + \varphi(x_n) \right] dt = \min_{x_n} \max_{x_{n-1}} \left\{ \int_0^1 \left[(x'_n\ )^2 + \varphi(x_{n-1}) + \Delta_n \sum_{k=1}^{N} \left.\frac{\partial^k \varphi}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta = 0} \cdot \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!} \right] dt \right\}$$

Спираючись на загальні результати теорії ігор, можна показати операції максимізації і мінімізації, можна змінити місцями. Найпростіший шлях доведення цього випадку це безпосередня підстановка

$$\min J(x_n) = \max_{x_{n-1}} \min_{x_n} \left\{ \int_0^1 \left[(x')^2 + \varphi(x_{n-1}) + \Delta_n \sum_{k=1}^{N} \left.\frac{\partial^k \varphi}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta = 0} \cdot \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!} \right] dt \right\}$$

Нижня границя може бути отримана

$$\min J(x_n) \geq \min_{x_n} \left\{ \int_0^1 \left[(x')^2 + \varphi(x_{n-1}) + \Delta_n \sum_{k=1}^{N} \left.\frac{\partial^k \varphi}{\partial \Delta^k}\right|_{\Delta = 0} \cdot \frac{\Delta_{n-1}^{k-1}}{k!} \right] dt \right\} \qquad (36)$$

Для демонстрації цього зупиняємось на двоїстості, яку ми використали при обертанні задачі мінімізації до задачі максимізації.

Розглянемо загальну задачу визначення мінімальної відстані від точки A_0 до опуклої множини Ω (рис. 3). Проведемо дотичну до граничної кривої *S*, та позначимо відстань від точки A_0 до довільної дотичної. Геометрично видно, що довжини відрізку A_0A_1 є не що інше як мінімальна відстань від A_0 до дотичної, тобто *d*. Крім цього одразу видно максимальну задачу оскільки за первинним змістом *d* – це мінімальна відстань до точок дотичної, оскільки A_0B_0 відрізок їй ортогональний.

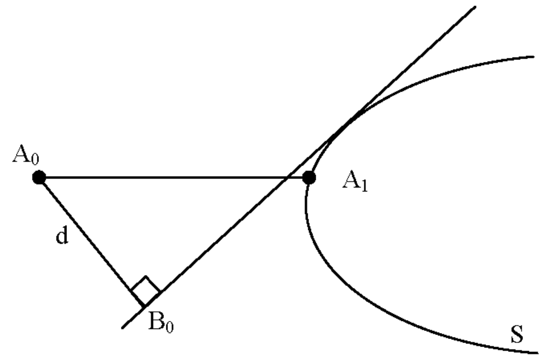

Рис. 3

Рівняння Ейлера для задачі мінімізації функціонала правої частини виразу (36) має вигляд у лінійному наближенні

$$x'' - \frac{\varphi'(x)}{2} = 0 \qquad x(0) = C; \quad U'(1) = 1$$

За умов позначень

$$U = C + W\,,$$

отримаємо

$$U = C + \frac{1}{2}\int_0^1 k(s,t)\varphi'(x(s))ds$$

де *k(s,t)* – функція Гріна для відповідної крайової задачі з однорідними умовами

$$U'' = r, \qquad U(0) = U'(1) = 0$$

Після нескладних обчислень правої частини нерівності (36) визначимо

$$k(x_{n-1}) = \frac{1}{4}\int_0^1\int^1 k(s,t)\varphi'(x_{n-1}(s))\varphi'(x_{n-1}(t))dsdt + \int_0^1 \left[(C - x_{n-1})\varphi'(x_{n-1}) + \varphi(x_{n-1})\right]dt$$

Таким чином, остаточно маємо

$$\min_{x_n} J(x_n) = \max_{x_{n-1}} k(x_{n-1})$$

Ліва частина дає одразу оцінки зверху, а права – знизу. Раціональний підбір наближень дозволяє отримати вузький інтервал оцінок без звертання до розв'язку задачі.

5. ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ТА ПРОЕКТУВАННЯ

Розглянемо декілька типових застосувань методу рекурентної апроксимації до оптимального проектування та управління з адаптацією.

Розглянемо одну з загальних задач теорії управління як задачу мінімізації скалярного функціонала.

$$J(y)=\int_0^T g(x,y)dt+\varphi(a) \tag{37}$$

На множині m-мірних вектор-функцій *y(t)* та *k*-мірних векторів a, де *n*-мірний вектор x, вектор y та a пов'язані диференціальним рівнянням:

$$\frac{dx}{dt}= h(x,y,a),\ x(0) = c. \tag{38}$$

Розглядаючи вектор *a,* як вектор конструктивних параметрів, узагальнимо задачу (37) – (38) як задачу оптимального проектування з обмеженнями. При дослідженні такої варіаційної задачі із застосуванням ідеї рекурентної апроксимації можливо рухатись двома засобами. Визначаючи початковий стан системи y_0 та конструктивні параметри за прототипом a_0 за допомогою лінеаризованого рівняння (38) знайдемо $x_0 = f(t)$, що задовольняє початковим умовам:

$$\frac{dx_0}{dt} = h(x_0,y_0,a_0),\ x_0(0) = c. \tag{38}$$

Наступний крок дозволяє отримати *x*, якщо скористатись рекурентним розкидом правої частини (38) сумісно з задачею мінімізації (37) на множині векторів y_1, та a_1, функціонала

$$\int g_2(x_1,y_1,\ a_1,\ x_0,y_0,a_0)dt+\varphi(a_1,a_0),$$

де через g_2 позначено розкладання функції $g\ (x,y,a)$. Нескладно переконатись, що рівняння Ейлера будуть лінійні відносно *x, y, a*. З іншого боку, існує можливість використати стандартну варіаційну процедуру та отримати рівняння Ейлера, а далі застосувати рекурентну апроксимацію до цього рівняння.

Для уніфікації алгоритму доцільно розглядати вектор *a* як розв'язок диференціального рівняння $\frac{da}{dt} = 0$ з невизначеними початковими умовами.

Наступним кроком, вводячи невідомі множники Лагранжа *λ(t)* та *μ(t)*, сформуємо новий функціонал

$$\int_0^T [g(x,y,a)+ (\lambda(t),\dot{x}-h(x,y,a))+(м(t),\dot{a})]dt+\varphi(a(0)),$$

а далі стандартним чином виписуються диференціальні рівняння та граничні умови.

Розглянемо для більшої переконливості приклад аналогічний, розглянутому в роботі [2]. Поставимо задачу мінімізації функціоналу

$$J(y,a)=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+y^2)dt+\frac{a^2}{2} \tag{39}$$

на множині функцій *y* та параметра *a*, де

$$\frac{dx}{dt}=-ax+y,\ \ x(0)=c,\ \ \frac{da}{dt}=0. \tag{40}$$

Рівняння Ейлера та граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}=-ax+y, && x(0)=c,\\
&\dot{\lambda}=x+\lambda a, && \lambda(1)=0,\\
&\dot{a}=0, && \mu(0)=a(0),\\
&\dot{\mu}=\lambda x, && \mu(1)=0,\\
&y=\lambda
\end{aligned} \tag{41}$$

Введемо співвідношення $y = \lambda$, що дозволяє виключити λ з розгляду. В якості початкового наближення візьмемо

$$x_0(t) = 1, \quad y_0(t) = 0, \quad \mu_0(t) = 0, \quad a_0 = 0 \tag{42}$$

Тоді будь-який із двох методів, розглянутих у розділі 5, приводить до наступної схеми послідовних наближень

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_{n+1} = -a_n x_{n+1} + y_{n+1} - x_n(a_{n+1} - a_n),\\
&\qquad x_{n+1}(0) = c,\\
&\dot{y}_{n+1} = x_{n+1} + a_n y_{n+1} + y_n(a_{n+1} - a_n),\\
&\qquad y_{n+1}(1) = 0,\\
&\dot{\mu}_{n+1} = x_{n+1} y_n + x_n(y_{n+1} - y_n),\\
&\qquad \mu_{n+1}(0) = a_{n+1}(0),\\
&\dot{a}_{n+1} = 0, \quad \mu_{n+1}(1) = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Застосування розглянутих вище стандартних методів чисельного визначення послідовності $\{x_n, y_n, a_n\}$ не викликає ускладнень, а лінійність рівнянь (41) пояснює повну еквівалентність рекурентних співвідношень (43), отриманих за методом рекурентної апроксимації та квазілінеаризації, що наведено у роботі [2].

ВИСНОВКИ

1. Застосування методу рекурентної апроксимації дозволяє моделювати динамічні системи та процеси, забезпечуючи середньо-квадратичну двосторонню збіжність за умов монотонності диферецційовності функції Лагранжа.
2. Алгоритми обчислення розв'язків мають просту стандартну форму і, на відміну від методів квазілінеаризації, застосовуються без обмежень на величини похідних від образів утворених дією оператору.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций / Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 534 с.
2. Белман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и совеременная теория управления. – М.: Наука, 1969. – 458 с.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И Приближенные методы высшего анализа. – М.; Л: Физматгиз, 1962. – 708 с.
4. Лучка А.Ю, Лучка Т.Ф. Возникновение и развитие прямых методов математической физики. – К.: Наукова думка, 1985. – 239 с.
5. Трунов А.Н. Моделирование глубоководных технических средств и систем с распределенными параметрами. Проектирование судов и судовых устройств. Сборник научных трудов. – Николаев: НКИ, 1989. – С. 127-136.
6. Трунов О.М. Застосування методу рекурентної апроксимації до розв'язку нелінійних задач // Наукові праці МФ НаУКМА. – С. 135-142.

Рецензенти: д.т.н., проф. Кондратенко Ю.П.,
д.т.н., проф. Казарєзов А.Я.

 Стаття надійшла в редакцію 20.09.09