УДК 519.853+517.9

Трунов О. М.

ПІДВИЩЕННЯ СТУПЕНЯ ПОВНОТИ СИСТЕМ У ЗАДАЧАХ НЕЛІНІЙНОГО МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ОБМЕЖЕННЯМИ НЕРІВНОСТЯМИ

Поставлена та розв'язана задача пошуку фундаментальних властивостей та формування додаткових лінійно незалежних рівнянь, що доповнюють систему в методі множників Лагранжа для задач нелінійного математичного програмування з обмеженнями нерівностями.

Ключові слова: *Метод множників Лагранжа, обмеження нерівності, нелінійні цільові функція та обмеження, додаткові рівняння, метод рекурентної апроксимації.*

Поставлена и решена задача поиска фундаментальных свойств и формирования дополнительных лінейно независимых уравнений, дополняющих систему в методе множителей Лагранжа для задач нелинейного математического программирования с ограничениями неравенствами.

Ключевые слова: *Метод множителей Лагранжа, ограничения неравенства, нелинейные целевые функции и ограничения, дополнительные уравнения, метод рекуррентной апроксимации.*

The problem of finding the fundamental properties and the formation of additional linearly independent equations that complement system in the method of Lagrange multipliers for nonlinear mathematical programming with constraints inequalities is posed and solved.

Key words: *Lagrange multipliers method, inequality constraints, nonlinear objective function and constraints, additional equations, the method of recurente approximation.*

Одним з найбільш поширених методів розв'язку задач нелінійного математичного програмування є метод множників Лагранжа [1-4]. Однак у випадках коли кількість невідомих перевищує кількість рівнянь його застосування обмежено. Одним з підходів до усунення цих перешкод є зменшення вимірності вектора стратегій, або зменшення розмірності вектор функції неактивних обмежень. Останнє призводить до загрублення моделі, або до зведення її до задачі з багатьма параметрами, що у свою чергу не дозволяє подати чисельні дані у вигляді придатному для об'єктивного прийняття рішень. Безумовно, що знаходження незалежних, додаткових рівнянь, які доповнюють алгебраїчну систему є альтернативним підходом. Реалізація цієї мети є актуальною задачею, оскільки знайти загальні принципи побудови додаткових рівнянь це значить знайти загальні, не залежні від властивостей цільової функції та вектор функції обмежень, фундаментальні властивості, але вона на сьогодні не є розв'язаною в силу складнощів зумовлених своєю природою.

Таким чином, *головною нерозв'язаною проблемою* є пошук фундаментальних властивостей та принципів формування додаткових лінійно незалежних рівнянь, що доповнюють систему в методі множників Лагранжа для задач нелінійного математичного програмування. В роботах присвячених моделюванню [5; 6] неодноразово демонструвався підхід до нелінійної апроксимації, що дозволяє враховувати нелінійність функції лишаючись при цьому лінійною відносно шуканої невідомої.

Метою даної роботи є подати підхід до формування додаткових рівнянь, що доповнюють систему в методі множників Лагранжа для задач нелінійного математичного програмування шляхом застосування методу рекурентної апроксимації [5; 6].

Виклад основного матеріалу. Розглянемо задачу оптимізації цільової функції $f(\overline{X})$, яка є визначеною та N разів диференційованою у просторі R^n від n вимірного вектора стратегій $\overline{X}$ при обмеженнях нерівностях $g_j(\overline{X}) \le 0,\ j = \overline{1, m}$, тобто

$$\begin{cases} \min\limits_{\overline{X}} f(\overline{X}), \\ g_j(\overline{X}) \le 0. \end{cases} \tag{1}$$

Припустимо, що кожна з компонент вектор-функції обмежень є визначеною та N разів диференційованою у півпросторі R^n, а допустима область S утворюється перетином m півпросторів, кожен з яких задано нерівностями утвореними для компонент вектор-функції обмежень і є опуклим багатогранником. Застосовуючи до задачі теорему Куна-Таккера, складемо функцію Лагранжа [1-3]

$$L(\overline{X},\overline{\Lambda}) = f(\overline{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_j g_j(\overline{X}), \tag{2}$$

та подамо систему рівнянь задачі мінімізації з обмеженнями нерівностями [4]

$$\begin{cases} \nabla_x L(\overline{X},\overline{\Lambda}) - \overline{V} = 0, \\ \nabla_\lambda L(\overline{X},\overline{\Lambda}) + \overline{W} = 0, \\ \overline{X}^T \overline{V} \ = 0, \\ \overline{\Lambda}^T \overline{W} \ = 0, \end{cases} \tag{3}$$

де позначено $\overline{V}$, $\overline{W}$, $\overline{\Lambda}$ відповідно додаткові n вимірну та m вимірну вектор функції та m вимірний вектор множників Лагранжа.

Система (3) містить $n + m + 2$ рівнянь з $2(n + \mathrm{m})$ невідомими. Для приведення у відповідність ступеня визначеності до необхідної вимірності задачі, подамо розклад функції Лагранжа у околі $\overline{X}_{p-1}$ за МРА [5], обмежившись трьома доданками

$$L(\overline{X_p},\overline{\Lambda}) = L(\overline{X}_{p-1},\overline{\Lambda}) + \left[\nabla_x^T L(\overline{X_{p-1}},\overline{\Lambda}) + \frac{1}{2}\overline{\Delta}_{p-1}^T \nabla_x^2 L(\overline{X_{p-1}},\overline{\Lambda}) \right] \overline{\Delta}_p, \tag{4}$$

де позначено $\overline{\Delta}_p = \overline{X}_p - \overline{X}_{p-1}$ – приріст вектора стратегій p-того наближення, $\nabla_x^T L(\overline{X_{p-1}},\overline{\Lambda})$ – значення транспонованого вектора градієнта функції Лагранжа у околі $\overline{X}_{p-1}$, а $\nabla_x^2 L(\overline{X_{p-1}},\overline{\Lambda})$ – симетрична матриця частинних похідних другого порядку функції Лагранжа у околі $\overline{X}_{p-1}$ для $p - 1$ – шого наближення

$$\nabla_x^2 L(\overline{X_{p-1}},\overline{\Lambda}) = \left\| \frac{\partial^2 L(\overline{X_{p-1}},\overline{\Lambda})}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Диференціюючи (4) отримаємо з (3), що додаткова вектор функція повинна задовольняти умові

$$\overline{V}^T = -\overline{\Delta}_{p-1}^T \nabla_x^2 L(\overline{X_{p-1}},\overline{\Lambda}), \tag{5}$$

та знаходиться як послідовність наближень умова існування та середньо – квадратична і двостороння збіжність якої забезпечується, як це доводилось у роботі [5], за умов монотонності диференційованості функції Лагранжа [6], а саме за умов існування та обмеженості її похідних другого порядку від цільової функції. Для загальності слід зауважити, що для задачі максимізації у виразі (5) зміниться тільки знак з мінуса на плюс.

Таким чином отримано додаткове рівняння задане у вигляді n вимірної вектор-функції яке пов'язує допоміжний n - вимірний вектор $\overline{V}$ з властивостями цільової функції та обмежень.

Обговорення результатів. Отримане додаткове векторне рівняння додає до системи (3) n рівнянь, отже система складається тепер з

$2n + m + 2$ рівнянь з $2(n + m)$ невідомими, тобто вимірність вектора стратегій не впливає на єдиність розв'язку задачі оптимізації, а кількість обмежень, що дозволяє отримати єдиний розв'язок обмежується двома. Не складно показати, що у силу лінійності обмежень вони зводяться до двох активних обмежень, що обмежують півпростір у який включені півпростори утворені іншими обмеженнями нерівностями.

Розв'язок задачі з нелінійними обмеженнями нерівностями. Розглянемо задачу оптимізації цільової функції $f(\overline{X})$, яка є визначеною та N разів диференційованою у просторі R^n від n вимірного вектора стратегій $\overline{X}$ при нелінійних обмеженнях нерівностях $g_j(\overline{X}) \le 0,\ j = \overline{1,\ m}$, тобто

$$\begin{cases} \min\limits_{\overline{X}} f(\overline{X}), \\ g_j(\overline{X}) \le 0. \end{cases} \tag{6}$$

Припустимо, що кожна з компонент вектор-функції обмежень є визначеною та N разів диференційованою у півпросторі R^n, при чому її похідні є обмеженими функціями, а допустима область S утворюється перетином m півпросторів, кожен з яких задано нерівностями утвореними для компонент вектор-функції обмежень і є опуклим багатогранником. Застосовуючи до задачі теорему Куна-Таккера, складемо функцію Лагранжа та побудуємо систему аналогічну за формою системі (2). Для приведення у відповідність ступеня визначеності до необхідної вимірності задачі, подамо розклад функції Лагранжа у околі $\overline{X}_p$ за методом рекурентної апроксимації (МРА) [5], обмежившись в силу лінійності тільки першими похідними по λ_{jk}-компонентам вектора множників Лагранжа k-того наближення

$$L(\overline{X}_p,\overline{\Lambda}_k) = L(\overline{X}_{p-1},\overline{\Lambda}_{k-1}) + \left[\nabla_x^T L(\overline{X}_{p-1},\overline{\Lambda}_{k-1}) + \frac{1}{2}\overline{\Delta}_{p-1}^T \nabla_x^2 L(\overline{X}_{p-1},\overline{\Lambda}_{k-1}) \right] \overline{\Delta}_p +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left\{ L(\overline{X}_{p-1},\overline{\Lambda}_{k-1}) + \left[\nabla_x^T L(\overline{X}_{p-1},\overline{\Lambda}_{k-1}) + \frac{1}{2}\overline{\Delta}_{p-1}^T \nabla_x^2 L(\overline{X}_{p-1},\overline{\Lambda}_{k-1}) \right] \overline{\Delta}_p \right\} \Delta\lambda_{jk}, \tag{7}$$

де позначено $\Delta\lambda_{jk} = \lambda_{jk} - \lambda_{jk-1}$ – приріст вектора множників Лагранжа k-того наближення. Диференціюючи (7) по $\overline{\Delta}_p$ та λ_{jk}, з урахуванням властивостей нерухомої точки, отримаємо з (3), що додаткові вектор функції $\bar{V}$ та $\bar{W}$ повинні задовольняти умовам

$$\bar{V}^T = -\overline{\Delta}_{p-1}^T \nabla_x^2 L(\bar{X}_{p-1}, \bar{\Lambda}_{k-1}) - \nabla_x^T \left\{ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left\{ \left[\nabla_x^T L(\bar{X}_{p-1}, \bar{\Lambda}_{k-1}) + \frac{1}{2} \overline{\Delta}_{p-1}^T \nabla_x^2 L(\bar{X}_{p-1}, \bar{\Lambda}_{k-1}) \right] \overline{\Delta}_p \right\} \Delta\lambda_{jk} \right\},\ i = \overline{1, n}, \tag{8}$$

$$\bar{W} = \nabla_\lambda \left\{ \left[\nabla_x^T L(\bar{X}_{p-1}, \bar{\Lambda}_{k-1}) + \frac{1}{2} \overline{\Delta}_{p-1}^T \nabla_x^2 L(\bar{X}_{p-1}, \bar{\Lambda}_{k-1}) \right] \overline{\Delta}_p \right\},\ j = \overline{1, m}, \tag{9}$$

що знаходяться як послідовність наближень умова існування та середньо – квадратична і двостороння збіжність яких забезпечується, як це доводилось у роботі [5], за умов монотонності та диференційованості функції Лагранжа, а саме за умов існування та обмеженості її похідних другого порядку від цільової та функції обмежень. Для загальності слід зауважити, що для задачі максимізації у виразах (8) і (9) зміниться тільки знак з мінуса на плюс та з плюса на мінус відповідно для вектор функції $\bar{V}$ та $\bar{W}$.

Таким чином, отримано додаткові рівняння задані у вигляді n вимірної та m вимірної вектор-функції які пов'язують допоміжні n та m вимірні вектори $\bar{V}$ та $\bar{W}$ з властивостями цільової функції та обмежень.

Обговорення результатів. Отримане додаткове векторне рівняння додає до системи (3) $n + m$ рівнянь, отже система складається тепер з $2(n + m)$ рівнянь з $2(n + m)$ невідомими, тобто вимірність вектора стратегій та вектора обмежень не впливає на єдиність розв'язку задачі оптимізації, а кількість обмежень, що дозволяє отримати єдиний розв'язок не обмежується двома. Слід зауважити, що отримані рівняння являють собою послідовність, а отже до них входять попередні наближення вектора стратегій та множників Лагранжа. Не складно показати, що можливі два підходи до формування першого наближення.

Перший підхід. Вектор функцію обмежень зведемо до двох активних лінійних обмежень, що обмежують півпростір у який включені півпростори утворені обмеженнями нерівностями, а далі у силу лінійності функції Лагранжа по λ_{jk} -компонентам вектора множників Лагранжа для першого наближення після отримання розв'язку по (5) розглядати задачу при нелінійних обмеженнях нерівностях з урахуванням отриманого першого наближення допоміжних факторів (8) та (9) отримувати послідовність наближень.

Інший підхід до формування першого наближення. Виходячи з властивостей сідлової точки слід покласти для першого наближення $\bar{X}_{p-1} = 0,\ \bar{\Lambda}_{k-1} = 0$, а далі з урахуванням отриманого першого наближення і допоміжних векторів (8) та (9) знаходити вектори стратегій та множників Лагранжа як послідовність наближень.

Висновки

1. Застосування методу рекурентної апроксимації дозволяє підвищити ступінь повноти системи, забезпечуючи середньо – квадратичну двосторонню збіжність за умов монотонності диференційованості функції Лагранжа для обмежень нерівностей.

2. У випадку лінійних обмежень отриманні у вигляді послідовностей вирази забезпечують умови в яких вимірність вектора стратегій не впливає на єдиність розв'язку задачі оптимізації, а кількість обмежень, що дозволяє отримати єдиний розв'язок обмежується двома.

3. У випадку нелінійних цільової функції та обмежень нерівностей отриманні вирази у вигляді послідовностей забезпечують умови в яких вимірність вектора стратегій не впливає на єдиність розв'язку задачі оптимізації, а кількість обмежень, що дозволяє отримати єдиний розв'язок не обмежується.

ЛІТЕРАТУРА

1. Акоф Р. Основы исследования операций : [пер. с англ.] / Р. Акоф, М. Сасиени. – М. : Мир, 1971. – 534 с.
2. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М. : Наука, 1980. – 208 с.
3. Гермейэр Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. – М. : Наука, 1971. – 383 с.
4. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник – К., 2000. – 688 с.
5. Трунов О. М. Застосування методу рекурентної апроксимації до розв'язку нелінійних задач // Наукові праці МФ НаУКМА. – Миколаїв, 1999. – С. 135-142.
6. Трунов О. М. Дослідження збіжності розв'язків задач нелінійного програмування та оптимального проектування // Наукові праці : науково-методичний журнал. – Миколаїв : Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2009. – Випуск 104. Том. 117. – С. 68–79. – ISSN 1609-7742.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.2011 р.