

# О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГОФРИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

*Досліджено вільні коливання ортотропних гофрованих циліндричних оболонок змінної товщини на основі методу сплайн-коллокації.*

**Ключові слова:** гофровані циліндричні оболонки, метод сплайн-коллокації.

*Исследованы свободные колебания ортотропных гофрированных цилиндрических оболочек сменной толщины на основе метода сплайн-локации.*

**Ключевые слова:** гофрированные цилиндрические оболочки, метод сплайн-коллокации.

*There are researched the free vibrations of orthotropic corrugated cylindrical shells on the basis of the spline-collocation method.*

**Key words:** corrugated cylindrical shells, spline-collocation method

**Введение.** Цилиндрические тонкостенные оболочки с некруговым профилем поперечного сечения являются распространенным элементом современных машиностроительных конструкций. Статический и динамический анализ таких конструкций является очень важным этапом проектных работ.

В работах многих авторов анализировались напряжения и резонансные частоты колебаний оболочек с эллиптическим поперечным сечением [1, 2], и влияние на их распределение различных геометрических и механических факторов. Из анализа отмеченных публикаций можно сделать вывод, что динамическому анализу гофрированных оболочек уделяется гораздо меньше внимания, чем остальным типам оболочек.

Для решения указанного класса задач наряду с методами Релея-Ритца, МКЭ, конечных полос широко применяются методы сведения двумерных задач динамики оболочек к одномерным задачам на собственные значения. В последнее время в задачах вычислительной математики и механики для этих целей широко применяются системы ортогональных функций, в частности системы сплайн-функций [4]. Сплайн-функции обладают такими свойствами:

- устойчивостью относительно локальных возмущений;
- хорошей сходимостью;
- простотой и удобством организации вычислений на ПК.

В данной работе исследуются свободные колебания незамкнутых по направляющей гофрированных цилиндрических оболочек переменной толщины.

**Исходные соотношения и методика решения.** Рассмотрим задачу о свободных колебаниях ортотропной цилиндрической оболочки переменной толщины  $h(s,t)$  и произвольного очертания поперечного сечения. В качестве координатных линий выберем длины дуг по образующей и направляющей  $s$  и  $t$ .

Согласно классической теории Кирхгофа-Лява [3] уравнения, описывающие свободные колебания цилиндрических оболочек будут иметь вид:

$$C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial C_{66}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial C_{11}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + (C_{66} + C_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} + \frac{\partial C_{12}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial C_{66}}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} + k_t C_{12} \frac{\partial w}{\partial s} + k_t \frac{\partial C_{12}}{\partial s} w = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2},$$

$$C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial C_{22}}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} + (C_{66} + C_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial C_{12}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial s} - k_t D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} - k_t \frac{\partial D_{22}}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k_t D_{12} + 4D_{66} \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial s^2} - 4k_t \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial s} + k_t C_{22} \frac{\partial w}{\partial t} - k_t \frac{\partial D_{12}}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left( k_t \frac{\partial C_{22}}{\partial t} + k_t' C_{22} \right) w = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2},$$

(1)

$$D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial D_{22}}{\partial t} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial s^2} + 2 \frac{\partial(D_{12} + 2D_{66})}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial s} + \left( \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial(D_{12} + 2D_{66})}{\partial t} \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial s^2} + 4 \frac{\partial^2 D_{66}}{\partial t \partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial s} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + 2 \frac{\partial D_{11}}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \left( \frac{\partial^2 D_{11}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + k_t' C_{22} w + k_t C_{22} \frac{\partial v}{\partial t} + k_t C_{12} \frac{\partial u}{\partial s} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0.$$

где  $u(s,t,\tau)$ ,  $v(s,t,\tau)$  и  $w(s,t,\tau)$  – перемещения точек срединной поверхности оболочки;  $C_{ij}$  и  $D_{ij}$  – жесткости оболочки на растяжение-сжатие и изгиб.

На контурах  $s = const$  задаются граничные условия, которые определяются через перемещения [3]:

1) жестко закрепленный контур (C) –

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial s} = 0; \quad (2)$$

2) шарнирно закрепленный контур (Sc) –

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0; \quad (3)$$

3) шарнирно опертий контур (S) –  

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad v = w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0; \quad (4)$$

4) свободный контур (F) –  

$$N_s = 0, \quad M_s = 0, \quad S + 2k_t H = 0, \quad Q_s + \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Аналогичные условия могут быть заданы и на контурах  $t = const$ , если в уравнениях (2) – (6) сделать замену  $s \rightarrow t$ ,  $u \rightarrow v$ ,  $v \rightarrow u$ ,  $k_i \rightarrow 0$ . Кроме того, на контурах  $t = const$  можно задать условия симметрии (Sm):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} = 0. \quad (6)$$

На контурах оболочек могут быть заданы произвольные комбинации граничных условий вида (2) – (6). Например, **CCCC** – жестко закрепленная по всем контурам открытая цилиндрическая оболочка; **CSCS** – защемленная на прямолинейных торцах и опертая на криволинейных открытая цилиндрическая оболочка.

Пусть направляющая оболочки задана параметрически  $x = f_1(\theta)$ ,  $y = f_2(\theta)$ , или в полярной системе координат  $r = r(\theta)$ , где  $\theta$  – параметр направляющей.

Тогда элемент дуги направляющей  $dt = \gamma(\theta)d\theta$ , причем

$$\gamma(\theta) = \sqrt{f_1'(\theta)^2 + f_2'(\theta)^2} \quad (7)$$

или

$$\gamma(\theta) = \sqrt{r^2 + r'^2}. \quad (8)$$

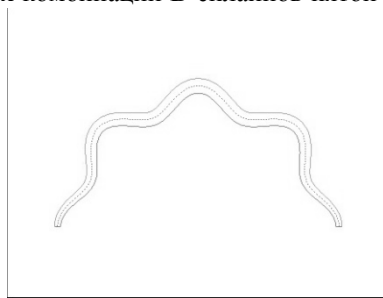
Переходя затем в уравнениях (1) – (6) от производной по дуге к производной по параметру по формуле  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\gamma(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta}$ , искомые перемещения представим в виде:

$$u(s, \theta, \tau) = e^{i\omega_0 \tau} \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \varphi_{1i}(s),$$

$$v(s, \theta, \tau) = e^{i\omega_0 \tau} \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \varphi_{2i}(s), \quad (9)$$

$$w(s, \theta, \tau) = e^{i\omega_0 \tau} \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \varphi_{3i}(s)$$

где  $u_i(\theta)$ ,  $v_i(\theta)$  и  $w_i(\theta)$  ( $i = 0..N$ ) – искомые функции;  $\varphi_{1i}(s)$ ,  $\varphi_{2i}(s)$  – функции, построенные с помощью линейных комбинаций В-сплайнов третьей степени ( $N \geq 4$ ),  $\varphi_{3i}(s)$  – функции, построенные с помощью линейных комбинаций В-сплайнов пятой степени ( $N \geq 6$ ),



$\alpha = -0,5$

которые точно удовлетворяют граничным условиям при  $s = const$  [4].

Подставив (7) в уравнения (1) – (6), будем требовать, чтобы они удовлетворялись в заданных точках коллокации  $\xi_k \in [L_-, L_+]$ ,  $k = 0..N$ , за которые выбираются корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке [0,1]. После всех преобразований получим систему  $N+1$  линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $u_i$ ,  $v_i$  и  $w_i$ , которую можно записать в нормальной форме Коши:

$$\frac{d\bar{Y}}{d\theta} = \mathbf{A}(\theta, \omega_0) \bar{Y} \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2), \quad (10)$$

где  $\bar{Y}^T = \{u, u', v, v', w, w', w'', w'''\}$  – вектор искомых функций,  $\mathbf{A}(\theta, \omega_0)$  – квадратная матрица порядка  $8(N+1) \times 8(N+1)$ .

Граничные условия (2) – (6) для системы (8) можно записать в виде

$$\mathbf{B}_1 \bar{Y}(\theta_1) = \bar{0}, \quad \mathbf{B}_2 \bar{Y}(\theta_2) = \bar{0}. \quad (11)$$

Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10) с граничными условиями (11) решалась методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [3, 4].

**Анализ результатов расчета.** С помощью вышеописанной методики исследовался спектр собственных колебаний гофрированных цилиндров переменной толщины с круговой базой (рис. 1), т.е. уравнение направляющей в полярной системе координат можно записать в таком виде:

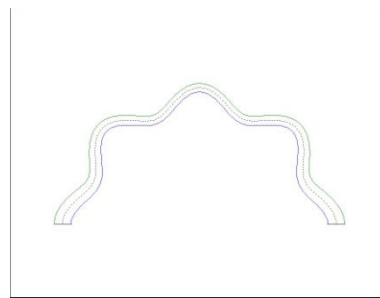
$$r(\varphi) = R_0 + a \cos(k\varphi), \quad (12)$$

где  $R_0$  – радиус базового цилиндра,  $a$ ,  $k$  – соответственно амплитуда и частота гофрировки. В данной работе были приняты такие значения этих параметров:  $R_0 = 0,044$  м,  $a = 0,004$  м,  $k = 8$ . Длина оболочки  $L = 0,12$  м.

Закон изменения толщины был выбран из соображений сохранения массы гофрированных оболочек постоянной и переменной толщины с одинаковыми радиусами и частотами гофрировки:

$$h(\varphi) = h_0 \left\{ 1 + \alpha \left[ 6 \left( \frac{\varphi}{\pi} \right)^2 - 6 \frac{\varphi}{\pi} + 1 \right] \right\}, \quad (13)$$

где  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ;  $h_0 = 0,004$  м – толщина эквивалентной по массе оболочки неизменной толщины.



$\alpha = 0,5$

Рис. 1. Спектр собственных колебаний гофрированных цилиндров переменной толщины с круговой базой.

Механические характеристики материала оболочек были выбраны одинаковыми:  $E_1 = 47,6$  МПа,  $E_2 = 20,7$  МПа,  $G_{12} = 5,31$  МПа,  $\nu_1 = 0,149$ ,  $\nu_2 = 0,065$ ,  $\rho = 1880$  кг/м<sup>3</sup>.

В таблице 1 представлены безразмерные частоты жестко зашумленных по контуру (CCCC) гофрированных цилиндров при  $|\alpha| \leq 0,5$ .

Таблица 1

$\bar{\omega}_i = \omega_i L \sqrt{\rho} \sqrt{1 - \nu_1 \nu_2} E_1$						
$i$	$\alpha = -0.5$	$\alpha = -0.4$	$\alpha = -0.3$	$\alpha = -0.2$	$\alpha = -0.1$	$\alpha = 0$
1	3,92206	3,89332	3,86049	3,81970	3,76804	3,70212
2	4,04866	4,00992	3,96842	3,92175	3,86795	3,80449
3	4,37909	4,36610	4,34898	4,32588	4,29768	4,25629
4	4,53958	4,50037	4,45466	4,39961	4,33409	4,26580
$i$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.5$	
1	3,61664	3,50362	3,32716	2,98711	2,62020	
2	3,72618	3,60375	3,35418	3,16341	2,93325	
3	4,01038	3,71453	3,55667	3,42049	3,26463	
4	4,16423	4,05661	3,93329	3,79508	3,64316	

На рис. 2 представлены графики зависимости первых частот свободных колебаний гофрированных цилиндров в зависимости от параметра сечения  $\alpha$ .

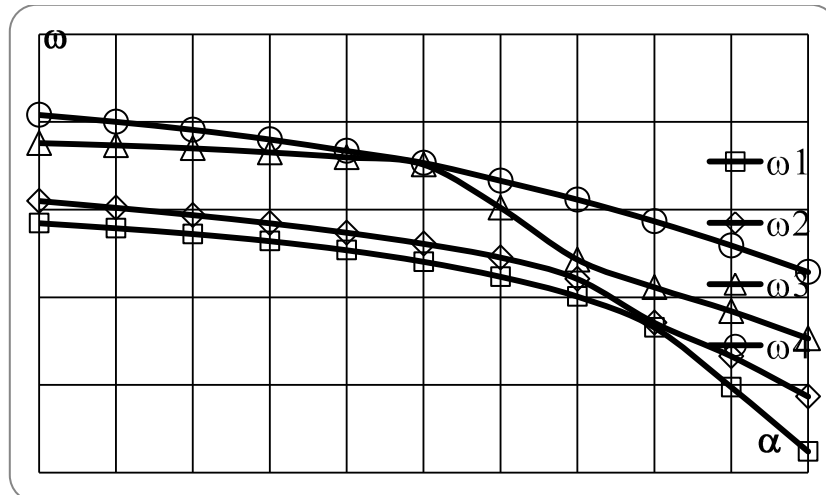


Рис. 2. Графики зависимости первых частот свободных колебаний гофрированных цилиндров в зависимости от параметра сечения  $\alpha$ .

**Выводы.** Из рассмотрения рис. 2 следует, что с увеличением параметра сечения  $\alpha$  резонансные частоты гофрированных цилиндров медленно, почти линейно убывают от отрицательных значений до нуля; далее частоты убывают очень быстро. Т.е., при сохранении веса оболочки утолщение ее торцов ведет к резкому

уменьшению значений низших резонансных частот. При утолщении же центральной области оболочки ее частоты плавно увеличиваются.

Таким образом, подбирая параметры сечения оболочки, можно в достаточно широких пределах управлять ее частотами свободных колебаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Zakhariyenko L.I. Calculation of Stress-Strain State of Orthotropic Closed and Open Non-Circular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 7. – P. 778.
2. А.Я. Григоренко, С.В. Пузырев, Е.А. Волчек Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 3. – С. 60-69.
3. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т. 4).
4. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики – К.: Либідь, 1995. – с. 260–272.

© Пузырев С.В., 2012

Дата надходження статті до редколегії 10.05.2012 р.

**ПУЗИРЄВ С. В.** – к.ф.-м.наук, доцент, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського.  
**Коло наукових інтересів:** математичне моделювання в задачах технічної механіки.