

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ МЕРЕЖ ПОТОКІВ

Розроблені теоретичні основи аналізу мереж потоків на базі схем заміщення та двох взаємопов'язаних і взаємно суперечливих систем законів для визначення розподілу потоків α та β по дугах мережі. Запропоновані методи визначення розподілу максимального потоку по дугах мережі та визначення мінімальних відстаней.

Ключові слова: Закон, максимальний потік мережі, метод.

Разработаны теоретические основы анализа сетей с потоками на базе схем замещения и двух взаимно противоречивых и связанных между собой систем законов для определения распределения потоков α и β по дугам сети. Предложены методы определения распределения максимального потока по дугам сети и расчета минимальных расстояний.

Ключевые слова: Закон, максимальный поток сети, метод.

Developed the theoretical principles for analysis of networks with flows based on equivalent circuits and two interconnected and mutually contradictory sets of laws to determine the distribution of flows α and β along the arcs of the network. Proposed methods to calculate the maximum flow's distribution along the arcs of network and of the minimum distance.

Key words: Law, maximum flow of network, method.

Загальний стан аналізу мереж потоків

Під потоком мережі розуміємо потоки: інформаційні, виробничі, фінансові, електричних струмів, потужностей тощо. До мереж з потоками відносяться задачі: транспортна, призначення, мінімального шляху, комівояжера (при введенні додаткової першої вершини для повернення в початковий пункт). На жаль, в Україні занижений рівень аналізу потоків: в усіх підручниках описується метод поміток Форда-Фалкерсона (1956) 60-річної давнини [1-5], хоча після цього був отриманий ряд удосконалених алгоритмів – Дініца (1970); Едмонса-Карпа (1970,1972); Карзанова (1974); Малхотри-Кумара-Махешварі (1978); Галіла-Наамада (1978); Слейгора-Тарьяна (1980); Голдберга-Тарьяна (1986); СМ (автори: Cheriyan, Hagerup, Mehlhorn; 1989); Кінга (1992); Голдберга-Рао (1997) [1]. Серед них метод Голдберга і Рао є найбільш сучасним [1, 5], але він є й досить складним.

Для потоків мережі доведено ряд теорем [1]: величина максимального потоку дорівнює пропускній здатності мінімального розрізу (теорема Форда-Фалкерсона); потік через будь-який розріз дорівнює сумі потоків від джерела; сума потоків із джерела дорівнює сумі потоків витоку та ін. Але в цілому недостатньо розроблені теоретичні основи мереж потоків. Теорема Форда-Фалкерсона має мале практичне значення, бо не дає інформацію про потоки по дугах [3, с. 169]. До цього потрібно додати, що **не можна закони фізики замінювати теоремами математики**. Наведені теореми доводять фізичний «принцип збереження потоку в трубі», якщо розглядати мережу як «трубу» зі змінною площиною розрізу та найбільш завантаженими дугами мінімального розрізу та недовантаженими дугами зовні мінімального розрізу. Аналогічно, з першого закону Кірхгофа для струмів у вузлах (під вузлом розуміється також контур чи замкнена поверхня, які охоплюють кілька вершин) впливає поняття незмінності потоків розрізів мережі та вимога не перевантажувати мінімальний розріз. Метою даного аналізу є розробка теоретичних основ мереж потоків.

Схема заміщення мережі потоків

Розглянемо мережу рис. 1 з максимальним потоком « $Q_m = 19$ », який є однаковим для джерела «1» та витоку «6». Цілком завантажені дуги виділені жирними лініями. Мінімальний розріз позначений пунктирною лінією.

Потоки q_{ij} дуг (i, j) у кількості m є змінними, які потрібно визначити; вони мають **позитивний** напрямок від меншого до більшого номера вершини та **негативний** зворотний напрямок. **Збільшуючий ланцюг** між джерелом та витоком створюється послідовним з'єднанням кількох недовантажених дуг. **Вершиною** зветься місце з'єднання трьох чи більшої кількості дуг. **Контуром** зветься замкнений шлях, що проходить по кількох дугах [1]. На рис. 1 для пропускних здатностей S_{ij} після знаку рівності показана сума потоків збільшуючих ланцюгів (ЗЛ). Верхній індекс потоків вказує порядковий номер ланцюга.

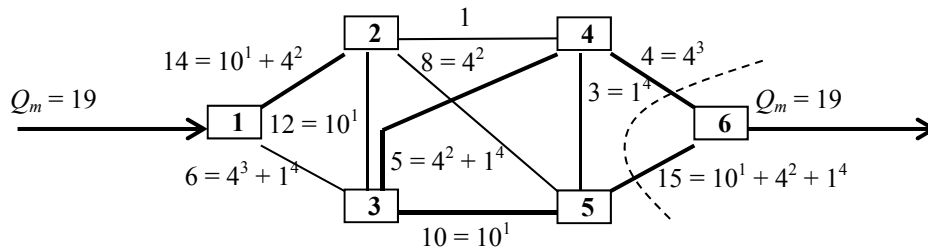


Рис. 1. Мережа з максимальним потоком.

Мережу рис. 1 можна замінити схемою заміщення рис. 2 з однаковою топологією при введенні в кожному дугу *активного опору*

$$R_{ij} = 1/S_{ij}, \tag{1}$$

з падінням тиску потоку на активному опорі (тут u_i, u_j – тиски вершин i та j)

$$u_{ij} = u_i - u_j = q_{ij} R_{ij} = q_{ij} / S_{ij}, \tag{2}$$

яке відображує відносно завантаження дуги (бажано, щоб $u_{ij} = q_{ij} / S_{ij} \leq 1$).

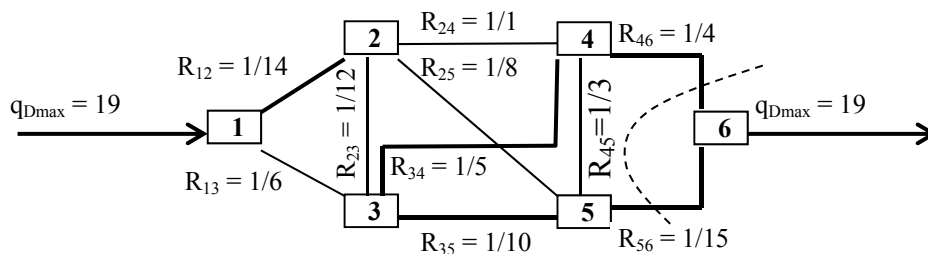


Рис. 2. Схема заміщення мережі потоків.

Закони розподілу потоків α («альфа») по дугах мережі

Для визначення розподілу потоків α («альфа») схеми заміщення мережі рис. 2 при заданому потоці мережі q_D можна застосувати перефразовані закони Кірхгофа для електричних мереж, якщо під поняттям «струму» розуміти величину потоку, а під «різницею потенціалів» – падіння «тиску» потоку на опорах дуги. Потік дуги q_{aij} розраховується по схемі заміщення і може бути меншим або більшим за пропускну здатність S_{ij} . Поняття «замкнений контур» та «замкнена гілка» для мереж зі змінною структурою у математичних записях законів відображують за допомогою перемикаючих функцій з відповідними методами аналізу [7].

Закони для визначення потоків α («альфа») в дугах мережі мають вигляд [7]:

1. Для з'єднаних у вершині простих та складних дуг алгебраїчна сума добутків потоків дуг α (чи похідних від потоків по часу) на їх перемикаючі функції дорівнює нулю (ці рівняння складаються для $(n - 1)$ вершин)

$$\sum f_{ij} q_{aij} = 0, \quad \sum f_{ij} dq_{aij} / dt = 0, \tag{3}$$

де f_{ij} – перемикаюча функція, яка приймає значення 1, якщо дуга вмикнена, та 0, якщо вимкнена [7]; $i = 1, n$ – порядковий номер вершини; $j = 1, n$ – порядкові номери сусідніх вершин при $i \neq j$; n – кількість вершин; q_{aij} – потік α між вершинами; t – час.

2. Алгебраїчна сума падінь тисків потоків α («альфа») вздовж замкнутого простого чи складного контура, помножена на перемикаючу функцію цього контуру, дорівнює нулю (згідно цьому закону складаються $[m - (n - 1)]$ рівнянь)

$$f_K \sum u_{aij} = 0, \tag{4}$$

де f_K – перемикаюча функція контура, яка приймає значення 1, якщо контур замкнений та 0, якщо розімкнений [7].

Ці закони дозволяють аналізувати *новий клас мереж*, особливості якого ще потрібно досліджувати. Цей клас має переваги у вигляді: застосування до мереж потоків методів теоретичних основ електротехніки (метода потенціалів тисків вершин, контурних потоків, накладання та ін.); можливості аналізу процесів у просторі та часі, розв'язку задач дослідження операцій (ДО), логістики та нечітких систем [8]; керування вмикненням та вимкненням окремих складних дуг та контурів за допомогою перемикаючих функцій з використанням методів [7] (для спрощення аналізу нижче розглядаються мережі незмінної структури); моделювання дискретності використання потоків введенням складів з керованим накопиченням – випорожненням у вигляді джерел потоків в вершинах дуги; застосування окремих

керованих у часі джерел потоків та тиску, аналогів електричних індуктивностей, ємностей, зворотних зв'язків тощо. В цьому випадку закони (3) та (4) набувають вигляду

$$\sum f_{ij} q_{cij} = \sum q_{Dd}(t), \quad \sum f_{ij} \frac{dq_{cij}}{dt} = \sum \frac{dq_{Dd}(t)}{dt}, \quad f_k \sum \left[e_{ij}(t) + R_{ij} q_{cij} + L_{ij} \frac{dq_{cij}}{dt} + \frac{1}{C_{ij}} \int q_{cij} dt \right] = 0$$

з керованими у часі за окремими законами значеннями потоків джерел, накопичення ємностей та їх випорожнення $q_{Dd}(t)$; тиску джерел $e_{ij}(t)$; опору R_{ij} ; індуктивності L_{ij} та ємності C_{ij} . Ємності накопичення-випорожнення можуть розглядатись або як окремі вершини з потоками джерел $q_{Dd}(t)$, або відображатись на вершинах мережі.

Якщо в транспортній задачі для m постачальників та n користувачів застосувати метод потенціалів з електротехніки зі змінними у вигляді **потенціалів тисків вершин** для m постачальників ($\varphi_1 \dots \varphi_m$) та $(n - 1)$ користувачів ($\varphi_{m+1} \dots \varphi_{m+n-1}$) і опорами R_{ij} , рівними тарифам перевезення, то кількість змінних можна скоротити з $(m \cdot n)$ до $(m + n - 1)$. Матричне рівняння $Y_\alpha F_\alpha = Q_\alpha$ (де Y_α – квадратна матриця провідимостей; F_α, Q_α – вектори потенціалів тисків та потоків) дозволяє визначити потенціали тисків вершин F_α , а по них – потоки α . Якщо для дуг, які не використовуються, прийняти провідимість рівною нулю, то отримуємо математичну модель оптимального розв'язку з β – потоками $Y_\beta F_\beta = Q_\beta$. Матричні рівняння $Y_\alpha F_\alpha = Q_\alpha$ та $Y_\beta F_\beta = Q_\beta$ отримані для двох взаємно зв'язаних, але різних мереж і тому є взаємно суперечливими.

І навпаки, якщо відомі пропускні здатності дуг S_{ij} та максимальний потік для мережі, то **задачу потоків можна перетворити на транспортну задачу з транзитом**, розв'язком якої є **початковий розподіл потоків по комітках матриці транспортної задачі** (без наступного застосування функції мети та метода потенціалів з курсу «Дослідження операцій») при умовах: матриця транспортної задачі є квадратною $(N \cdot N)$, де N – кількість вершин мережі потоків; маємо одного постачальника та одного користувача; кількість заповнених постачанням комірок не обмежується; заборонені комірки не використовуються; діагональні елементи використовуються обов'язково у вигляді від'ємного чи нульового транзиту; замість тарифів-опорів за одиницю ваги $R_{ij} = 1/S_{ij}$ в комітках вказується пропускна здатність $S_{ij} = 1/R_{ij}$; потік комірки $q_{\beta ij}$ не повинен перевищувати пропускну здатність S_{ij} ; абсолютне значення транзиту діагонального елемента не повинне перевищувати суму пропускних здатностей комірок відповідного рядка.

Закони розподілу потоків β («бета») по дугах мережі

При відомому **максимальному потоці** потоки α перевантажених дуг мережі, розраховані згідно законів (3) та (4), в діалоговому режимі замінюються на «обмежені» потоки β у вигляді їх рівності пропускній здатності. При цьому вилучається рівняння відповідного контуру, в який входить перевантажена дуга. Далі виконується новий розрахунок потоків для підтвердження відсутності перевантаження по інших дугах. Напрямок перенесення частки потоків перевантажених дуг може визначатись по завантаженню обхідних шляхів для заданої ділянки.

Закони розподілу «обмежених» потоків β по дугах мережі мають вигляд:

1. Алгебраїчна сума потоків β в вершинах дорівнює нулю. Тобто закон (3) є однаковим для потоків дуг α та β .

2. Для контурів з перевантаженням потоків дуг α закон (4) замінюється рядом законів для завантажених до «бажаної» величини потоків β . Наприклад, використовується закон:

Для цілком завантажених до пропускної здатності дуг (i, j) алгебраїчна сума падінь тисків потоків β вздовж **не замкненого** реального чи умовного контуру дорівнює сумі відповідних знакозмінних одиниць завантажених дуг

$$\sum [\pm q_{\beta ij} / S_{ij}] = \sum \pm 1_{ij}, \quad (5)$$

де знак одиниці « $\pm 1_{ij}$ » залежить від напрямку обходу реального чи умовного не замкненого «контуру». Не завантажені до пропускної здатності дуги контура у рівнянні (5) не ураховуються.

Якщо виразів на основі закону (5) не вистачає до кількості $[m - (n - 1)]$, то вони можуть доповнюватись рівняннями на основі законів:

– рівняння для контурів замінюються значеннями потоків β нормально завантажених дуг, які відмежовуються від мережі недовантаженими до пропускної здатності дугами

$$q_{\beta ij} = S_{ij}; \quad (6)$$

– рівняння для контурів замінюються рівняннями зі значенням потоків β оптимальним потокам недовантажених дуг ($q_{ij}^{opt} < S_{ij}$)

$$q_{\beta ij} = q_{ij}^{opt}. \quad (7)$$

Закони (5)-(7) можуть бути замінені на закон: **«Алгебраїчна сума падінь тисків потоків β вздовж замкненого контура дорівнює розрахованому їх значенню згідно оптимального розподілу по дугах при максимальному потоці мережі»**.

$$\sum \pm q_{\beta ij} / S_{ij} = \sum \pm q_{ij}^{opt} / S_{ij}, \quad (8)$$

де $\pm q_{ij}^{opt}$ – значення відповідних оптимальних потоків по відомому оптимальному розподілу максимального потоку мережі з урахуванням напрямку обходу контура (знаки перед складовими ліворуч та праворуч від знаку рівняння співпадають).

Для оптимально завантаженої максимальним потоком мережі ці закони дозволяють скласти математичну модель і дають більш чітке уявлення про процеси, які в ній відбуваються. З отриманих законів для мережі з n вершинами та t дугами випливають такі **властивості**:

1. Із кількості t змінних **коригованими** є $[t - (n - 1)]$ **змінних**, які можна визначати з накладанням додаткових логічних обмежень. Для мережі заданої топології інші $(n - 1)$ змінних **не коригуються**.

2. На основі законів (3), (5)-(8) для будь-якого оптимального розподілу максимального потоку по дугах мережі можуть бути отримані математичні моделі різного вигляду.

3. Якщо застосувати метод потенціалів тисків вершин, то кількість змінних (тисків вершин $\varphi_i, i = \overline{1, n}$) зменшується і дорівнює $(n - 1)$, бо $\varphi_n = 0$. Після розрахунку тисків вершин для потоків α , коригування потоків α до значень β вимагає наявності в вершині засобів трансформації тисків для кожної окремої дуги.

Взаємна суперечливість і особливості законів потоків α та β

Взаємна суперечливість двох систем законів полягає у наступному:

1. Для застосування законів потоків β потрібно знати оптимальний розподіл максимального потоку по дугах мережі, а для законів потоків α – ні.

2. За двома системами законів потоків аналізуються дві пов'язані, але взаємно не сумісні та суперечливі схеми заміщення і відповідні їм математичні моделі, які до того ж для електричних мереж не співпадають з аналізом згідно законів Кірхгофа. Тобто для електричних мереж треба використовувати три системи законів, які умовно мають однакову топологію та однакові закони для суми потоків вершин.

3. Взаємна суперечливість законів потоків відображується в одноваріантності та можливої багатоваріантності (комбінаторності) рішення, прикладом чого є задача комівояжера, особливо якщо не урахувати вимогу мінімізації сумарної довжини шляху.

4. Для обох систем законів є різними фізичні тлумачення. Закон (4) при визначенні потоків α є твердженням, що в замкненому контурі відсутні джерела «тиску», які б створювали окремий потік одного напрямку вздовж всього контуру. А в законах для «обмежених» потоків β це твердження для замкненого контура не виконується.

5. Для законів потоків α тиск вершини стосовно кожної його дуги є однаковим.

6. Для законів «обмежених» потоків β тиск вершини стосовно кожної дуги є різним, тобто вимагається трансформація тисків при незмінних значеннях опорів дуг мережі.

В даному випадку розглядаються мережі з ідеальними потоками та ідеалізованими логічно обґрунтованими «бажаними» опорами, які у загальному випадку навіть не є пропорційними їх фізичним аналогам. Для таких мереж під «**тиском**» можна розуміти уявні умовні різнобарвні поняття для різнокольорових потоків: для потоків електричного постійного струму – це «напруга»; для потоків рідини – «фізичний тиск» тощо.

Діалоговий метод завантаження дуг потоками β на основі визначених потоків α мережі

Згідно закону (3) для рис. 2 складаємо систему рівнянь для потоків α вершин при відомому максимальному потоці $Q_m = 19$:

$$q_{12} + q_{13} = 19 \quad (\text{вершина «1»}); \quad (9)$$

$$-q_{12} + q_{23} + q_{24} + q_{25} = 0 \quad (\text{вершина «2»}); \quad (10)$$

$$-q_{13} - q_{23} + q_{34} + q_{35} = 0 \quad (\text{вершина «3»}); \quad (11)$$

$$-q_{24} - q_{34} + q_{45} + q_{46} = 0 \quad (\text{вершина «4»}); \quad (12)$$

$$-q_{25} - q_{35} - q_{45} + q_{56} = 0 \quad (\text{вершина «5»}). \quad (13)$$

Згідно другого закону (4) складаємо систему рівнянь для контурів з потоками дуг α :

$$-q_{34} / 5 - q_{45} / 3 + q_{35} / 10 = 0 \quad (\text{контур «3-4-5-3»}); \quad (14)$$

$$-q_{46} / 4 + q_{56} / 15 + q_{45} / 3 = 0 \quad (\text{контур «4-6-5-4»}); \quad (15)$$

$$-q_{23} / 12 - q_{35} / 10 + q_{25} / 8 = 0 \quad (\text{контур «2-3-5-2»}); \quad (16)$$

$$-q_{24} / 1 - q_{45} / 3 + q_{25} / 8 = 0 \quad (\text{контур «2-4-5-2»}); \quad (17)$$

$$-q_{12} / 14 - q_{23} / 12 + q_{13} / 6 = 0 \quad (\text{контур «1-2-3-1»}). \quad (18)$$

Систему виразів (9)-(18) для потоків α представляємо в матричній формі

$$R \cdot X = Q, \quad (19)$$

а розв'язок матричного рівняння – у вигляді

$$X = R^{-1} \cdot Q, \tag{20}$$

де

$$R = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & 1/10 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/4 & 1/15 \\ 0 & 0 & -1/12 & 0 & 1/8 & 0 & -1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/1 & 1/8 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/14 & 1/6 & -1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix}; Q = \begin{matrix} 19 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}; X = \begin{matrix} q_{12} \\ q_{13} \\ q_{23} \\ q_{24} \\ q_{25} \\ q_{34} \\ q_{35} \\ q_{45} \\ q_{46} \\ q_{56} \end{matrix}.$$

В матрицях (20) рівняння (9)-(13) виділені сірим фоном, а (14)-(18) – білим фоном. Розв'язок системи рівнянь для потоків α наведений в табл. 1.

Таблиця 1

Результати розв'язку системи рівнянь (9)-(18) для потоків α

Змінні (потоки)	q_{12}	q_{13}	q_{23}	q_{24}	q_{25}	q_{34}	q_{35}	q_{45}	q_{46}	q_{56}
Пропускна здатність	14	6	12	1	8	5	10	3	4	15
Розв'язок	12,1	6,88	3,37	0,939	7,81	3,29	6,96	0,112	4,12	14,88

З даних табл. 1 для потоків α впливає неочікуваний аспект теореми Форда-Фалкесона: *сума потоків дуг α мінімального розрізу дорівнює його пропускній здатності, але при цьому дуги мінімального розрізу можуть бути перевантажені та недовантажнені максимальним потоком мережі* (дуги мінімального розрізу мережі рис. 2 в табл. 1 виділені сірим фоном). Це означає, що якщо в мережі застосовані опори, які відображують реальні параметри, і неможливо застосувати трансформацію тисків в вершинах для кожної дуги чи змінювати параметри дуг, то **необхідно зменшувати максимальний потік**, щоб звести до номінального значення навантаження перевантаженої дуги мінімального розрізу. Отриманий результат підказує, що *у деяких випадках логічні алгоритми мають перевагу перед розрахунковою моделлю у вигляді схеми заміщення, бо дуги не перевантажуються та визначається оптимальний максимальний потік*. Сумнівною перевагою схеми заміщення є одноваріантність прийнятого рішення.

Перехід від законів потоків α (3)-(4) до законів потоків β (3), (5)-(8) для відомого значення максимального потоку може відбуватись шляхом призначення **коригованим** змінним перевантажених дуг величини дозволеної пропускної здатності з вилученням рівнянь **для контурів**, в яких використані перевантажені дуги. Розрахунки відбуваються в наступній послідовності:

1. Згідно **властивості 1** законів потоків β коригуємо потоки перевантажених дуг значеннями пропускної здатності і тим наче «виштовхуємо» зайві перевантаження дуг у інші дуги мережі:

$$q_{13} = 6 \text{ – замість рівняння (18);} \tag{21}$$

$$q_{46} = 4 \text{ – замість рівняння (15).} \tag{22}$$

Після обмеження змінних q_{ij} величинами пропускних здатностей S_{ij} порядок матричних рівнянь може бути скорочений [7]. Розв'язок системи рівнянь наведений в табл. 2.

Таблиця 2

Результати розв'язку системи рівнянь (9)-(14), (16), (17), (21), (22)

Змінні (потоки)	q_{12}	q_{13}	q_{23}	q_{24}	q_{25}	q_{34}	q_{35}	q_{45}	q_{46}	q_{56}
Пропускна здатність	14	6	12	1	8	5	10	3	4	15
Розв'язок	13	6	3,96	0,96	8,07	3,17	6,79	0,135	4	15

3. Внаслідок перевантаження потоку q_{25} згідно даних табл. 2, виконуємо заміну рівняння (16) на (розв'язок системи рівнянь наведений в табл. 3)

$$q_{25} = 8 \text{ – замість рівняння (16).} \tag{23}$$

Таблиця 3

«Обмежені» потоки β , отримані з системи рівнянь (9)-(14), (17), (21)-(23).

Змінні (потоки)	q_{12}	q_{13}	q_{23}	q_{24}	q_{25}	q_{34}	q_{35}	q_{45}	q_{46}	q_{56}
Пропускна здатність	14	6	12	1	8	5	10	3	4	15
Розв'язок	13	6	4,05	0,952	8	3,19	6,86	0,143	4	15

В табл. 3 визначений оптимальний розв'язок з «обмеженими» потоками β . На відміну від вимог до

змінних задач лінійного програмування, можливе отримання від'ємних значень потоків, що означає їх спрямованість від вершини з більшим номером до вершини з меншим номером.

4. Для зменшення до нуля мінімальних значень отриманих «обмежених» потоків β замінюємо вирази для контурів (14) та (17) на рівняння:

$$q_{24} = 0 \text{ – замість рівняння (17);} \tag{24}$$

$$q_{45} = 0 \text{ – замість рівняння (14).} \tag{25}$$

Розв'язок отриманої системи рівнянь (9)-(13), (21)-(25), наведений в табл. 4, у сукупності з даними табл. 3 демонструє можливість отримання нескінченної кількості комбінаторних рішень.

Таблиця 4

«Обмежені» потоки β , отримані з системи рівнянь (9)-(13), (21)-(25).

Змінні (потоки)	q_{12}	q_{13}	q_{23}	q_{24}	q_{25}	q_{34}	q_{35}	q_{45}	q_{46}	q_{56}
Пропускна здатність	14	6	12	1	8	5	10	3	4	15
Розв'язок	13	6	5	0	8	4	7	0	4	15

Використання метода потенціалів тисків вершин

Згідно метода потенціалів тисків вершин кожній вершині рис. 2 призначаємо потенціал тиску φ_i , $i = 1, 6$. Потенціал вершини $i = 6$ вважаємо відомим та рівним нулю $\varphi_6 = 0 = const$. Потік будь-якої дуги при цьому розраховується за формулою

$$q_{ij} = (\varphi_i - \varphi_j) / R_{ij} = (\varphi_i - \varphi_j) S_{ij}.$$

Для кожної окремої вершини $i = 1, 5$ рис. 2 складаємо рівняння для потоків в вершинах

$$(\varphi_1 - \varphi_2)14 + (\varphi_1 - \varphi_3)6 = 19;$$

$$(\varphi_1 - \varphi_2)14 - (\varphi_2 - \varphi_3)12 - (\varphi_2 - \varphi_4)1 - (\varphi_2 - \varphi_5)8 = 0;$$

$$(\varphi_1 - \varphi_3)6 + (\varphi_2 - \varphi_3)12 - (\varphi_3 - \varphi_4)5 - (\varphi_3 - \varphi_5)10 = 0;$$

$$(\varphi_2 - \varphi_4)1 + (\varphi_3 - \varphi_4)5 - (\varphi_4 - \varphi_5)3 - \varphi_4 4 = 0;$$

$$(\varphi_2 - \varphi_5)8 + (\varphi_3 - \varphi_5)10 - (\varphi_4 - \varphi_5)3 - \varphi_5 15 = 0.$$

В результаті отримуємо матричну залежність

$$Y_\alpha \cdot F_\alpha = Q_\alpha,$$

$$\text{де } Y_\alpha = \begin{bmatrix} 20 & -14 & -6 & 0 & 0 \\ 14 & -35 & 12 & 1 & 8 \\ 6 & 12 & -33 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 3 \\ 0 & 8 & 10 & 3 & -36 \end{bmatrix}; Q_\alpha = \begin{bmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; F_\alpha = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок матричного рівняння має вигляд

$$F_\alpha = (Y_\alpha)^{-1} Q_\alpha = \begin{bmatrix} \varphi_1 = 2,83 \\ \varphi_2 = 1,97 \\ \varphi_3 = 1,69 \\ \varphi_4 = 1,03 \\ \varphi_5 = 0,99 \end{bmatrix}.$$

Розраховані значення потоків дуг α співпадають з отриманими раніше величинами:

$$q_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2)14 = (2,83 - 1,97)14 = 12,121;$$

$$q_{13} = (\varphi_1 - \varphi_3)6 = 6,879;$$

...

$$q_{45} = (\varphi_4 - \varphi_5)3 = 0,112;$$

$$q_{46} = \varphi_4 15 = 4,118;$$

$$q_{56} = \varphi_5 15 = 14,882.$$

Визначення максимального потоку

Максимальний потік мережі Q_m можна визначити за відомими методами.

Суб'єктивне призначення величин і напрямків потокам в дугах може привести до помилкового зменшення максимального потоку мережі Q_m . Наприклад, для рис. 3, а отримуємо **потік «11»** зі шляхами «1-2-3-4-6», «1-2-3-5-6», «1-4-6» і потоками «5», «1», «5» та **потік «18»** зі шляхами «1-2-5-6», «1-2-4-6»,

«1-3-4-6», «1-4-6», «1-3-5-6», «1-3-2-5-6» і потоками «3», «3», «5», «5», «1», «1».



Рис. 3. Мережа з заданими пропускними здатностями:
а) – граф мережі; б) – матриця мережі

Оцінка величини потоку Q_m отримується в середовищі *MathCAD* по функції *maximize* при функції мети $F = Q_m + \sum q_{ij} \rightarrow \max$, обмеженнях (3) та $q_{ij} \leq S_{ij}$.

Максимальний потік Q_m перевантаженої мережі з m дуг з вхідним потоком Q_m^0 можна приблизно оцінити або як $Q_m \geq Q_m^0 q_{ij}^N / q_{ij}^M$ (де q_{ij}^N, q_{ij}^M – пропускна здатність та протік найбільш перевантаженої дуги), або при коригуванні потоків $[m - (n - 1)]$ дуг, які входять у відповідні контури (аналогічні розрахунки можна виконати й для недовантаженої мережі):

1. Нормалізації (зменшення до норми) завантаження частки найбільш перевантажених $[m - (n - 1)]$ дуг, які входять у контури математичної моделі.

2. Зменшенні вхідного потоку від Q_m^0 до $Q_m \approx Q_m^0 q_{ij}^N / q_{ij}^M$ при отриманні нормального завантаження найбільш завантаженої ненормалізованої дуги мережі, урахуванні лінійності математичної моделі та введених нормалізованих потоків.

Узгодження потоків розрізів

Для проведених через діагональну комірку $(i, i) = (3, 3)$ матриці мережі двох взаємно перпендикулярних прямих пунктирних ліній (рис. 3, б) [6]:

1. Сумарна пропускна здатність потоку, що **входить** у вершину (i, i) , дорівнює сумі всіх цифр, які перетинаються вертикальною прямою, а для потоку, що **виходить** з вершини (i, i) , дорівнює сумі всіх цифр, які перетинаються горизонтальною прямою.

2. Сумарна пропускна здатність для **потіку розрізу** визначається як сума ваг комірок, що знаходяться над горизонтальною штриховою прямою, проведеною з комірки вершини (i, i) , включаючи комірки, які перетинаються даною прямою. Ці розрізи можуть не охоплювати мінімальний розріз. При цьому потрібно урахувувати можливість протікання від'ємних потоків. На рис. 3,б виділені сірим фоном комірки, які входять у потік розрізу за номером діагональної комірки $i = 3$ з потоком «18».

Доведемо, що **в моделі** рис. 3 рівність потоків всіх розрізів вхідному потоку мережі S забезпечує також вірність закону фізики щодо сум потоків в вершинах.

i/j	1	2	3	4	5
1	-	a	b	c	d
2		-	e	f	g
3			-	h	k
4				-	p
5					-

Рис. 4. Матриця потоків мережі

Для цього розглянемо значення потоків розрізів рис. 4 (S – значення потоку розрізу):

$$a + b + c + d = S; \tag{26}$$

$$e + f + g + b + c + d = S; \tag{27}$$

$$h + k + f + g + c + d = S; \tag{28}$$

$$p + k + g + d = S. \tag{29}$$

Потрібно довести, що при умовах (26) – (29) дотримуються рівності потоків входів і виходів для усіх

вершин мережі:

$$a = e + f + g; \tag{30}$$

$$b + e = h + k; \tag{31}$$

$$c + f + h = p; \tag{32}$$

$$a + b + c + d = d + g + k + p. \tag{33}$$

З вказаних виразів (26) – (29) випливає: якщо прирівняти (26) та (27), то отримуємо (30); з рівнянь (27) та (28) отримуємо (31); з рівнянь (28) та (29) отримуємо (32); з рівнянь (26) та (29) отримуємо (33).

i/j	1	2	3	4	5	6	Q_i	D_i^1	D_i^2	D_i^3
1	–	6	10/7 ¹	5			21	3	0	0
2		–	7/– 1 ²	4	3		29	11	8	0
3			–	5	1		18	0	0	0
4				–	3/2 ²	17/12 ¹	24	6	1	0
5					–	6	23	5	0	0
6						–	–	–	–	–

Рис. 5. Узгодження потоків розрізів

Подібні розрахунки можна виконати для матриці потоків мережі будь-якої розмірності (або при розгляді літерних позначень як окремих матриць). Як приклад, розглянемо на рис. 5 задачу розподілу максимального потоку $Q_3 = 18$ по дугах. Величини потоків розрізів показані в колонці Q_i рис. 5. Потрібно так зменшити потоки Q_i , щоб вони були рівними потоку мінімального розрізу $Q_3 = 18$. При цьому забороняється зменшувати потоки дуг мінімального розрізу, які позначені прямокутниками. В колонці D_i^1 рис. 5 показані **дельта потоки** $D_i^1 = (Q_i - Q_3)$, які потрібно від отриманих потоків розрізів Q_i , щоб вони не відрізнялись від потоку мінімального розрізу $Q_3 = 18$. Для полегшення подальшого аналізу дуг мережі розділимо їх на чотири частки: **незмінну дугу** (1, n) з потоком, рівним її пропускній здатності; **дугу діагоналі** ($i, j = i+1$), для яких зміна їх потоків впливає лише на потік i-го розрізу; **дуги комбінаторні** – усі інші (зміна їх потоків впливає більше ніж на один розріз мережі); **дуги мінімального розрізу** (помічені прямокутниками, можуть охоплювати усі три попередні типи дуг).

Для розв'язку задачі було б достатньо відняти **дельта потоки** D_i^1 від потоків **дуг діагоналі**, бо отримані при цьому від'ємні потоки по абсолютній величині не перевищують пропускну здатності. Але розглянемо інший варіант, коли будемо зменшувати потоки комбінаторних дуг, не змінюючи помічені **прямокутниками потоки комірок мінімального розрізу**. З колонки **дельта потоків** D_i^1 видно, що розрізи розділяються значенням $D_3^1 = 0$ на дві частки: верхню частку з двох розрізів з мінімальним **дельта потоком** $D_1^1 = 3$ та нижню частку з двох розрізів з мінімальним **дельта потоком** $D_5^1 = 5$. Для кожної частки знаходимо **комбінаторні дуги** ((1, 3); (2, 3)) та ((4, 6); (5, 6)), які не охоплюють **дуги мінімального розрізу**, і віднімаємо з потоку **лише верхньої** комірки відповідний мінімальний **дельта потік**. Таким чином завантажуються потоками дуги, найбільш віддалені від діагоналі.

Для обох часток розрізів нові кориговані дозволені значення пропусної здатності дуг з верхнім індексом «1» показані в комірках (1, 3) та (4, 6) через косу риску.

Нові значення **дельта потоків** показані в колонці D_i^2 рис. 5. Для рядків $i = 2$ та $i = 4$ віднімаємо їх значення («8» та «1») від відповідних потоків **дуг діагоналі** і отримуємо розв'язок – нові їх потоки з верхнім індексом «2» та рівні нулю дельта потоки D_i^3 .

Визначення оптимального шляху в мережі за методом двох множин

Недоліком **алгоритма Дейкстри** по розрахунку шляху в мережі є громіздкість із-за багаторазового використання графа. Нижче на базі мережі рис. 6 з орієнтованими та неорієнтованими дугами описується **алгоритм двох множин**, який скорочує розрахунки алгоритма Дейкстри на графі приблизно в 6 разів – по кількості вершин. Для мережі рис. 6, а множина вершин розділяється на дві підмножини: S – множина вершин, яка з'єднана дугами дерева – основи; \bar{S} – множина не з'єднаних вершин. В початковому стані до S – множини належить коренева вершина {4[0]} з рівною нулю відстанню від початку шляхів (вказана в квадратних дужках), а до \bar{S} – множини – всі інші вершини {1, 2, 3, 5, 6}.

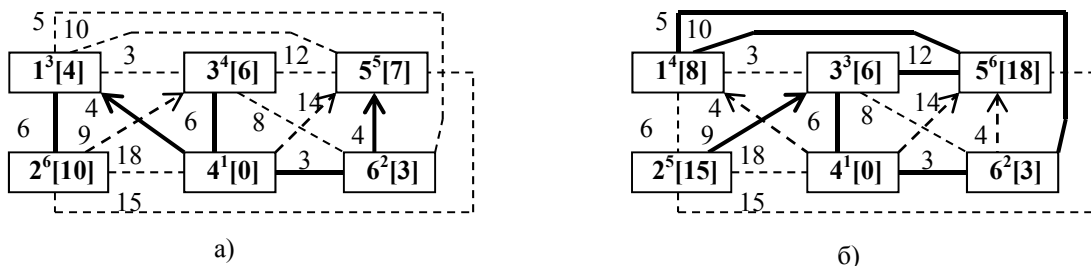


Рис. 6. Визначення мінімальних відстаней вершин мережі з переміщенням від кореневої вершини 4 (а) та

до неї (б). Древа – основи виділені жирними лініями

За методом двох множин виконуються дві операції: 1) для кожної вершини S – множини в квадратних дужках вказується **відстань** до заданої початкової кореневої вершини 4 (верхній індекс при номері вершини визначає її порядковий номер при ранжуванні по величині відстані від кореня дерева); 2) в дерево-основу S – множини включається дуга між двома множинами, для якої є мінімальною сума її довжини та **відстані** відповідної вершини S – множини. При русі від вершини $(i, i)=(4, 4)$ до всіх інших вершин, алгоритм на графі має наступний вигляд (рис. 6,а):

- $S = \{4[0]\}$; $\bar{S} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. Коренева вершина 4, її відстань $L_{44} = 0$.
- $S = \{4[0], 6[3]\}$; $\bar{S} = \{1, 2, 3, 5\}$: жирна лінія дуги (4, 6) довжиною 3, для вершини 6 відстань $L_{66} = L_{44} + L_{46} = 0 + 3 = 3$.
- $S = \{4[0], 6[3], 1[4]\}$; $\bar{S} = \{2, 3, 5\}$: жирна лінія дуги (4, 1) довжиною 4, для вершини 1 відстань $L_{11} = L_{44} + L_{41} = 0 + 4 = 4$.
- $S = \{4[0], 6[3], 1[4], 3[6]\}$; $\bar{S} = \{2, 5\}$: жирна лінія дуги (4, 3) довжиною 6, для вершини 3 відстань $L_{33} = L_{44} + L_{43} = 0 + 6 = 6$.
- $S = \{4[0], 6[3], 1[4], 3[6], 5[7]\}$; $\bar{S} = \{2\}$: жирна лінія дуги (6, 5) довжиною 4, для вершини 5 відстань $L_{55} = L_{66} + L_{65} = 3 + 4 = 7$.
- $S = \{4[0], 6[3], 1[4], 3[6], 5[7], 2[10]\}$; $\bar{S} = \{-\}$: жирна лінія дуги (1, 2) довжиною 6, для вершини 2 відстань $L_{22} = L_{11} + L_{12} = 4 + 6 = 10$.

При русі від всіх вершин до кореневої вершини 4 алгоритм на графі наведений на рис. 6,б. Аналогічним чином можна обрати максимальну чи середню довжину шляхів.

Розглянемо для мережі рис. 6 матричний алгоритм двох множин.

Вважаємо, що величина шляху завжди є позитивною величиною, а орієнтація дуги визначає дозволеність чи заборону напрямку переміщення. Тому такі матриці мають лише комірки з позитивними значеннями шляхів та заборонені комірки для орієнтованих дуг з рухом у зворотному напрямку. Неорієнтована дуга складається з двох зустрічно і паралельно вмикнених орієнтованих дуг і дозволяє рух у прямому та зворотному напрямках.

При русі від вершини $(i, i)=(4, 4)$ до всіх інших вершин, матричний алгоритм має наступний вигляд (рис. 7).

i/j	1	2	3	4	5	6
1	$L_{11} = 4^{3(4,1)}$	$6^{6(1,2)}$	3	–	10	5
2	6	$L_{22} = 10^{6(1,2)}$	9	18	15	–
3	3	–	$L_{33} = 6^{4(4,3)}$	6	12	14
4	$4^{3(4,1)}$	18	$6^{4(4,3)}$	$L_{44} = 0^{1(-)}$	8	$3^{2(4,6)}$
5	10	15	12	–	$L_{55} = 7^{5(6,5)}$	–
6	5	–	14	3	$4^{5(6,5)}$	$L_{66} = 3^{2(4,6)}$

Рис. 7. Розрахунок найкоротших шляхів в лабіринті за методом «двох множин»

Крок 1. $S = \{4[0]\}$; $\bar{S} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. Коренева вершина 4, її відстань $L_{44} = 0^{1(-)}$: перша цифра верхнього індексу означає номер кроку $k = 1$ (порядковий номер ранжування по величині відстані), а в дужках вказується з'єднуюча дуга S – множини.

Крок 2. $S = \{4[0], 6[3]\}$; $\bar{S} = \{1, 2, 3, 5\}$. **По рядку $i = 4$** виділяємо комірку (4, 6) довжиною дуги $3^{2(4,6)}$, сума якої з відстанню діагонального елемента рядка $L_{44} = 0$ має мінімальне значення. Елемент колонки $j = 4$ при цьому не розглядається. В діагональному елементі матриці для вершини $(i, i)=(6, 6)$ помічаємо мінімальну відстань $L_{66} = L_{44} + L_{46} = 0 + 3 = 3^{2(4,6)}$: перша цифра верхнього індексу означає номер кроку $k = 2$, а в дужках наведена адреса з'єднуючої дуги (4, 6), яка вказує, що рух виконується з вершини (4, 4) в вершину (6, 6). В результаті в S – множині входять дві вершини мережі ($n = 4; 6$).

Якщо б стояла задача визначення мінімального шляху з **усіх інших вершин до вершини (4, 4)**, то мінімальні довжини слід шукати не по горизонталі рядку $i = 4$, а по колонці $j = 4$. Тоді вершина «4» **була б кінцем руху при переміщенні до неї з усіх інших вершин.**

Крок 3. $S = \{4[0], 6[3], 1[4]\}$; $\bar{S} = \{2, 3, 5\}$. **По двох рядках ($i = 4; 6$)** розшукуємо комірку (4, 1) з довжиною дуги $4^{3(4,1)}$, сума якої з відстанню відповідного діагонального елемента рядка $L_{44} = 0$ дає мінімальне значення діагонального елемента $L_{11} = L_{44} + L_{41} = 0 + 4 = 4^{3(4,1)}$. Елементи колонок $j = 4; 6$ при

цьому не розглядаються. Це означає з'єднання в одну S -множину трьох вершин мережі ($n = 4; 6; 1$).

Якщо б стояла задача визначення мінімального шляху з усіх інших вершин до пункту (4, 4), то мінімальні довжини слід шукати не по рядках $i = 4, 6$, а по колонках $j = 4, 6$.

Аналогічно виконуються інші розрахунки, що відображено на рис. 7. Шлях від будь-якої вершини до кореня дерева можна визначити по верхніх індексах нумерації кроків.

Мережі багатокольорових господарчих потоків

Підприємство, галузь (в міжгалузевій балансовій моделі матриці Леонтьєва) чи держава може розглядатись як вершина, в якій вхідні різнокольорові потоки (енергії, сировини, фінансів тощо) переробляються і виходять у вигляді різнобарвних потоків послуг з наявністю в кожній дузі керованих ємностей накопичення та постачання. Керування потоками між вершинами та підсистемами може відбуватись зміною функцій мети, вимкненням чи вмикненням дуг за допомогою перемикаючих функцій на основі методів [7], регулюванням пропускних здатностей дуг, або керуванням джерел потоків накопичення та постачання у вершинах дуг. Між собою вершини з'єднуються транспортними мережами потоків. Виробництво товарів можна розглядати як послідовність роботи у часі конвейерів К1-К4: К1 – планування та проектування – за 1 рік до продажу, К2 – замовлення матеріалів – за 6 місяців до продажу, К3 – виробництво товарів – за 1 місяць до продажу, К4 – продаж. Робота конвейерів К1 –К3 коригується по роботі конвейера К4. Цикл завершується або за витратою введених ресурсів або за часом. При цьому **програмування прибутку**

може охоплювати три напрямки [6]: максимізацію прибутку (Л. В. Канторович) $F_3 = \sum_{j=1}^n p_j x_j \rightarrow \max$;

максимальне збагачення підприємця у часі $F_1 = \frac{K_t}{T_c} \left(\sum_{j=1}^n p_j x_j \right) \rightarrow \max$; інтенсифікацію потоку прибутків

у часі $F_2 = K_t \sum_{j=1}^n p_j x_j / t_j \rightarrow \max$, де $K_t = 1 + At / T_c$; A – коефіцієнт, який ураховує удосконалення

виробництва у часі; p_j – прибуток; x_j – кількість товару; t_j – час на накопичення ресурсів, виробництво та продаж одиниці товару; $T_c = T_0 + \sum_{j=1}^n t_j x_j$ – час циклу; $t = 0 \dots T_c$ – час; T_0 – загальні витрати часу. В

основному багатокритеріальна мета підприємства повинна орієнтуватись на головний критерій – **максимального збагачення підприємця у часі** [6], а галузі чи держави – на основі **узгодженості та заданого накопичення**. Оптимальний розв'язок задачі визначається координатами точки перетину поверхні ділянки рішень з прямою лінією, яка з'єднує центроїди двох кластерів: перший охоплює ранжовані оптимальні точки, кожна з яких розміщена на лінії пересічення поверхонь двох критеріїв зовні ділянки рішень найближче до точки дотику критерія на поверхні рішень, а другий охоплює неоптимальні точки.

Висновки

1. Створені теоретичні основи мереж з потоками на базі схем заміщення та законів їх математичного опису. У сукупності з методами теорії прийняття рішень та ДО з урахуванням головного критерія (**максимального збагачення підприємця у часі** [6]) це відкриває нові можливості дослідження процесів в економіці та в технічних системах.

2. Розв'язок по отриманим законам для потоків мережі є **логічно обгрунтованим** і не має того ж значення, що й розв'язок **за фізичними законами** (наприклад – Кірхгофа). Після використання законів (3)-(8) до електроенергетичних мереж, отриманий розв'язок ще додатково вимагає реалізації у вигляді ряду фізичних дій чи зміни параметрів мережі з перевіркою результатів за законами Кірхгофа. Закони Кірхгофа не ураховують пропускні здатності електричних мереж і тому є частковим випадком отриманих законів мереж з потоками (пропускні здатності **повинні** відповідати розрахованим електричним струмам).

3. Виникає можливість аналізу у часі **нового класу мереж** з виробничими потоками та аналізом впливу соціальних умов в тому числі на основі теорії однозначних нечітких систем Турти М. В. [8]. Теорія Турти М. В. дозволяє автоматично визначити логічні функції належності по заданих експертом термах; базу знань спрощує до бази даних; суттєво спрощує процес дефазифікації, роботу експерта та аналіз процесів; забезпечує однозначний перехід від лінгвістичних до числових значень і навпаки; об'єднує в один методи Мамдані та Сугено-Такагі; усуває логічні помилки класичної теорії; не потребує введення вагових коефіцієнтів до продукційних правил бази даних.

4. При прийнятті рішень логічні алгоритми у деяких випадках мають перевагу перед розрахунковими моделями у вигляді схем заміщення та математичних описів. Максимальний потік може перевантажувати та недовантажувати дуги мінімального розрізу.

5. Встановлений взаємний зв'язок між потоками січень та потоками вершин.

6. Запропонований алгоритм двох множин, який дозволяє спростити розрахунки порівняно з класичним методом Дейкстри.

ЛІТЕРАТУРА

1. Алгоритмы нахождения максимального потока [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://algotist.manual.ru/math/graphs/maxflows/Intro.php>.
2. Ford L. R.Jr. Maximal Flow Through a Network / L. R.Jr. Ford, D. R. Fulkerson // Canadian J. Math. – 1956. – 8(3). – P. 399–404.
3. Филипс Д. Методы анализа сетей / Д. Филипс, А. Гарсиа-Диас. – М. : Мир, 1984. – 496 с.
5. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М. : Мир, 1974. – 520 с.
6. Goldberg A. V. Length functions for flow computations. Technical report #97-055 / A. V. Goldberg, S. Rao ; NEC Research Institute. – 1997.
7. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій : підручник – Миколаїв : Вид-во МДГУ ім. Петра Могили, 2007. – Том 1: – 312 с.; Том 2: – 272 с.
8. Кутковецький В. Я. Обобщенные методы переключающих функций и их применение для расчета электромагнитных процессов в вентильных цепях. Специальности: 05.09.12 – полупроводниковые преобразователи энергии, 05.09.05 – теоретическая электротехника : автореферат докторской диссертации на соискание ученой степени д.т.н. – Киев : 1992. – 30 с.
9. Турти М. В. Теорія однозначних нечітких систем та нейронні мережі : монографія : [в 2-х частинах]. – Миколаїв : Вид-во Європейського ун-ту, Миколаївська філія, 2007. – Ч. 1 – 141 с.; Ч. 2 – 114 с.

© Кутковецький В. Я., 2011

Стаття надійшла до редколегії 21.03.2011 р.