УДК 517.93

Кутковецький В. Я.

ПОМИЛКОВЕ ЗБІЛЬШЕННЯ ШЛЯХІВ У КЛАСИЧНІЙ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

Математична вимога одноразових відвідин міст може штучно збільшити шлях комівояжера. Асиметричні та симетричні задачі повинні розв'язуватись у чотири етапи: складання матриці комівояжера по реальній мережі; кодування шляхів матриці при можливості багаторазового відвідування міст; розв'язок кодованої задачі комівояжера з одноразовими відвідинами міст; декодування рішення для його практичної реалізації при можливості багаторазових відвідин міст.

Ключові слова: *задача комівояжера, математична модель, оптимізація.*

Математическое требование одноразового посещения пунктов может искусственно увеличить путь коммивояжера. Асимметричные и симметричные задачи должны решаться за четыре этапа: составление матрицы коммивояжера по реальной сети; кодирование матрицы при возможности многоразового посещения пунктов; решение кодированной задачи коммивояжера при одноразовом посещении пунктов; декодирование решения для его практической реализации при разрешении многоразовых посещений пунктов.

Ключевые слова: *задача комивояжера, математическая модель, оптимизация.*

The mathematical only once visit request to the station may artificially increase the way of traveling salesman. Symmetrical and asymmetrical problems must be solved in four stages: composition of traveling salesman matrix on the real network; the matrix codifying with repeated visits permission to the stations; the codified matrix solution with only once visit request; the decodifying of solution with repeated visits permission to the stations for real fulfillment.

Key words*: traveling salesman problem, mathematical model, optimization.*

Шляхи між містами в задачі комівояжера

В задачі комівояжера будь-які два міста i та j з'єднуються між собою двома шляхами ***одностороннього протилежного руху*** – (i, j) та (j, i), які у загальному випадку можуть мати різну довжину $K_{ij} \neq K_{ji}$. Таким чином, по суті ***розглядається орієнтований граф*** (рис. 1). Комівояжер, знаходячись в місті i, не може обрати будь-який з двох шляхів і завжди використовує лише дозволений шлях (i, j).

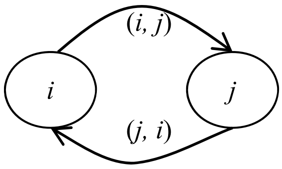

Рис. 1. Шляхи з одностороннім рухом

Якщо шляхи (i, j) та (j, i) мають різну довжину, то отримують асиметричну матрицю комівояжера з дозволеними позитивними шляхами. При однаковій довжині прямих (i, j) і зворотних (j, i) шляхів маємо симетричну матрицю комівояжера.

Матриця комівояжера не є повним відображенням існуючої мережі: якщо між будь-якими містами існують два шляхи з одностороннім рухом, то й ***в кожній комірці матриці комівояжера повинні відображуватись два шляхи***: один позитивний (дозволений, прямого руху), а інший негативний (заборонений, зворотного руху). В такому випадку матриця стає симетричною і цілком відповідає існуючій мережі. Але комівояжер не використовує заборонені негативні шляхи: у кожному місті відвідин i він «бачить» і ураховує лише дозволені позитивні шляхи ((i, j), $j = 1, 3, .., n$). Заборонені негативні шляхи (j, i) він не використовує, і тому в матриці вони не відображуються. Але по такій асиметричні матриці завжди можна отримати симетричну матрицю ***реальної мережі*** за рахунок відображення в ній також і заборонених шляхів з від'ємними знаками.

Взаємна суперечливість вимоги одноразових відвідин міста та функціїі мети

Одночасне дотримання двох класичних вимог (одноразових відвідин міст та отримання найкоротшого шляху) може штучно збільшити шлях комівояжера. Якщо комівояжер знаходиться в місті $i = A$ (рис. 2) і вже відвідав місто B, то відвідати місто $j = C$ він може лише по одному дозволеному шляху – $(i, j) = (A, C)$. Комівояжер також не розглядає не заборонений шлях $(A, B) + (B, C) = (A, B, C)$, навіть якщо він коротший за (A, C).

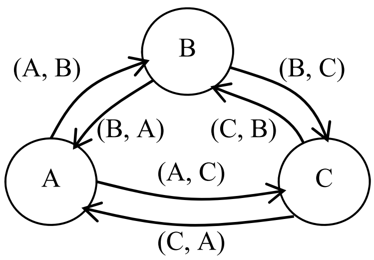

Рис. 2. Шляхи (А, С) та (А, В, С) = (А, В) + (В, С)

Тобто при одноразових відвідинах практично в розв'язок задачі комівояжера закладається помилка: не використовується не заборонений коротший шлях (A, B, C). А у дійсності цей шлях може складатись з більшого переліку міст.

Звісно, комівояжер не може нехтувати вимогами функції мети, і тому він повинен багаторазово відвідувати міста. Тому до математичної умови відображення в комірках матриці комівояжера найкоротших шляхів між містами потрібно додати одну суттєву поправку: ці найкоротші шляхи можуть визначатись в тому числі ***з багаторазовими відвідинами вже відвіданих міст***, а умова одноразових відвідин міст відноситься лише до математичного розв'язку задачі. Але отримана подібним чином матриця комівояжера з багаторазовими відвідинами міст **не відображує реальної мережі, є кодованою,** що в фаховій літературі не розглянуто [1-6]. Нижче на прикладі розглядається кодування реальної матриці, розв'язок кодованої задачі та декодування рішення для його практичної реалізації.

Приклад розв'язку задачі комівояжера

Розглянемо приклад задачі комівояжера рис. 3 з оптимальним шляхом 1-4-3-5-6-2-1 довжиною $L_1 = 63$, рішення для якого наведене в [5].

i / j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	–	27	43	16	30	26
2	7	–	16	1	30	30
3	20	13	–	35	5	0
4	21	16	25	–	18	18
5	12	46	27	48	–	5
6	23	5	5	9	5	–

Рис. 3. Задача комівояжера [5]

Кодування шляхів матриці рис. 3 відображено на рис. 4.

Шлях (i, j) рис.3	**Довжина шляху (i, j) рис.3**	**Заміна на дозволений кодований шлях рис. 4**	**Довжина кодованого шляху рис. 4**
(1, 3)	43	$(1, 6, 3)^{K1}$	$(26 + 5)^{K1} = 31^{K1}$
(2, 5)	30	$(2, 4, 5)^{K1}$	$(1 + 18)^{K1} = 19^{K1}$
(2, 6)	30	$(2, 3, 6)^{K1}$	$(16 + 0)^{K1} = 16^{K1}$
(3, 2)	13	$(3, 6, 2)^{K1}$	$(0 + 5)^{K1} = 5^{K1}$
(3, 4)	35	$(3, 6, 4)^{K1}$	$(0 + 9)^{K1} = 9^{K1}$
(4, 3)	25	$(4, 6, 3)^{K1}$	$(18 + 5)^{K1} = 23^{K1}$
(5, 2)	46	$(5, 6, 2)^{K1}$	$(5 + 5)^{K1} = 10^{K1}$
(5, 3)	27	$(5, 6, 3)^{K1}$	$(5 + 5)^{K1} = 10^{K1}$
(5, 4)	48	$(5, 6, 4)^{K1}$	$(5 + 9)^{K1} = 14^{K1}$
(6, 1)	23	$(6, 2, 1)^{K1}$	$(5 + 7)^{K1} = 12^{K1}$
(6, 4)	9	$(6, 2, 4)^{K1}$	$(5 + 1)^{K1} = 6^{K1}$

Рис. 4. Кодуванння шляхів матриці рис. 3

Кодована матриця комівояжера з коротшими шляхами набуває вигляду рис. 5.

i / j	1	2	3	4	5	6
1	–	27	31^{K1}	16	30	26
2	7	–	16	1	19^{K1}	16^{K1}
3	20	5^{K1}	–	9^{K1}	5	0
4	21	16	23^{K1}	–	18	18
5	12	10^{K1}	10^{K1}	14^{K1}	–	5
6	12^{K1}	5	5	6^{K1}	5	–

Рис. 5. Матриця комівояжера [5] після першого кодування

Кодування відбувається за «правилом прямокутника»:

1. В обраному рядку i = A для найменшого числа кодування не виконується. Усі інші (більші) цифри рядка i = A переглядаються з намаганням їх кодування, тобто зменшення числового значення шляху. Якщо в рядку $i = A$ виділена комірка (i, j) = (A, B) з великим тарифом K_{AB}, то в тому ж рядку обирається комірка (A, C) з меншим тарифом ($K_{AC} < K_{AB}$) і розглядається «прямокутник»

(A, B) – (A, C) – (C, C) – (C, B),

у вершинах якого знаходяться вказані комірки. Підсумок таприфів по діагоналі «прямокутника» (A, C) + (C, B) визначає новий скорочений шлях між пунктами A та B $K_{AB}^{K1} = (K_{AC} + K_{CB})^{K1}$ (якщо $K_{AB}^{K1} > K_{AB}$, то K_{AB}^{K1} не використовується). Шлях довжиною $K_{AB}^{K1} = (K_{AC} + K_{CB})^{K1}$ стає кодованим і помічається як

$$(A, B)^{K1} = (A, C) + (C, B) = (A, C, B)^{K1}.$$

2. Кожна з комірок (A, C) та (C, B), чи обидві разом, в свою чергу, можуть бути замінені за «правилом прямокутника» на інші кодовані шляхи.

Кодування може відбуватись й по черзі: отримана в результаті кодування матриця рис. 5 може бути знову кодована, як це показано нва рис. 6. На основі даних рис. 5 та рис. 6 отримуємо кодовану матрицю задачі комівояжера рис. 7, по якій і проводиться розрахунок з «одноразовими» відвідинами міст.

Шлях (*i, j*) рис.4	**Довжина шляху (*i, j*) рис.4**	**Заміна на дозволений кодований шлях рис. 4**	**Довжина кодованого шляху рис. 7**
(3, 1)	20	$(3, 6, 1)^{K2} = (3, 6, 2, 1)^{K2}$	$(0 + 12^{K1})^{K2} = 12^{2K}$
(3, 4)	9^{K1}	$(3, 6, 4)^{K1} = (3, 6, 2, 4)^{K2}$	$(0 + 6^{K1})^{K1} = 6^{K2}$
(5, 4)	14^{K1}	$(5, 6, 4)^{K1} = (5, 6, 2, 4)^{K2}$	$(5 + 6)^{K2} = 11^{K2}$

Рис. 6. Кодуванння шляхів матриці рис. 4

i / j	1	2	3	4	5	6
1	–	27	31^{K1}	16	30	26
2	7	–	16	1	19^{K1}	16^{K1}
3	12^{K2}	5^{K1}	–	6^{K2}	5	0
4	21	16	23^{K1}	–	18	18
5	12	10^{K1}	10^{K1}	11^{K2}	–	5
6	12^{K1}	5	5	6^{K1}	5	–

Рис. 7. Матриця комівояжера [5] після другого кодування

Розв'язок кодованої задачі комівояжера рис. 7 за методом гілок та меж, уперше запропонованим Літтлом [6] дав оптимальний шлях S = (1, 4, 5, 6, 3, 2, 1) при довжині L_2= 16 + 18 + 5 + 5 + 5 + 7= 56, що на 12% менше наведеного в [5] шляху. ***Кодована матриця*** рис.7 та відповідний ***кодований граф*** не відповідають реальній мережі шляхів. Декодування шляху для практичної реалізації отриманого рішення виконується по даних рис. 5 – рис. 7: S = (1, 4, 5, 6, $(3, 2)^{K1}$, 1) = (1, 4, 5, 6, $(3, 6, 2)^{K1}$, 1), з якого видно, що комівояжер два рази відвідує місто «6».

Скорочення розрахунків при «автоматичному» введенні трьох міст у шлях комівояжера

i/j	**1**	**3**	**5**
2		–	
4	–		
6			–

Рис. 8. Скорочена матриця комівояжера з 3-х рядків та 3-х колонок

Якщо у кінці розрахунків матриця комівояжера змешується до 2-х рядків та 2-х колонок, то дозволені дві комірки «автоматично» уводять в шлях комівояжера [1-5], що скорочує розрахунки. Але розрахунки можна ще більше скоротити, якщо їх зупинити, коли в скороченій матриці комівояжера залишилось три рядка та три колонки: в результаті не визначаються константи редукції рядків та колонок, не перераховуються елементи матриці; не складається таблиця штрафів.

На рис.8 заборонені комірки позначені штрихом, а ваги не заборонених комірок не вказані. Відомо, що максимальна кількість шляхів комівояжера дорівнює $(n-1)!$ комбінацій з цифр 2, 3,…, n. Якщо $n = 3$, то кількість можливих шляхів дорівнює $2! = 2$, і вони складаються з комірок груп A та B матриці комівояжера.

До комірок групи А вносимо комірку будь-якого рядка, яка знаходиться ліворуч від забороненої комірки. При цьому викреслюється відповідний рядок та відповідна колонка матриці рис.8, і в скороченій матриці (на 2 рядка та 2 колонки) забороняється одна комірка за принципом: в кожному рядку та кожній колонці повинна існувати одна заборонена комірка. Дві комірки, що залишаються, автоматично додаються до комірок групи A.

До комірок групи В належить комірка того ж рядка, яка знаходиться праворуч від забороненої комірки з аналогічним визначенням двох інших комірок.

Для рис. 8, рядок $i=2$: група A охоплює комірку (2, 1) плюс (4, 5), (6, 3); в групу B входить (2, 5) плюс (4, 3), (6, 1). Для будь-яких рядків комірки груп A та B співпадають між собою за складом. У шлях комівояжера входить група, для якої нумерація її комірок узгоджується з отриманою часткою попереднього рішення. Якщо це узгодження спостерігається для обох груп, то обирають групу з меншою підсумковою вагою.

Висновки

1. У загальному випадку для запобігання штучного збільшення шляху (помилкового розв'язку) реальна мережа повинна замінюватись на кодовану з її наступним розв'язком при одноразовому відвідувані міст. Для практичного застосування отриманий кодований розв'язок декодується, і комівояжеру надається можливість багаторазових відвідин міст.

2. Алгоритм «автоматичного» введення в шлях трьох комірок замість двох дозволяє скоротити розрахунки в задачі комівояжера.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М. : Мир, 1974. – 520 с.
2. Филипс Д. Методы анализа сетей / Д. Филипс, А. Гарсиа-Диас. – М. : Мир, 1984. – 496 с.
3. Глушик М. М. Дослідження операцій / М. М. Глушик, Н. М. Телесницька. – Львів : «Новий світ – 2000», 2009. – 368 с.
4. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. – К. : ЗАТ «ВІПОЛ», 2000. – 688 с.
5. Катренко А. В. Дослідження операцій. – Львів : «Магнолія Плюс», 2004. – 549 с.
6. Little J. D. C., et al. An Algorithm for Traveling Selesman Problem // Operation Researchю – 1963. – 11(5). – P. 972–988.

Стаття надійшла до редколегії 25.03.2011 р.