УДК 62-50

Бідюк П.І., Торовець Т.А.

ОЦІНЮВАННЯ ЧАСОВОЇ СТРУКТУРИ СТАНІВ ПОЗИЧАЛЬНИКІВ БАНКІВ ЗА МАРКОВСЬКИМИ ЛАНЦЮГАМИ

Для прогнозування часової структури станів позичальників запропоновано підхід на основі ланцюгів Маркова. Кожний «часовий кошик» вважається станом скінченного дискретного ланцюга. Для оцінювання матриці перехідних ймовірностей у випадку невідомої історії індивідуальних переходів використано МНК з лінійними обмеженнями у вигляді нерівностей. Оцінка матриці перехідних ймовірностей дає можливість прогнозувати вектор станів позичальників.

Ключові слова: *Ланцюги Маркова, Метод найменших квадратів, вектор станів.*

Для прогнозирования временной структуры состояний заемщиков предложен подход на основе цепей Маркова. Каждая «временная корзина» рассматривается как состояние конечной дискретной цепи. Для оценивания матрицы переходных вероятностей использован МНК с линейными ограничениями в виде неравенств. Оценка матрицы переходных вероятностей дает возможность спрогнозировать вектор состояний заемщиков.

Ключевые слова: *Марковские цепи, Метод наименьших квадратов, вектор состояний.*

To predict the temporal structure of states of bank loan borrowers an approach is proposed that is based on Markov chains. Each “temporal basket” is considered as a state of finite discrete chain. To estimate the matrix of transition probabilities in a case of unknown history of individual transitions LS method was used with linear inequality type restrictions. The estimate of transition probabilities matrix provides a possibility to forecast a borrower state vector.

Key words: *Markov chains, Method of less squares, state vector.*

ВСТУП

Часова структура станів позичальників – один із найважливіших факторів, що впливає на прибуток банку. Положення про порядок формування та використання резерву для відшкодування можливих втрат за кредитними операціями банків (затверджено Постановою Правління НБУ від 06.07.2000 р., № 279, із змінами та доповненнями) [1] та вимоги Міжнародної конвергенції визначення розміру капіталу та стандартів капіталу Базельського Комітету з банківського нагляду (Базель 2) [2], передбачають резервування певного обсягу коштів протягом існування кредиту. Точний прогноз структури кредитного портфелю на наступний звітний період дає можливість зменшити необхідний рівень резервів і отримати додаткові кошти для поточної фінансової діяльності. Досвід світової фінансової кризи показав, що неадекватна оцінка банківською установою якості наявного кредитного портфеля призводить до катастрофічних проблем з ліквідністю, а кваліфікована робота з ризиками дає можливість їх уникнути.

Математичний апарат ланцюгів Маркова – один з найпоширеніших інструментів дослідження часової структури станів позичальників. Він також успішно застосовується для задач передбачення часток ринку у заданий момент часу в майбутньому [3], оцінювання процесів впровадження нових продуктів, для аналізу функціонування кредитної лінії супермаркету, моделювання поломки обладнання [4], дослідження процесу виплат за іпотекою.

Робота присвячена розробці практичної методики оцінювання часової структури станів при роздрібному кредитуванні споживачів, що може бути використана у повсякденній діяльності кредитних установ за умови наявності достатньої кредитної історії. Розглянуто процес підготовки вхідних даних для дослідження та розробки СППР, що дасть змогу прогнозувати структуру кредитного портфеля на задане число періодів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Необхідно розробити методику оцінювання часової структури станів для роздрібного кредитного портфелю. Процес виплати роздрібних кредитів не відрізняється від процесу виплат по іпотеці, тому методи, використані у дослідженнях [5; 6; 7], можуть використовуватися при аналізі платіжної поведінки роздрібних позичальників. При цьому доцільно порівняти різні підходи, що дозволить обрати оптимальну методику для прогнозу, а також обрати параметри, що використовуватимуться в якості вхідних даних. Після отримання кредиту позичальник може знаходитись у одному із часових кошиків (time baskets): «0», «1-30», «31-60», «61-90», «91-120», «120+», «paidoff» (виплачено). Якщо вважати кожний з цих семи кошиків дискретним станом, а можливість переходу від одного кошика до іншого описувати певною ймовірністю, то стохастичною моделлю, яка описує процес міграції позичальників, буде ланцюг Маркова із скінченною кількістю станів.

Для прогнозування часової структури станів доцільно використати один із трьох можливих показників: «Початкова сума кредиту», «Залишок по кредиту», «Кількість кредитів». Проте у фінансовій практиці, зазвичай, використовується показник «Залишок по кредиту», що включає в себе заборгованість по тілу кредиту і нараховані відсотки.

Для коректного застосування моделі необхідно перевірити виконання умов стаціонарності та однорідності популяції позичальників. Потім необхідно оцінити матрицю перехідних ймовірностей за одним із можливих методів і виконати прогнозування часової структури на задану кількість періодів.

ВИКОРИСТАННЯ МАРКОВСЬКОГО ПРОЦЕСУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ

Послідовність випробувань з можливими результатами $E_{1,}E_2\ldots$ називають ланцюгом Маркова[1], якщо ймовірності сукупного результату декількох випробувань визначаються за формулою:

$$P\{(E_{j_0}, E_{j_1}, \ldots E_{j_n})\} = a_{j_0} p_{j_0 j_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-2} j_{n-1}} p_{j_{n-1} j_{2n}} \tag{1}$$

через початковий розподіл ймовірностей $\{a\}$ станів E_k в початковий момент 0 і через постійні умовні ймовірності p_{jk} події E_k за умови, що E_j відбулася під час попереднього випробування [8]. Ймовірності переходу можуть бути сформовані у вигляді матриці ймовірностей переходу:

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

де перший індекс означає номер рядка, а другий індекс – номер стовпчика. Для того щоб застосувати до отриманих даних модель з використанням ланцюгів Маркова, необхідно задовольнити два припущення: (а) популяція індивідів повинна бути однорідною; (б) отримані перехідні ймовірності повинні бути стаціонарними [9]. Однорідність означає те, що усі

[1] Ми розглядаємо лише окремий випадок ланцюгів Маркова, тому термін «ланцюг Маркова» повинен бути уточненим так: «із постійними ймовірностями переходу». Узагальнені ланцюги Маркова розглядаються досить рідко.

індивіди популяції мають одну і ту ж матрицю переходу в кожен момент часу n, тобто для популяції X_l має виконуватись співвідношення:

$$P_l^{(n)} = P^{(n)} \forall l . \tag{3}$$

Якщо кожен член популяції має унікальну матрицю перехідних ймовірностей, необхідно знаходити матрицю переходу для кожного окремого індивіда у кожен момент часу, що робить оцінювання неможливим. Ланцюг Маркова може вважається стаціонарним, якщо для усіх n:

$$P_l^{(n)} = P_l . \tag{4}$$

Ця умова означає, що матриця переходу не залежить від часу. Якщо ланцюг Маркова нестаціонарний і необхідно оцінювати кожну матрицю $P(n), n = 1 \ldots T$, то прогнозування значно ускладнюється.

Оцінювання матриці переходу із спостережуваними переходами. Оцінювання перехідних ймовірностей є доволі простим процесом, якщо спостерігається послідовність станів для кожного індивіда, за яким ведеться спостереження, тобто спостерігаються індивідуальні переходи. Наприклад, якщо відомий кредитний рейтинг групи компаній на початку року, а також на кінець року, можемо оцінити ймовірність переходу з одного рейтингу до іншого [9]. Ймовірність того, що фірма в кінці року матиме конкретний кредитний рейтинг (скажімо, А), якщо відомий її рейтинг на початку року (скажімо, В), задається простим співвідношенням кількості фірм, що на початку року мали той же рейтинг (В), а в кінці року – А до кількості усіх фірм, що на початку року мали рейтинг В.

У загальному випадку позначимо через n_{ij} кількість індивідів, які були у стані i у період $t-1$ і перебувають у стані j у період t. Можемо оцінити ймовірність p_{ij} індивіда знаходитись у стані j у момент часу t, якщо відомо, що у момент часу $t-1$ він перебував у стані i:

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}} . \tag{5}$$

Таким чином, ймовірність переходу з будь-якого заданого стану i дорівнює відношенню індивідів, що були в стані i і перейшли в стан j до всіх індивідів, що перебували у стані i.

Приклад 1. Оцінювання матриці переходу у випадку відомої історії індивідуальних переходів. Маємо докладну інформацію щодо кожного кредиту, що міститься в портфелі роздрібних кредитів банку, накопичену протягом 19-ти місяців (з січня 2006 року по липень 2007). Розіб'ємо кредити на 16 груп в залежності від місяця, в якому кредит вперше потрапляє у портфель. Перша група – усі позики із вибірки за січень 2006, друга – усі позики з вибірки за лютий, яких не було у вибірці за січень і т. д. Для кожної групи номер *n* можемо сформувати 19–*n* матриць переходів. Наприклад, для кредитів, виданих у лютому 2006 року, перетікання залишків по балансу з кошиків у січні 2007 року у кошики в лютому 2007 року виглядатиме таким чином.

Таблиця 1

Матриця перетікання залишків по балансу за січень-лютий 2007 року

Часовий кошик (Січ-07)	**Сума**	**Лютий-07**						
		0	**1-30**	**31-60**	**61-90**	**91-120**	**120+**	**paidoff**
0	250 419	177 471	17 170	723	0	0	0	0
1-30	59 351	14 656	23 883	6 679	907	0	0	0
31-60	28 666	1 380	1 323	3 312	19 453	0	0	0
61-90	17 690	0	235	238	2 927	11 374	0	0
91-120	9 988	0	0	0	987	949	7 020	0
120+	191 746	0	0	66	0	0	188 428	0
Paidoff	0	0	0	0	0	0	0	0
Всього	557 860	193 508	42 612	11 018	24 273	12 323	195 448	0

На основі цієї матриці легко сформувати відповідну матрицю переходу.

Таблиця 2

Матриця перехідних ймовірностей за січень-лютий 2007 року

Часовий кошик (Січень-07)	Сума	Лютий-07						
		0	1-30	31-60	61-90	91-120	120+	Paidoff
0	44,89 %	70,87 %	6,86 %	0,29 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
1-30	10,64 %	24,69 %	40,24 %	11,25 %	1,53 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
31-60	5,14 %	4,82 %	4,62 %	11,55 %	67,86 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
61-90	3,17 %	0,00 %	1,33 %	1,35 %	16,54 %	64,29 %	0,00 %	0,00 %
91-120	1,79 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	9,89 %	9,50 %	70,28 %	0,00 %
120+	34,37 %	0,00 %	0,00 %	0,03 %	0,00 %	0,00 %	98,27 %	0,00 %
Paidoff	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
Всього	100,00 %	34,69 %	7,64 %	1,98 %	4,35 %	2,21 %	35,04 %	0,00 %

Отримавши множину матриць переходу для кожної групи позичальників, знаходимо усереднену матрицю переходу для кожної групи, а потім – для усього періоду.

Таблиця 3

Усереднена матриця перехідних ймовірностей за показником «Залишок по кредиту»

Початок періоду	Кінець періоду						
	0	1-30	31-60	61-90	91-120	120+	Paidoff
0	92,05 %	7,74 %	0,22 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
1-30	27,80 %	33,08 %	38,19 %	0,93 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
31-60	7,96 %	11,34 %	19,50 %	58,68 %	2,53 %	0,00 %	0,00 %
61-90	2,15 %	2,50 %	9,36 %	13,67 %	70,27 %	2,05 %	0,00 %
91-120	0,75 %	0,75 %	1,91 %	7,77 %	11,53 %	77,30 %	0,00 %
120+	0,16 %	0,39 %	0,14 %	7,71 %	7,90 %	83,70 %	0,00 %
paidoff	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,30 %	0,02 %	0,00 %	100,00 %

Такий підхід до оцінювання матриць перехідних ймовірностей є простим і дає консистентну та найбільш ймовірну, але зміщену оцінку, зміщення якої прямує до нуля із зростанням розміру вибірки [10].

ОЦІНЮВАННЯ МАТРИЦІ ПЕРЕХОДУ ІЗ НЕСПОСТЕРЕЖУВАНИМИ ПЕРЕХОДАМИ

Однак, досить часто найкращі дані, якими можна оперувати – це відношення, що показує відсоток усіх спостережуваних об'єктів у окремому часовому кошику в конкретний момент часу. Отримати найбільш ймовірну оцінку за описаним вище методом неможливо. Проте якщо часові ряди спостережень достатньо довгі, то можна оцінити матрицю перехідних ймовірностей на основі сукупних даних з використанням методів квадратичного програмування. Дослідження показали, що використання узагальненого методу найменших квадратів дозволяє отримати консистентну і ефективну оцінку матриці перехідних ймовірностей [9].

Припустимо, що замість спостереження реальної кількості переходів між різними кредитними станами, можемо спостерігати лише агреговані пропорції даних $y_j(t)$ і $y_j(t-1)$, що показують пропорції спостережень із якістю кредитів i та j, відповідно. Можемо записати стохастичне співвідношення між реальною і оціненою частотою $y_j(t)$:

$$y_j(t) = \sum_i y_i(t-1) p_{ij} + u_j(t) . \quad (6)$$

Ми можемо записати це рівняння у матричній формі наступним чином:

$$y = Xp + u , \quad (7)$$

де

$$y = [y_1\ y_2 \dots y_{R-1}]' =$$
$$= [y_1(1), y_1(2) \dots y_1(T)\ \ y_2(1), y_2(2), \dots y_2(T) \dots y_{R-1}(1), y_{R-1}(2),\ \dots y_{R-1}(T)]',$$
$$X_j = \begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \dots & y_R(0) \\ y_1(1) & y_2(1) & \dots & y_R(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(T-1) & y_2(T-1) & \dots & y_R(T-11) \end{bmatrix} j = 1,2 \dots R-1, \quad (8)$$

таким чином, що:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X_{R-1} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

і

$$p = [p_1\ p_2\ \dots p_{R-1}]'$$
$$p = [p_{11}, p_{21}, \dots p_{R1}\ p_{12}, p_{22}, \dots p_{R2} \dots p_{1R-1}, p_{2R-1}, \dots p_{RR-1}]', \quad (10)$$
$$u = [u_1\ u_2 \dots u_{R-1}]'$$
$$= [u_1(1), u_1(2), \dots u_1(T)\ \ u_2(1), u_2(2), \dots u_2(T) \dots u_{R-1}(1), u_{R-1}(2), \dots u_{R-1}(T)]'.$$

Лі, Джадж і Зелнер [11] запропонували мінімізувати суму квадратичних похибок у рівнянні (7), використовуючи метод найменших квадратів (МНК) з лінійними обмеженнями. Вони зауважили, що МНК є еквівалентним для розв'язання такої задачі квадратичного програмування:

$$\begin{aligned} &\min_p u'u = (y - Xp)'(y - Xp) \\ &\sum_{j=1}^{R-1} p_{ij} \le 1 \\ &\sum_{j=1}^{R-1} p_{Rj} = 0 \\ &p_{ij} \ge 0\ \forall i = 1, \dots R\ \forall j = 1, \dots R-1 \end{aligned} \quad . \quad (11)$$

У матричній формі це можна записати так:

$$\begin{aligned} &\min_p u'u = (y - Xp)'(y - Xp) \\ &Gp \le \eta \\ &p \ge 0, \\ &\text{де } G_{R \times R(R-1)} = [I_1\ I_2 \dots I_{R-1}] \\ &\eta_R = [11 \dots 10]' \end{aligned} \quad . \quad (12)$$

У даному формулюванні матриця лінійних обмежень G є матрицею розмірності $R \times R(R-1)$, що складається із ($R-1$) одиничної матриці розмірності $R \times R$, а η – вектор-стовпчик розмірності $R \times 1$, що складається із одиниць і нуля в останньому рядку, оскільки останній стан є поглинаючим. Необхідно знайти $R \times R$ невідомих, розв'язавши систему із $R \times T$ рівнянь. Якщо є $T \ge R$ спостережень, то можна знайти значення P. Останній стовпчик матриці переходу обчислюється за рівнянням:

$$P_{iR} = 1 - \sum_{j=1}^{R-1} p_{ij} \,. \qquad (13)$$

Келтон [12] продемонстрував консистентність оцінених ймовірностей переходу, отриманих як розв'язок рівняння (11). Келтон та Келтон [13] приводять статистичний тест, який може бути використаний для перевірки стаціонарності отриманих перехідних ймовірностей. Стандартна похибка може бути обчислена за стандартним МНК:

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{s^2 (X' \Omega X)^{-1}},$$
$$\text{де } s^2 = \frac{(y - Xp)' \Omega^{-1} (y - Xp)}{T - (R-1)(R-1)} \cdot \qquad (14)$$

Приклад 2. Оцінювання матриці переходу за умови невідомої історії індивідуальних переходів. Скористаємось даними про портфель роздрібних кредитів банку, описаними у Прикладі 1. Сформуємо вектори агрегованих пропорцій даних за показником «Залишок по кредиту» (частина векторів показана в табл. 4).

Таблиця 4

Агреговані пропорції даних для показника «Залишок по кредиту»

Міс./ кошик	0		1-30		31-60		61-90		91-120		120+		Paidoff		Всього
	Сума	Проп.	Сума	Проп.	Сума	Проп.	Сума	Проп.	Сума	Проп.	Сума	Проп.	Сума	Проп.	Сума
Січ-06	2 768	0,96	107	0,04	1	0,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00	20	0,01	2 896
Лют-06	3 725	0,94	162	0,04	21	0,01	0	0,00	0	0,00	0	0,00	60	0,02	3 968
Бер-06	5 233	0,91	363	0,06	56	0,01	7	0,00	0	0,00	0	0,00	123	0,02	5 782
Кві-06	8 883	0,90	559	0,06	118	0,01	39	0,00	6	0,00	0	0,00	271	0,03	9 876
Тра-06	11 351	0,82	1 692	0,12	212	0,02	69	0,00	33	0,00	6	0,00	454	0,03	13 817
Чер-06	15 858	0,85	1 243	0,07	531	0,03	122	0,01	48	0,00	30	0,00	755	0,04	18 587
Лип-07	31 283	0,42	3 574	0,05	1 266	0,02	1 284	0,02	930	0,01	7 330	0,10	28 478	0,38	74 145

Скориставшись рівняннями (5.6)-(5.2), сформуємо вхідні вектори X та Y. Після застосування МНК з обмеженнями отримаємо матрицю перехідних ймовірностей для усієї популяції позичальників для показника «Залишок по кредиту» (табл. 5).

Таблиця 5

Матриця перехідних ймовірностей за показником «Залишок по кредиту», отримана за методом МНК з обмеженнями

Початок періоду	Кінець періоду						
	0	1-30	31-60	61-90	91-120	120+	Paidoff
0	92,72 %	6,63 %	0,22 %	0,10 %	0,00 %	0,33 %	0,00 %
1-30	53,25 %	22,18 %	17,21 %	0,00 %	0,00 %	7,35 %	0,00 %
31-60	0,00 %	0,00 %	57,86 %	42,14 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
61-90	0,00 %	24,67 %	0,36 %	27,77 %	47,20 %	0,00 %	0,00 %
91-120	0,00 %	0,00 %	0,00 %	18,24 %	42,46 %	39,31 %	0,00 %
120+	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	100,00 %	0,00 %
paidoff	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	100,00 %

Порівняємо матрицю перехідних ймовірностей, оцінену за допомогою МНК з обмеженнями та усереднену матрицю перехідних ймовірностей, отриману за відомих індивідуальних переходів (табл. 3). Спостерігається відхилення у бік збільшення модуля значень на головній діагоналі (що відповідає за ймовірність залишитись у тому ж часовому кошику) і зменшення модуля значень на побічних діагоналях (що відповідають за ймовірність міграції у один із сусідніх кошиків), якщо оцінювання виконується з використанням лише агрегованих пропорцій даних. При зростанні розміру вихідної вибірки точність зростає.

Оцінювання за допомогою методу МНК з обмеженнями дозволяє отримати квадрат норми векторів різниць (КНВР) кожної матриці в залежності від показника динаміки міграції позичальника. У табл. 6 порівнюються значення трьох КНВР, отриманих при використанні різних показників динаміки міграції позичальників.

Таблиця 6

Значення КНВР, отриманих при використанні різних показників динаміки міграції позичальників

	Сума	**Залишок по кредиту**	**Кількість людей**
Стандартний підхід	0,33	0,31	0,34

Таким чином, використання показника «Залишок по кредиту» дає найменшу похибку, що є ще одним аргументом на користь використання його при вирішенні практичних задач банківської діяльності.

УМОВИ СТАЦІОНАРНОСТІ ТА ОДНОРІДНОСТІ

Для того, щоб перевірити стаціонарність і однорідність ретрополяцій, використовуються агреговані пропорції, підраховані за допомогою ретрополяції, та тест хі-квадрат. Якщо отримані за допомогою ретрополяції пропорції не виявляють мінливих коливань, то можна зробити висновок, що вони стійкі. Обидва підходи до перевірки однорідності використовують оцінену матрицю перехідних ймовірностей: значення ретрополяції та теоретичний розподіл перехідних ймовірностей для хі-квадрат тесту. В основі лежить припущення про те, що зміни процесу керуються оціненою матрицею перехідних ймовірностей.

Значення ретрополяції, або прогноз пропорції окремого часового кошика на один період оцінюються за допомогою матричної операції:

$$X(t+1) = X(t)P, \qquad (15)$$

де $X(t+1)$ та $X(t)$ вектори пропорцій, отримані ретрополяцією, і реальні пропорції для всіх минулих значень t, відповідно.

Приклад 3. Побудова ретропольованих векторів пропорцій. У результаті застосування співвідношення (15), отримана наступна таблиця (табл. 7) значень реальних агрегованих пропорцій даних та ретропольованих пропорцій для показника «Кількість кредитів». Відповідно до даних таблиці 3, спостерігаємо тренд, що знижується дял кошика «0», тренди, що зростають для кошиків «61-90», «91-120», «120+», «paidoff». Щодо кошиків, «1-30» та «31-60», то тут спостерігається плавне зростання, а потім – спадання ретропольованих пропорцій.

Таблиця 7

Реальні та ретропольовані значення агрегованих пропорцій даних для показника «Кількість людей»

Місяць/ Кошик	**0**		**1-30**		**31-60**		**61-90**		**91-120**		**120+**		**paidoff**	
	Реал.	Ретр.	Реал.	Ретр.	Реал.	Ретр.	Реал.	Ретр.	Реал.	Ретр.	Реал.	Ретр.	Реал.	Ретр.
Січ-06	0,96	–	0,04	–	0,00	–	0,00	–	0,00	–	0,00	–	0,01	–
Лют-06	0,94	0,90	0,04	0,06	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,03
Бер-06	0,91	0,88	0,06	0,07	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,04
Кві-06	0,90	0,86	0,06	0,07	0,01	0,02	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,04
Тра-06	0,82	0,86	0,12	0,07	0,02	0,02	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,05
Чер-06	0,85	0,82	0,07	0,08	0,03	0,03	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,04	0,05
Лип-06	0,79	0,82	0,09	0,07	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,06

На рис. 1-4 зображено графіки реальних та ретропольованих агрегованих пропорцій для вибраних часових кошиків при використанні показника «Кількість людей».

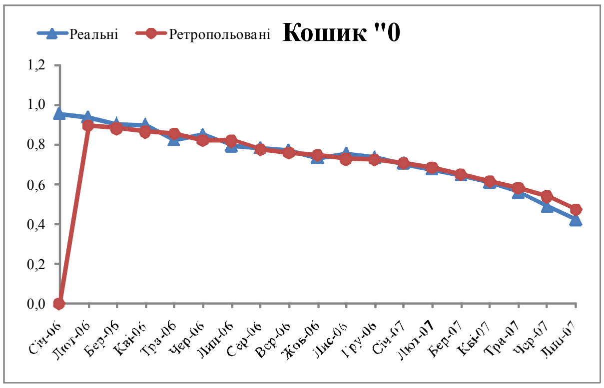

Рис. 1. Часовий кошик «0»: реальні та ретропольовані пропорції

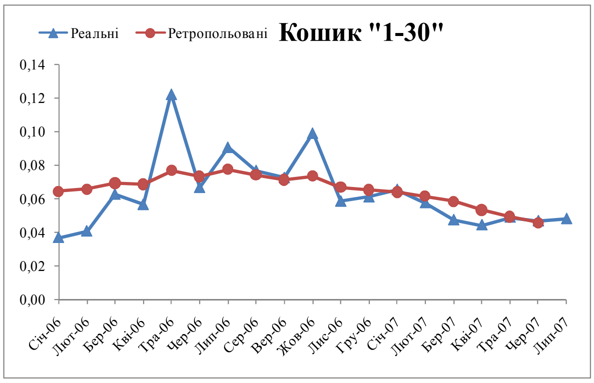

Рис. 2. Часовий кошик «1-30»: реальні та ретропольовані пропорції

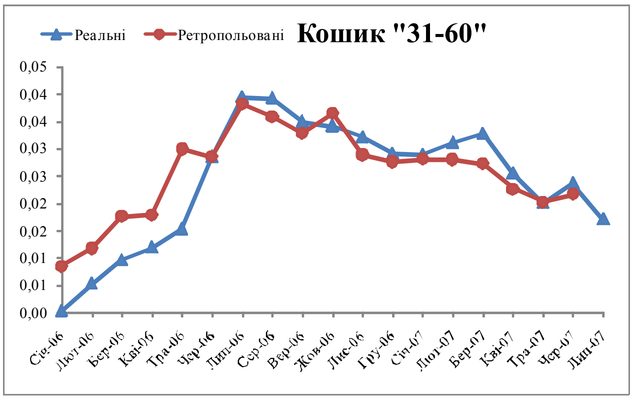

Рис. 3. Часовий кошик «31-60»: реальні та ретропольовані пропорції

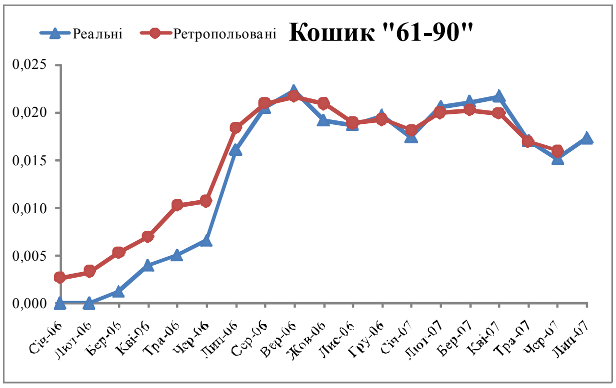

Рис. 4. Часовий кошик «61-90»: реальні та ретропольовані пропорції

Обчислення статистики Хі-квадрат для агрегованих пропорцій даних на рівні значущості 5% показало, що матриця перехідних ймовірностей, отримана із даних щодо розподілу позичальників по часових кошиках, описує теоретичну ймовірність міграції позичальників.

Прогнозування часової структури позичальників. При застосуванні ланцюгів Маркова для моделювання агрегованих пропорцій даних, основною перевагою є можливість прогнозування майбутніх пропорцій даних. Точність прогнозу суттєво залежить від доступності даних. Прогнозування агрегованих пропорцій усіх можливих станів позичальників для конкретного місяця грунтується на співвідношенні:

$$X(T+\tau) = X(T)P^{\tau},$$

де $X(T+\tau)$ і $X(T)$ є, відповідно,векторами прогнозу пропорцій даних на період τ вперед і вектором пропорцій для періоду T , відповідно.

Приклад 4. Прогнозування часової структури станів позичальників. Використовуючи усереднену матрицю перехідних ймовірностей, отриману частотним методом для показника «Кількість людей», спрогнозуємо значення агрегованих пропорцій на 6 місяців уперед. Результати прогнозування наведено на табл. 8.

Таблиця 8

Результати прогнозування часової структури станів позичальників на 6 місяців вперед

Місяць/ Кошик	**0**	**1-30**	**31-60**	**61-90**	**91-120**	**120+**	**paidoff**
Сер-07	0,41	0,04	0,02	0,02	0,01	0,11	0,39
Вер-07	0,40	0,04	0,02	0,02	0,01	0,11	0,40
Жов-07	0,39	0,04	0,02	0,01	0,01	0,12	0,41
Лис-07	0,38	0,04	0,02	0,01	0,01	0,12	0,42
Гру-07	0,37	0,03	0,02	0,01	0,01	0,13	0,43
Січ-08	0,36	0,03	0,02	0,01	0,01	0,13	0,44

Прогнозоване значення агрегованих пропорцій для часового кошика «0» у серпні 2007 р. зменшиться до 0,414, а у січні 2008р. становитиме 0,356. Значення агрегованих пропорцій для кошиків «1-30», «31-60», «61-90», «91-120» також показує тенденцію до зменшення. Пропорцій для кошиків «120+» та «paidoff», навпаки, зростають. Отримані значення агрегованих пропорцій індукують середні пропорції різних часових кошиків. На практиці прогнозовані значення повинні оновлюватись у міру надходження нових даних. Рекомендується робити прогноз на наступний місяць одразу ж, коли з'являються результати попереднього. У майбутньому це дозволяє значно покращити точність прогнозу.

Якщо виконано оцінювання матриць переходу для кожної групи позичальників із місяця до місяця (тобто спостерігались індивідуальні переходи), то можна застосувати ефективніший підхід до прогнозування часової структури станів – оцінювати ймовірності переходу для кожної групи позичальників окремо. Диференціація за місяцем видачі кредиту дозволить досліджувати окремі популяції позичальників, враховувати зовнішні та макроекономічні фактори, що впливали на конкретну групу позичальників.

ВИСНОВКИ

Ланцюги Маркова – популярний сучасний апарат, що дозволяє прогнозувати часову структуру станів позичальників у випадку наявності докладної кредитної історії і у випадку, коли можна скористатися лише узагальненими пропорціями даних. Для прогнозування часової структури станів позичальників застосовано підхід, в основі якого лежить стохастична модель ланцюгів Маркова. Кожний із відповідних «часових кошиків» вважається станом скінченного дискретного ланцюга Маркова.

Для застосування ланцюгів Маркова необхідною умовою є виконання гіпотез стосовно однорідності та стаціонарності популяції позичальників. Головним моментом при використанні таких моделей є оцінювання матриці перехідних ймовірностей. Якщо історія індивідуальних переходів відома, то підраховують відносну частоту переходів; якщо не відома, то розв'язують задачу мінімізації середньоквадратичних похибок відповідного стохастичного співвідношення. Для оцінювання матриці перехідних ймовірностей у випадку невідомої історії індивідуальних переходів використовується МНК з лінійними обмеженнями у вигляді нерівностей. Після отримання оціненої матриці перехідних ймовірностей можна прогнозувати вектор станів позичальників на n звітних періодів.

Наведено приклади оцінювання перехідних ймовірностей для вибраних підходів. Для моделювання використано дані про портфель роздрібних кредитів за 18 місяців. Отримано підтвердження того, що використання показника «Залишок по кредиту» дає найменшу похибку при оцінюванні. Ретрополяція агрегованих пропорцій даних та використання тесту Хі-квадрат показало, що популяція позичальників була стаціонарною та однорідною. Наведено приклад прогнозування часової структури станів на 6 місяців уперед з використанням оцінених матриць переходу.

В подальших дослідженнях необхідно порівняти ефективність базового підходу до оцінювання МП з ітеративним підходом, що використовує матриці коваріації у випадку, коли індивідуальні переходи невідомі. Перед практичним використанням доцільно перевірити роботу методики на даних, зібраних протягом декількох років, а також використати тестову вибірку позичальників.

ЛІТЕРАТУРА

1. Положення про порядок формування та використання резерву для відшкодування можливих втрат за кредитними операціями банків (зі змінами та доповненнями) / Затверджено постановою Правління Національного банку України від 6 липня 2000р. № 279. – 24 с.
2. Международная конвергенция измерения капитала и стандартов капитала: новые подходы. – Базельський комитет по банковскому надзору / Банк международных расчетов, 2004. – 266 с.
3. Thyagarajan V., Saiful Mohamed. Retail Banking Loan Portfolio Equlibrium Mix: A Markov Chain Model Analysis // American Journal of Applied Sciences. – 2005. – 2 (1). – P. 410-419.
4. Jensen P.A., Bard J.F. Operations Research Models and Methods. – New York: John Wiley & Sons Incorporated, 2002. – 696 p.
5. Betancourt L. Using Markov Chains to Estimate Losses from a Portfolio of Mortgages // Review of Quantitative Finance and Accounting. – 1999. – 12:3. – P. 303-317.
6. EBF/ISDA Retail Portfolio Study, 2000 – 25 p. – www.isda.org.
7. Stokes J.R., Brent A. G. Mortgage Delinquency Migration: An Application of Maximum Entropy Econometrics // Journal of Real Estate Portfolio Management. – 2007. – April 1. – P. 153-160.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – Москва: «Мир», 1967. – 498 с.
9. Jones M.T. Estimating Markov Transition Matrices Using Proportions Data: An Application to Credit Risk / IMF Working Paper. – WP/05/219. – 2005. – 27 p. – http://www.ideas.repec.org.
10. Anderson T.W., Goodman L. A. Statistical Inference About Markov Chains // Annals of Mathematical Statistics. – 1957. – V. 28. – P. 89-110.
11. Lee T. C., Judge G. G. and Zellner A. Estimating the Parameters of the Markov Probability Model From Aggregate Time Series Data. – Amsterdam: North Holland, 1970. – 234 p.
12. Kelton W. D., Kelton C.M. Advertising and Intra-industry Brand. Shift in the U.S. Brewing Industry // Journal of Industrial Economics. – 1982. – Vol. 30, No. 3. – P. 293-303.
13. Kelton W. D. , Kelton C.M. Hypothesis Tests for Markov Process Models Estimated from Aggregate Frequency Data // Journal of the American Statistical Association. – 1984. – Vol. 79, No. 388. – P. 922-28.

 Стаття надійшла до редколегії 22.03.10 р.