УДК [532.5:534-14]:629.584.017.2

Трунов А.Н.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ ПОДВОДНОГО АППАРАТА

Методами гидродинамической теории качки решена в приближенной постановке краевая задача теории потенциала о возмущенном движении жидкости, вызванном колебаниями полностью погруженного подводного аппарата, выведены формулы для расчета гидродинамических сил.

Ключевые слова: *гидродинамика, качка, колебания, краевая задача, погруженный подводный аппарат.*

Методами гідродинамічної теорії хитавиці розв'язана у наближеній постановці краева задача теорії потенціалу про збурений рух рідини, що викликано коливаннями повністю зануреного підводного апарату, виведені формули для розрахунків гідродинамічних сил.

Ключові слова: *гідродинаміка, качка, коливання, крайова задача, занурений підводний апарат.*

Boundary-value problem solved by the methods of naval hydrodynamics which is made as approximated solution of the potential theory on fluid motion disturbed by oscillations on of the floating underwater robot, the mathematical forms for calculations of hydrodynamic forces are obtained as well.

Key words: *hydrodynamics, tossing, vibrations, task, submerged submarine vehicle.*

Опыт применения подводных аппаратов (ПА) в качестве основного либо вспомогательного технологического оборудования для выполнения отдельных операций в период аварийно-спасательных работ приводит к необходимости их эксплуатации в условиях повышенных внешних возмущений на поверхности воды. Одной из задач [1; 3], решение которой позволяет обеспечить функционирование ПА в таких условиях является задача расчета гидродинамических сил и моментов для полного погружения при наличии внешних возмущений на поверхности воды.

В работах [1; 4] рассматривалась задача возникновения качки судна из состояния абсолютного или относительного покоя. Однако, изменения условий обтекания существенно усложняет гидродинамическую задачу теории потенциала.

Главной не решенной проблемой является задача о малых неустановившихся колебаниях в режиме полностью погруженного ПА, которые возникают вследствие внешних возмущений.

Целью статьи являться определение потенциала скоростей как решение гидродинамической задачи и определение сил и моментов, действующих на погруженный ПА.

Изложение основного материала.

Поставим общую задачу о малых неустановившихся колебаниях в режиме плавающего аварийно-спасательного аппарата, возникающих от внесенных возмущений на поверхности воды. Исследование этих колебаний выполним с учетом движения тяжелой несжимаемой жидкости. В этой связи сформируем граничные условия для потенциала скорости $\varphi(x,y,z,t)$:

– условие обтекания на поверхности подводного аппарата:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \vartheta_n(m,t), \tag{1}$$

$$\vartheta_n(m,t) = \vec{n}\cdot\vec{\vartheta} + (\vec{r}_0\times\vec{n})\cdot\vec{\omega}\,, \tag{2}$$

где $\vartheta_n(m,t)$ нормальная скорость произвольной точки m заданной радиус-вектором $\vec{r}_0$ на поверхности аппарата S, которая определится через вектора скорости начала координат

$$\vec{\vartheta} = \vartheta_1 \vec{i} + \vartheta_2 \vec{j} + \vartheta_3 \vec{k} \tag{3}$$

и угловой скорости

$$\vec{\omega} = \vartheta_4 \vec{i} + \vartheta_5 \vec{j} + \vartheta_6 \vec{k}\ ; \tag{4}$$

– условие постоянства давления на поверхности при $z = 0$

$$g\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0\ ; \tag{5}$$

условие ограниченности и единственности потенциала на ребрах, которое в соответствии с [1], можно обобщить

$$\varphi(x,y,z,t) \sim O(x) = k\, r'^{\lambda}\ ,$$

где $O(x)$ – символ порядка, λ – действительное число, r' – расстояние от «текущей» точки до точки Р на ребре с координатами

$$P(x_1^p, y^p, z^p)\ ;$$

– условие ограниченности производных потенциала в области, занятой жидкостью которые также должны стремится к нулю при $z \to \infty$; $y \to \pm\infty$; $x \to \pm\infty$;

– начальные условия

$$t = 0\ ;\ z = 0\ ;\ \varphi(x,y,0,0) = f_1(x,y)\ ;\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f_2(x,y)\ . \tag{6}$$

Решение задачи проведем методом интегрального преобразования.

Применив преобразование Лапласа для потенциала по времени

$$\overline{\varphi}(x,y,z,p) = \int_0^\infty e^{-pt} \varphi(x,y,z,t)dt\ ;$$

с формулой обращения

$$\varphi(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt}\,\overline{\varphi}(x,y,z,p)dp$$

к уравнению Лапласа, получим

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial z^2} = 0\ . \tag{7}$$

В силу линейности уравнения (7) и граничных условий (1)-(6) с целью упрощения алгоритма решение представим в виде суммы

$$\varphi(x,y,z,t) = \varphi^*(x,y,z,t) + \varphi^D(x,y,z,t), \tag{8}$$

где $\varphi^*(x,y,z,t)$ – функция гармоническая в нижнем полупространранстве занятом жидкостью и которая также удовлетворяет условию на поверхности

$$\frac{\partial \overline{\varphi}^*}{\partial z} + \frac{p^2}{g}\cdot \overline{\varphi}^* = \frac{1}{g}\left[\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\ z=0}} + p\varphi(x,y,0,0)\right], \tag{9}$$

а $\varphi^D(x,y,z,t)$ также гармоническая функция в области занятой жидкостью и удовлетворяет условиям на поверхности

$$\frac{\partial \overline{\varphi}^D}{\partial z} + \frac{p^2}{g}\overline{\varphi}^D = 0\ , \tag{10}$$

$$\frac{\partial \overline{\varphi}^D}{\partial n} = \vec{\overline{V}}_n(m,p) - \frac{\partial \overline{\varphi}^*}{\partial n} \text{ на } S. \tag{11}$$

Как следствие предложенной суперпозиции решений (8), исходная краевая задача распадется на две (7), (9) и (7), (10,) (11) соответственно для функций $\varphi^*(x,y,z,t)$ –

описывающей распространение первоначального возмущения без препятствий и $\varphi^D(x,y,z,t)$ вызванной взаимодействием с корпусом подводного аппарата.

Введем преобразование Лапласа по координате z

$$\tilde{\overline{\varphi}}(x,y,q,\rho)=\int_0^\infty e^{-qz}\overline{\varphi}(x,y,z,\rho)dz \;,$$

с формулой обращения

$$\overline{\varphi}(x,y,z,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{qz}\tilde{\overline{\varphi}}(x,y,q,\rho)dq\;.$$

Применяя его к уравнению (7) с учетом начальных и граничных условий на поверхности, запишем

$$\frac{\partial\tilde{\overline{\varphi}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\overline{\varphi}}}{\partial y^2}+q^2\tilde{\overline{\varphi}}+\left[\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial z}\cdot e^{-qz}+q\overline{\varphi}e^{-qz}\right]_{z=0}^{\infty}=0\,.$$

Откуда следует

$$\frac{\partial\tilde{\overline{\varphi}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\overline{\varphi}}}{\partial y^2}+q^2\tilde{\overline{\varphi}}=\left.\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial z}\right|_{z=0}+q\overline{\varphi}(x,y,0,p)\,. \tag{12}$$

Обозначим $\vartheta(x,y)=\tilde{\overline{\varphi}}(x,y,q,\rho)$, $L(x,y,q,p)=\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial z}|_{z=0}+q\overline{\varphi}(x,y,0,p)$.

Далее применим к (12) преобразование Лапласа в полубесконечных пределах по координате x и y.

$$\overline{\vartheta}(\alpha,y)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\vartheta(x,y)dx\,,$$

$$\tilde{\overline{\vartheta}}(\alpha,\beta)=\int_0^\infty e^{-\beta x}\overline{\vartheta}(x,y)dx\,.$$

В результате получим

$$\begin{gathered}\tilde{\overline{\vartheta}}(\alpha,\beta,q,p)=\frac{1}{\alpha_q^2+\beta_q^2+q^2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\beta y}e^{-\alpha x}L(x,y,q,p)dxdy-\\ \int_0^\infty\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\alpha_q\vartheta\right]\Big|_{x=0}e^{-\beta y}dy-\left[\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial y}+\beta_q\overline{\vartheta}\right]\Big|_{y=0}\end{gathered} \tag{13}$$

где α_q,β_q обозначены соответственно корни уравнений

$$\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\alpha_q\vartheta\right]=0;\qquad\left[\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial y}+\beta_q\overline{\vartheta}\right]=0.$$

С учетом введенных обозначений (8) начальных (6) граничных (9) условий преобразуем (13) при этом нижние индексы при корнях α_q,β_q будут опущены

$$\tilde{\overline{\vartheta}}^*(\alpha,\beta,q,p)=\frac{1}{g(\alpha^2+\beta^2+q^2)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{f_2(x,y)+p\left[f_1(x,y)-p\overline{\varphi}^*(x,y,0,p)+\frac{qg}{p}\overline{\varphi}(x,y,0,p)\right]\right\}* \tag{14}$$

$$*\,e^{-\alpha x}e^{-\beta y}dxdy$$

Применим последовательно три обратных преобразования Лапласа по переменным α,β,q

$$\overline{\varphi}^*(x,y,z,p)=$$

$$-\frac{1}{8\pi^3 i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{\alpha x}e^{\beta y}e^{qz}}{g(\alpha^2+\beta^2+q^2)}\int_0^\infty\int_0^\infty\left\{f_2(x,y)+p[f_1(x,y)-p\overline{\varphi}^*(x,y,0,p)+\frac{qg}{p}\overline{\varphi}(x,y,0,p)\right\}e^{-\alpha x}e^{-\beta y}dxdyd\alpha d\beta dq \tag{15}$$

Функция $\overline{\varphi}^D(x,y,z,p)$ должна удовлетворять условиям (11), где $\vec{\overline{V}}(m,p)$, $\vec{\overline{\Omega}}(m,p)$ – изображения вектора линейной и угловой соответственно скорости точки m погруженной поверхности подводного аппарата. Представим последние в виде соответствующих проекций преобразованных по Лапласу:

$$\vec{\overline{V}}(m,p)=\vec{i}\,\overline{V_1}+\vec{j}\,\overline{V_2}+\vec{k}\,\overline{V_3}\,,$$

$$\vec{\overline{\Omega}}(m,p)=\vec{i}\,\overline{V_4}+\vec{j}\,\overline{V_5}+\vec{k}\,\overline{V_6}\,,$$

тогда в силу линейности (11), введем:

$$\overline{\varphi}^{D}(x,y,z,p)=\Phi_0+\vec{\Phi}_1\cdot\vec{\overline{V}}+\vec{\Phi}_2\cdot\vec{\overline{\Omega}}\,. \tag{16}$$

Граничные условия для всех введенных функций запишем

$$\frac{\partial\vec{\Phi}_1}{\partial n}=\vec{n}\,;\ \frac{\partial\vec{\Phi}_2}{\partial n}=\vec{r}\times\vec{n}\,;\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial n}=-\frac{\partial\overline{\varphi}^{*}(x,y,z,p)}{\partial n}\,, \tag{17}$$

причем вектора $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ представляются :

$$\vec{\Phi}_1=\vec{i}\,\varphi_1+\vec{j}\,\varphi_2+\vec{k}\,\varphi_3\,;\ \vec{\Phi}_2=\vec{i}\,\varphi_4+\vec{j}\,\varphi_5+\vec{k}\,\varphi_6\,. \tag{18}$$

Введенные представления для функций $\overline{\varphi}_j(x,y,z)$; $i=\overline{1,6}$ позволяют записать для них граничные условия на поверхности аппарата:

$$\frac{\partial\varphi_1(x_1,y,z)}{\partial n}=\cos\left(n^\wedge x_1\right);\ \frac{\partial\varphi_2(x_1,y,z)}{\partial n}=\cos\left(n^\wedge y\right);\ \frac{\partial\varphi_3(x_1,y,z)}{\partial n}=\cos\left(n^\wedge z\right);$$

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial n}=y\cos\left(n^\wedge z\right)-z\cos\left(n^\wedge y\right);\ \frac{\partial\varphi_5}{\partial n}=z\cos\left(n^\wedge x_1\right)-x_1\cos\left(n^\wedge z\right);$$

$$\frac{\partial\varphi_6}{\partial n}=x\cos\left(n^\wedge y\right)-y\cos\left(n^\wedge x_1\right). \tag{19}$$

Рассмотрим случай определения этих функций для подводного аппарата, погруженного на глубину *h* при условии, что форма его корпуса цилиндр радиуса *R*, а ось цилиндра и ось x_1 совпадают. Для нахождения функций φ_j, введем цилиндрическую систему координат связанную с корпусом ПА (рис.1). Для всех j искомые функции будут удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_j}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial\psi^2}+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_1^2}=0\,,$$

но в связи с тем, что граничное условия зависят от индекса j, рассмотрим последовательно соответствующие случаи.

Случай $j=1$. Граничные условия для этого случая в соответствии с (19) запишутся:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=R}=0\,;\ \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\frac{p^2}{g}\varphi_1\cos\psi\right]\Big|_{r=h/\cos\psi}=0\,;$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=\pm L/2}=1\,.\qquad \left.\varphi_1\right|_{x_1=\pm L/2}\sim O(x)=\pm k\,r^{\lambda} \tag{20}$$

Введем преобразование Фурье, Ганкеля в конечных пределах соответственно:

$$\overline{\varphi}_1(r,n,x_1)=\int_0^{2\pi}\varphi_1K_j\,d\psi\,, \tag{21}$$

в котором:

$$K_j=\begin{cases}\sin n\psi & \\ \cos n\psi & \end{cases}\ \text{при}\ \begin{matrix}j=2n-1\\ j=2n\end{matrix}$$

$$\tilde{\overline{\varphi}}_1(\sigma_m,n,x_1)=\int_R^h rK_n(\sigma_m,r)\overline{\varphi}_1\,dr\,. \tag{22}$$

Формулы обращения для этих преобразований имеют вид

$$\varphi_1 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\overline{\varphi}_{1,0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{\varphi}_{1,2n-1}\sin n\psi + \varphi_{1,2n}\cos n\psi\right)\right], \tag{23}$$

где $\overline{\varphi}_{1,0} = \int_0^{2\pi}\varphi_1 d\psi$; $\overline{\varphi}_{1,2n-1} = \int_0^{2\pi}\varphi_1 \sin n\psi d\psi$; $\overline{\varphi}_{1,2n} = \int_0^{2\pi}\varphi_1 \cos n\psi d\psi$;

$$\overline{\varphi}_{1,j}(r,n,x_1) = \sum_{m=1}^{\infty} K_n(\sigma_m, r)\tilde{\overline{\varphi}}_1(\sigma_m, n, x_1). \tag{24}$$

Ядро преобразования Ганкеля определяется по выражению:

$$K_n(\sigma_m, r) = \frac{\Phi_n(\sigma_m, r)}{N}, \tag{25}$$

где $\Phi_n(\sigma_m, r)$, σ_m – собственные функции и собственные числа соответственно находятся из решения вспомогательной задачи Штурма-Лиувилля:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} + \left(\sigma^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\Phi = 0; \tag{26}$$

$$\frac{d\Phi}{dr}\Big|_{r=R} = 0\,;\ \left[\frac{d\Phi}{dr} + \frac{p^2}{g}\Phi\cos\psi\right]\Big|_{r=h/\cos\psi} = 0. \tag{27}$$

Решением краевой задачи (26), (27) будет линейная комбинация бесселевых функций первого и второго рода порядка *n*,

$$\Phi_n(\sigma_m, r) = \frac{J_n(\sigma_m r)}{\sigma_m J_n'(\sigma_m h) + \frac{p^2}{g}J_n(\sigma_m h)b_j} - \frac{Y_n(\sigma_m r)}{\sigma_m Y_n'(\sigma_m h) + \frac{p^2}{g}Y_n(\sigma_m h)b_j}. \tag{28}$$

Подчиняя (28) граничному условию (27) на цилиндрической поверхности корпуса ПА, запишем:

$$\frac{J_n'(\sigma_m R)}{\sigma_m J_n'(\sigma_m h) + \frac{p^2}{g}J_n(\sigma_m h)b_j} - \frac{Y_n'(\sigma_m R)}{\sigma_m Y_n'(\sigma_m h) + \frac{p^2}{g}Y_n(\sigma_m h)b_j} = 0. \tag{29}$$

Положительные корни трансцендентного уравнения (29) дают собственные значения σ_m для каждого *n* и *p*, тогда норма вычислится по выражению:

$$N^2 = \int_R^h r\Phi_n^2(\sigma_m, r)dr = \frac{h^2}{2}\left[\frac{p^4 b_j^2}{g^2\sigma_m^2} + \left(1 - \frac{n^2}{\sigma_m^2 h^2}\right)\right]\Phi_n^2(\sigma_m, h) - \frac{R^2}{2}\left[1 - \frac{n^2}{{\sigma_m}^2 R^2}\right]\Phi_n^2(\sigma_m, R). \tag{30}$$

Применяя последовательно преобразование Фурье (21) и Ганкеля (22) к уравнению Лапласа получим:

$$\frac{d^2\tilde{\overline{\varphi}}_1}{dx_1} - {\sigma_m}^2\tilde{\overline{\varphi}}_1 = 0, \tag{30}$$

$$\frac{d\tilde{\overline{\varphi}}}{dx_1}\Big|_{x_1=\pm l/2} = \tilde{\overline{1}}\,; \qquad \tilde{\overline{\varphi}}_1\Big|_{x_1 = \pm L/2} = \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} a, \qquad a = \int_R^h r^{\lambda+1}K_n(\sigma_m, r)\overline{\varphi}_1 dr.$$

Решением (30) будет:

$$\tilde{\overline{\varphi}}_1 = C_1 e^{-\sigma_m x_1} + C_2 e^{\sigma_m x_1}, \tag{31}$$

где $C_1 = -C_2 = -\dfrac{e^{-\sigma_m L/2}}{\sigma_m}\cdot\dfrac{\tilde{\overline{1}}}{\left(1 + e^{-\sigma_m L}\right)}$

при этом не сложно убедится, что условие на левом и правом ребре выполняются, а коэффициенты пропорциональности k_1 и k_2 равны по модулю и противоположны по знаку. Последнее объясняется тем, что для данного способа решения задач методом конечно – интегральных преобразований, который применим только при выполнении условия разделения переменных как для начальных и граничных условий, так и для самого уравнения Лапласа условие единственности решений всегда выполняется на границе пересечения координатных поверхностей.

Применяя формулы обращения, запишем для решения исходной краевой задачи в виде (23), где коэффициенты вычислятся:

$$\overline{\varphi}_{1,0}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{1,0}e^{-\sigma_m x_1}+C_{2,0}{}^{\sigma_m x_1}\right)\cdot K_0\left(\sigma_m,r\right), \tag{32}$$

$$\overline{\varphi}_{1,2n-1}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{1,n}e^{-\sigma_m x_1}+C_{2,n}e^{\sigma_m x_1}\right)\cdot K_n\left(\sigma_m,r\right),$$

$$\overline{\varphi}_{1,2n}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{1,n}e^{-\sigma_m x_1}+C_{2,n}e^{\sigma_m x_1}\right)\cdot K_n\left(\sigma_m,r\right).$$

Случай 2. Граничные условия для этого случая запишутся:

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=R}=\sin\psi\ ;\ \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}+\frac{p^2}{g}\varphi_2\cos\psi\right]\Bigg|_{r=h/\cos\psi}=0\ ; \tag{33}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\Bigg|_{x_1=\pm L/2}=0\ .$$

Применяя к уравнению Лапласа преобразования Фурье и Ганкеля аналогично как это выполнено для случая 1, получим:

$$\frac{d^2\tilde{\overline{\varphi}}_2}{dx_1^2}-\sigma_m{}^2\tilde{\overline{\varphi}}_2=\left\{R\left[K_n\left(\sigma_m,R\right)\overline{\sin\psi}-\frac{dK_n}{dr}\left(\sigma_m,R\right)\overline{\varphi}_2\left(R,n,x_1\right)\right]\right\}, \tag{35}$$

где граничные условия (27) для собственных функций целесообразно сохранить.

Решением (35) с учетом граничных условий для $\tilde{\overline{\varphi}}_2$ будет:

$$\tilde{\overline{\varphi}}_2=C_1e^{-\sigma_m x_1}+C_2e^{\sigma_m x_1}+\frac{RK_n\left(\sigma_n,R\right)\overline{\sin\psi}}{\sigma_m{}^2},$$

$$C_1=C_2=0$$

Применяя формулы обращения запишем для решения исходной краевой задачи в виде выражения (23), где коэффициенты:

$$\overline{\varphi}_{2,0}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R}{\sigma_m{}^2}K_0\left(\sigma_m,R\right)\overline{\sin\psi}K_0\left(\sigma_m,r\right)\ ,$$

$$\overline{\varphi}_{2,2n-1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R}{\sigma_m{}^2}K_n\left(\sigma_m,R\right)\overline{\sin\psi}K_n\left(\sigma_m,r\right),$$

$$\overline{\varphi}_{2,2n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R}{\sigma_m{}^2}K_n\left(\sigma_m,R\right)\overline{\sin\psi}K_n\left(\sigma_m,r\right).$$

Случай 3. Граничные условия для этого случая запишутся:

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}\Big|_{r=R}=\cos\psi\ ;\ \left[\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}+\frac{p^2}{g}\varphi_3\cdot\cos\psi\right]\Bigg|_{r=h/\cos\psi}=0\ ;$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}\Bigg|_{x_1=\pm L/2}=0\ . \tag{36}$$

Осуществляя аналогично случаю 2 преобразования Фурье и Ганкеля, решая уравнение для изображения решение запишем в виде (23), где будут изменены только постоянные множители $\overline{\sin\psi}$ на $\overline{\cos\ \psi}$

$$\overline{\varphi}_{3,0}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R}{\sigma_m{}^2}K_0\left(\sigma_m,R\right)\overline{\cos\psi}K_0\left(\sigma_m,r\right),$$

$$\overline{\varphi}_{3,2n-1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{R}{\sigma_m{}^2}K_n\left(\sigma_m,R\right)\overline{\cos\psi}K_n\left(\sigma_m,r\right),$$

$$\overline{\varphi}_{3,2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R}{\sigma_m{}^2} K_n(\sigma_m, R)\overline{\cos\psi} K_n(\sigma_m, r).$$

Случай 4. Граничные условия для этого случая запишутся:

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0\,;\ \left[\frac{\partial \varphi_4}{\partial r} + \frac{p^2}{g}\varphi_4 \cos\psi\right]\Big|_{r=h/\cos\psi} = 0\,;$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\pm L/2} = 0\,. \tag{37}$$

Осуществляя аналогично случаю 2 преобразования Фурье и Ганкеля, решая уравнение для изображения получим $\tilde{\overline{\varphi}}_4 = 0$, а следовательно $\varphi_4 = 0$.

Случай 5. Граничные условия для этого случая запишутся:

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial r}\Big|_{r=R} = x_1 \cos\psi\,;\ \left[\frac{\partial \varphi_5}{\partial r} + \frac{p^2}{g}\varphi_5 \cos\psi\right]\Big|_{r=h/\cos\psi} = 0\,;$$

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\pm L/2} = z\,. \tag{38}$$

Осуществляя аналогично случаю 2 преобразования Фурье и Ганкеля решая уравнение для изображения получим:

$$\tilde{\overline{\varphi}}_5 = C_1 e^{-\sigma_m x_1} + C_2 e^{\sigma_m x_1} + S_n x_1 \overline{\cos\psi}\ ,$$

где

$$S_n = \frac{RK_n(\sigma_n, R)}{\sigma_m{}^2},$$

$$C_{1,n} = \frac{\left(\tilde{\overline{z}} - S_n \overline{\cos\psi}\right)\left(e^{-\sigma_b L/2} - e^{\sigma_b L/2}\right)}{\sigma_m\left(e^{-\sigma_b L} - e^{\sigma_b L}\right)},$$

$$C_{2,n} = \frac{\left(\tilde{\overline{z}} - S_n \overline{\cos\psi}\right)\left(e^{\sigma_b L/2} - e^{-\sigma_b L/2}\right)}{\sigma_m\left(e^{\sigma_b L} - e^{-\sigma_b L}\right)}.$$

Применяя формулы обращения, запишем решение исходной краевой задачи в виде выражения (23), где коэффициенты:

$$\overline{\varphi}_{5,0} = \sum_{m=1}^{\infty} K_0(\sigma_m, r)\left[C_{1,0}e^{-\sigma_m x_1} + C_{2,0}{}^{\sigma_m x_1} + S_0 x_1 \overline{\cos\psi}\right],$$

$$\overline{\varphi}_{5,2n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} K_n(\sigma_m, r)\left[C_{1,n}e^{-\sigma_m x_1} + C_{2,n}{}^{\sigma_m x_1} + S_n x_1 \overline{\cos\psi}\right],$$

$$\overline{\varphi}_{5,2n} = \sum_{m=1}^{\infty} K_n(\sigma_m, r)\left[C_{1,0}e^{-\sigma_m x_1} + C_{2,0}{}^{\sigma_m x_1} + S_n x_1 \overline{\cos\psi}\right].$$

Случай 6. Граничные условия для этого случая запишутся:

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial r}\Big|_{r=R} = x_1 \sin\psi\,;\ \left[\frac{\partial \varphi_6}{\partial r} + \frac{p^2}{g}\varphi_6 \cos\psi\right]\Big|_{r=h/\cos\psi} = 0\,;$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\pm L/2} = -y\,. \tag{39}$$

Осуществляя аналогично случаю 2 преобразования Фурье и Ганкеля, решая уравнение, для изображения получим:

$$\tilde{\overline{\varphi}}_6 = C_1 e^{-\sigma_m x_1} + C_2 e^{\sigma_m x_1} + S_n x_1 \overline{\sin\psi}\ ,$$

$$C_{1,n} = \frac{\left(\tilde{\overline{y}} + S_n \overline{\sin\psi}\right)\left(e^{\sigma_b L/2} - e^{-\sigma_b L/2}\right)}{\sigma_m\left(e^{-\sigma_b L} - e^{\sigma_b L}\right)},$$

$$C_{2,n}=\frac{\left(\tilde{\tilde{y}}+S_n\overline{\sin\psi}\right)\left(e^{-\sigma_b L/2}-e^{\sigma_b L/2}\right)}{\sigma_m\left(e^{\sigma_b L}-e^{-\sigma_b L}\right)}.$$

Применяя формулы обращения, запишем решение исходной краевой задачи в виде выражения (23), где коэффициенты:

$$\overline{\varphi}_{6,0}=\sum_{m=1}^{\infty}K_0\left(\sigma_m,r\right)\left[C_{1,0}e^{-\sigma_m x_1}+C_{2,0}{}^{\sigma_m x_1}+S_0x_1\overline{\sin\psi}\right],$$

$$\overline{\varphi}_{6,2n-1}=\sum_{m=1}^{\infty}K_n\left(\sigma_m,r\right)\left[C_{1,n}e^{-\sigma_m x_1}+C_{2,n}{}^{\sigma_m x_1}+S_nx_1\overline{\sin\psi}\right],$$

$$\overline{\varphi}_{6,2n}=\sum_{m=1}^{\infty}K_n\left(\sigma_m,r\right)\left[C_{1,0}e^{-\sigma_m x_1}+C_{2,0}{}^{\sigma_m x_1}+S_nx_1\overline{\sin\psi}\right].$$

Для определения сил и моментов, действующих на ПА, воспользуемся выражением гидродинамического давления, определенного с точностью до малых второго порядка без учета гидростатического давления:

$$p'-p_0'=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

где p', p_0' – давление внутри и на свободной поверхности жидкости. В результате применения преобразования Лапласа в соответствии с [4] запишем для изображения гидродинамического давления:

$$P=-\rho\sum^{6}\left\{W_j\left(p\right)\varphi_j\left(x,y,z,p\right)+\vartheta_j\left(0\right)\left[\varphi_j\left(x,y,z,p\right)-\varphi_j\left(x,y,z,\infty\right)\right]\right\}-\rho\left[\Phi_0\left(x,y,z,p\right)-\Phi_0\left(x,y,z,\infty\right)\right]-$$

$$-\rho g\left[\overline{\varphi}^*(x,y,z,p)-\overline{\varphi}^*(x,y,z,\infty)\right],$$

где *$W_j(p)$* – изображение проекцией вектора ускорений $\frac{d\vartheta_j}{dt}$, а также обозначено $\overline{\varphi}_1^*\left(x,y,z,p\right)=\overline{\varphi}^*\left(x,y,z,p\right)-\overline{\varphi}^*\left(x,y,z,\infty\right)$.

Изображение вектора главных сил и моментов действующих на подводный аппарат:

$$\vec{F}=X_1\vec{i}+X_2\vec{j}+X_3\vec{k},$$

$$\vec{M}=X_4\vec{i}+X_5\vec{j}+X_6\vec{k},$$

представится:

$$\vec{F}=-\iint_s P\vec{n}ds;$$

$$\vec{M}=-\iint_s P\left(\vec{r}\times\vec{n}\right)ds,$$

где компоненты:

$$X_m=X_m'+X^0{}_m+X^*{}_m$$

определятся по выражениям:

$$X_m'=-\sum_{j=1}^{6}\left\{W_j\left(p\right)C_{jm}\left(p\right)+\vartheta_j\left(0\right)\left[C_{jm}\left(p\right)-C_{jm}\left(\infty\right)\right]\right\};$$

$$X_m^0=-\left[C_{0m}\left(p\right)-C_{0m}\left(\infty\right)\right];$$

$$X_m^*=\rho\iint_s\overline{\varphi}_1^*\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}ds; \tag{40}$$

$$C_{jm}=-\rho\iint_s\varphi_j\frac{\partial\varphi_m}{\partial n}ds;\ j=\overline{1,6},\ m=\overline{1,6}.$$

Коэффициенты $C_{jm}\left(p\right)$ определяются аналогично [2; 4] при замене параметра. Таким образом, их свойства симметрии и зависимости только от формы поверхности и параметра преобразования Лапласа *p* сохраняются.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные соотношения (40) позволяют рассматривать три типа задач о неустановившейся качке погруженного ПА.

Первый тип задач соответствует случаю, когда в начальный момент времени импульс и смещение ПА отличны от нуля, а начальное возвышение и начальный импульс на свободной поверхности нулевой.

Для этого случая изображения компонент сведутся к X'_m, определяемым по выражениям (40), в которых изображения ускорений $W_j(p)$ связаны с изображениями смещений $\overline{S}_j(p)$ и начальными значениями проекций вектора смещения $S_j(0)$ и скорости $\vartheta_j(0)$ соотношением вида $W_j(p) = p^2\overline{S}_j(p) - pS_j(0) - \vartheta_j(0)$,

при этом для анализа поведения компонент вектора гидродинамических сил при $t = 0$ и $t \to \infty$ можно использовать свойства предельных переходов:

$$\lim_{p\to\infty} \overline{X}_m = \lim_{t\to 0} X_m; \quad \lim_{p\to 0} \overline{X}_m = \lim_{t\to\infty} X_m .$$

Второй тип задач соответствует случаю, когда задано начальное возвышение и начальный импульс давления, а начальные смещения и импульс ПА равны нулю.

В этом случае:

$$X'_m = \sum_{j=1}^{6} p^2 S_j(p) C_{jm}(p), \quad X^0_m = -\left[C_{m0}(p) - C_{m0}(\infty)\right],$$

$$X^*{}_m = \rho \int_s\!\!\int \overline{\varphi}_1^{\,*} \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} dS \,, \quad C_{m0} = \rho \int\!\!\int \varphi_m \frac{\partial \overline{\varphi}^{\,*}}{\partial n} dS \,.$$

Третий тип это задача смешенного типа.

Таблица 1

Влияние количества членов ряда на относительную погрешность коэффициентов $C_{jm}(p)$

m	$\Delta C_{11} / C_{11} \cdot 100\%$	$\Delta C_{22} / C_{22} 100\%$	$\Delta C_{33} / C_{33} 100\%$	$\Delta C_{55} / C_{55} \cdot 100\%$	$\Delta C_{66} / C_{66} \cdot 100\%$
1	1,55777	41,007186	41,007186	5,612313	5,612313
2	0,12707	23,48111	23,48111	1,016958	1,016958
3	0,00531	15,12357	15,12357	0,30196	0,30196
4	0,00169	10,25152	10,25152	0,116441	0,116441
5	0,00063	7,064879	7,064879	0,052255	0,052255
6	0,00025	4,81704	4,81704	0,025431	0,025431
7	0,00010	3,14835	3,14835	0,012695	0,012695
8	0,00003	0,834734	0,834734	0,002254	0,002254

Непосредственное вычисление значений коэффициентов $C_{jm}(p)$ сталкивается на первый взгляд с вычислительными трудностями, обусловленными свойствами Бесселевых функций. Однако, этот процесс существенно упрощается с учетом свойства ортогональности поверхностей цилиндра оси радиус вектору и ограниченности решений, а также того обстоятельства, что для функций φ_1 – решения отличны от нуля только при $n = 0$, а для φ_2, φ_5 и φ_3, φ_6 при $n = 1$ для синус и косинус преобразования соответственно. Количество членов в рядах определяется характером сходимости и может быть выбрано для желаемой погрешности вычислений из таблицы 1. Как следует из анализа данных таблицы 1 для инженерных расчетов достаточно при вычислении использовать не более трех – пяти членов ряда, т.е вычисления проводить для трех-пяти значений σ_m

Таблица 2

Влияние глубины погружения на коэффициенты $C_{jm}(p,h)$

h	$C_{11}(p)$	$C_{22}(p)$	$C_{33}(p)$	$C_{55}(p)$	$C_{66}(p)$
1	0,0045	0,645	0,645	0,603	0,603
1,5	0,0104	0,795	0,795	0,793	0,793
2,0	0,0146	0,883	0,883	0,825	0,825
2,5	0,0176	0,925	0,925	0,859	0,859
3,0	0,0196	0,967	0,967	0,873	0,873

Влияние глубины погружения на относительные изменения коэффициентов преставлено в таблице 2. Как следует из анализа данных все коэффициенты носят характер асимптотических функций. Влияние параметра временного преобразования Лапласа представлено в таблице 3. Вычисления выполнены для $h/R=1$, $L/R=3$; $\frac{g\mu_1}{R}=6{,}42$. Влияние параметра p на C_{11} и C_{55}, C_{66} аналогично. Эти функции асимптотически возрастают. Однако, C_{22} и C_{33} асимптотически убывающие величины.

Таблица 3

Влияние параметра преобразования Лапласа на относительные коэффициенты $C_{jm}(p,\infty)/C_{jm}(p,\infty)$

p	$C_{11}(p,\infty)/C_{11}(0,\infty)$	$C_{22}(p,\infty)/C_{22}(0,\infty)$	$C_{33}(p,\infty)/C_{33}(0,\infty)$	$C_{55}(p,\infty)/C_{55}(0,\infty)$	$C_{66}(p,\infty)/C_{66}(0,\infty)$
1	0,13477	0,86948	0,86948	0,13477	0,13477
2	0,71364	0,28776	0,28776	0,38387	0,38387
3	0,92656	0,07380	0,07380	0,58365	0,58365
4	0,97553	0,02458	0,02458	0,71364	0,71364
5	0,98983	0,01021	0,01021	0,79567	0,79567

Безусловно, что форма реального корпуса ПА не имеет форму цилиндра. Как показано в роботах профессора Н.Б. Слижевского влияние оперения и рубки, а также отклонение формы может быть учтено предлагаемыми методиками в виде добавочных членов и поправочных коэффициентов [3].

Таким образом, полученные соотношения позволяют охватить целый класс задач о гидродинамическом потенциале в период малых неустановившихся колебаний погруженного ПА для набора начальных условий, как на поверхности тяжелой несжимаемой жидкости, так и на поверхности корпуса аппарата.

ВЫВОДЫ

1. В соответствии с современным состоянием и представлениями гидродинамической теории качки судов сформулирована и в приближенной постановке решена краевая задача о возмущенном движении жидкости, вызванной колебаниями погруженного ПА.
2. Гидродинамические силы действующие на погруженный ПА определены на основе решения комплекса вспомогательных краевых задач методами конечно-интегральных преобразований.
3. Полученные в работе результаты в форме конкретных соотношений могут служить основой для составления и решения дифференциальных уравнений колебаний ПА при неустановившейся качке при разработке алгоритмов и программ, моделирующих режимы работы технологических аппаратов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дыхта Л.М. Слуцкий Н.Г. Гидродинамическая задача о колебаниях плавучего дока при его транспортировке на волнении // Збірник наукових праць НУК. – № 1 (418), Миколаїв.– 2008. – С. 3-12.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – Т.2. – М.: Наука, 1964. – 505 с.
3. Слижевский Н.Б. Ходкость и управляемость подводных технических средств: учебное пособие. – Николаев, 1998. – 148 с.
4. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля. – М.:Наука, 1973. – С. 327.

Автор выражает искреннюю благодарность доктору технических наук,
профессору Леониду Михайловичу Дыхте,
чьи работы и дискуссии стимулировали настоящее исследование

 Стаття надійшла до редколегії 10.05.10 р.