УДК 519.872

Хомченко А. Н., Барбазюк К. А.

«М'ЯКЕ» МОДЕЛЮВАННЯ НА ЕЛЕМЕНТАХ СЕРЕНДИПОВОЇ СІМ'Ї

У статті розглядаються елементи серендипової сім'ї. На прикладі бікубічної інтерполяції ілюструються ключові ідеї «м'якого» моделювання та проблема повузлового навантаження при використанні методу скінчених елементів (МСЕ).

Ключові слова: *«м'яке» моделювання, скінченний елемент, базисні функції, серендипове сімейство, повузлове навантаження.*

В статье рассматриваются элементы серендипова семейства. На примере бикубической интерполяции иллюстрируются ключевые идеи «мягкого» моделирования и проблема поузловой нагрузки при использовании метода конечных элементов (МКЭ).

Ключевые слова: *«мягкое» моделирование, конечный элемент, базисные функции, серендипово семейство, поузловая нагрузка.*

In the article described the elements of serendipity family (SSE). On example of bicubic interpolation are illustrated soft key ideas of modeling and problem of node loading by using finite element method (FEM).

Key words: *«soft» modelling, terminal element, basis functions, serendipity family, nodes-loading.*

Постановка проблеми. У 1968 році Ергатудисом, Айронсом, Зенкевичем і Ахмадом [1] було відкрито нове поняття – «серендипові скінченні елементи» (ССЕ), які начебто дуже схожі на своїх попередників «елементи Лагранжевої сім'ї», але мають великі переваги і досі спонукають науковців і дослідників шукати нові властивості цих елементів. Досі задачі локалізації повузлових навантажень вирішувалися невдало, але в «м'якому» моделюванні завдяки керуючому елементу вдалося вирішити цю проблему. «М'яке» моделювання виникло наприкінці XIX – початку XX ст., і перші публікації належать математику В. І. Арнольду [2]. На сьогодні відчувається дефіцит конкретних прикладів із «м'якого» моделювання, але на основі статті [6], яка є найбільш змістовним прикладом м'якого моделювання, ми проілюструємо ключові ідеї «м'якого» моделювання.

Аналіз попередніх публікацій, мета роботи. Серендипові скінчені елементи можна ще назвати лагранжевими елементами, але без внутрішніх вузлів. Вони мають якісну перевагу над елементами лагранжевої сім'ї. ССЕ були відкриті і названі досить випадково. Назва «serendipity» походить від 1754 р., коли англійський письменник Горацій Уолпол у листі переказав перську казку «Три принци із Серендипа» (Serendip – стародавня назва острова Цейлон). І Зінкевич запропонував відкриті ним, випадково елементи назвати «серендиповими». Як відомо, серендипові скінчені елементи були знайдені підбором поліномів за допомогою заданих граничних точок, і спочатку вважалося, що вони мають одні лише переваги, тому що завдяки цьому спеціальному перетворенню координат вдалося випрямити викривлений елемент, і тільки згодом Зінкевич, великий науковець, що відкрив ці елементи, став наголошувати на тому, що є проблеми у властивостях цих елементів. Головною проблемою виявився протиприродний розподіл вузлових навантажень по кутах, так званий «парадокс Зінкевича». Зінкевич у своїй книзі [5] наголошував на тому, що з цією проблемою доведеться змиритися, тому що виходу немає, розв'язання лише одне. Але в 1982 р. Хомченко зробив нове відкриття і пізніше розглянув цю проблему [3; 4], що з цією проблемою не потрібно змиритися, є вихід. І цей вихід полягає у введенні додаткового параметра в базисних функціях, і що в рамках традиційного матричного аналізу уникнути цих недоліків та отримати тільки додатні значення в повузловому розподілі неможливо. Він запропонував новий імовірнісно-геометричний метод конструювання базисних функцій, після розробки якого з'явилися нестандартні (альтернативні) серендипові моделі. Цей універсальний метод охоплює плоскі та просторові СЕ різної конфігурації в декартовій, полярній та циліндричній системах координат. Зрозуміло, що поява альтернативних базисів на серендипових СЕ зробила можливим розв'язання актуальної задачі оптимізації базису. Метод скінченних елементів цілком зорієнтований на застосування комп'ютерної техніки, і стоїть актуальна проблема щодо розробки математичного забезпечення скінченно-елементних розрахунків. Знаходження базисних функцій є найголовнішою проблемою, так як більшість процедур на сьогодні автоматизовані, але все ще лишається неавтоматизована одна процедура – побудова базисних функцій, де необхідне застосування людського інтелекту.

Мета роботи – на прикладі 12 вузлового ССЕ проаналізувати можливості комбінованого алебро-геометричного підходу до моделювання серендипових апроксимацій і проілюструвати ключові ідеї «м'якого» моделювання.

Основна частина. На рис. 1. бачимо представлений бікубічний елемент серендипової сім'ї – ССЕ-12. Бікубічний елемент ССЕ-12 – це квадрат, який має 12 регулярно розташованих вузлів і систему базисних функцій. Кожна базисна функція відповідає відповідному вузлу.

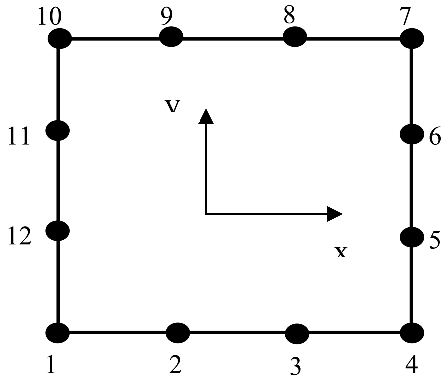

Рис. 1. Бікубічний ССЕ-12

Інтерполяційний поліном для ССЕ-12 має 12 параметрів:

$$\varphi(x,y)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 x^2+\alpha_5 xy+\alpha_6 y^2+\alpha_7 x^3+\alpha_8 x^2 y+\alpha_9 xy^2+\alpha_{10} y^3+\alpha_{11} x^3 y+\alpha_{12} xy^3 \qquad (1)$$

де: $\alpha_i\ (i=\overline{1,12})$ – невідомі коефіцієнти, які знаходять методом оберненої матриці.

Базисні функції у *стандартній моделі* для ССЕ-12 записуються так:

$$N_1=\frac{1}{32}(1+x)(1+y)(9x^2+9y^2-10),$$

$$N_2=\frac{9}{32}(1-x^2)(1+y)(1+3x),$$

$$N_3=\frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1-3x),$$

$$N_4=\frac{1}{32}(1-x)(1-y)(9x^2+9y^2-10),$$

$$N_5=\frac{9}{32}(1-y^2)(1+x)(1+3y),$$

$$N_6=\frac{9}{32}(1-y^2)(1-x)(1-3y), \qquad N_7=\frac{1}{32}(1+x)(1+y)(9x^2+9y^2-10),$$

$$N_8=\frac{9}{32}(1-x^2)(1+y)(1+3x),$$

$$N_9=\frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(1-3x),$$

$$N_{10}=\frac{1}{32}(1-x)(1-y)(9x^2+9y^2-10),$$

$$N_{11}=\frac{9}{32}(1-y^2)(1+x)(1+3y),$$

$$N_{12}=\frac{9}{32}(1-y^2)(1-x)(1-3y).$$

Отримані базисні функції [6] мають такі властивості, за умовами типу Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}, \quad (2)$$

де: δ_{ik} – символ Кронекера, i – номер функції, k – номер вузла.

При цьому виконується умова вагового балансу:

$$\sum_{i=1}^{12} N_i(x,y) = 1. \quad (3)$$

Також слід зауважити, що базисні функції забезпечують неперервність на границі.

Функції форми (базисні функції) Ni(x,y) виконують важливу роль в методі скінченних елементів – апроксимують поле в середині елемента. Від вибору апроксимуючих функцій та їх властивостей в значній мірі залежить точність розв'язку. Слід зауважити, що серендипові моделі є унікальним прикладом одночасної інтерполяції та апроксимації – вони інтерполюють функцію на границі елемента та апроксимують всередині його.

Кутову базисну функцію представляють у вигляді:

$$N = K_1(1-x)(1-y)(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 1). \quad (4)$$

Після того, як ми визначили стандартні базисні функції для ССЕ-12, визначимо основні недоліки стандартного базису:

1) велика кількість кратних нулів у кутових вузлах, що збільшує «жорсткість» моделі;

2) наявність від'ємних навантажень у кутових вузлах.

Традиційні методи побудови серендипових поліномів не мають можливості встановити причини недоліків стандартного базису скінченних елементів ССЕ-8,12,16 і т. д., тим більше не мають можливості їх усунути чи мінімізувати ці значення. Стало зрозуміло, що необхідно знайти інші підходи до задач наближення функцій поліномами серендипової сім'ї. Такі підходи є, перші спроби були не досить вдалими, але на основі методу перерізів з'явився новий імовірносно-геометричний метод. Цей метод, точніше спосіб конструювання функцій форми, використовує розбиття складних скінчених елементів на прості піделементи – трикутники і прямокутники. Завдяки цьому методу вдається, окрім стандартної моделі, отримати безліч альтернативних. Комбінований алгебро-геометричний метод [3; 4] дозволив розв'язувати новий клас задач на серендипових елементах – обернені задачі апроксимацій вищих порядків із додатковими умовами.

Однією з характеристик базису є повузловий розподіл рівномірної масової сили. Доля повузлового навантаження визначається подвійним інтегралом по області D скінченного елемента від відповідної базисної функції, зваженої з поверхневою щільністю S:

$$\gamma_i = \frac{1}{4}\iint_D N_i(x,y)\,dxdy. \quad (5)$$

Позбутися надлишкових кратних нулів у вузлах можна використовуючи підходи алгебро-геометричного методу [6], тобто за допомогою додаткових «повузлових» параметрів, додавши у поліномі ще один або кілька доданків.

Застосуємо комбінований алгебро-геометричний метод, запропонований у [6]. Він виконується поетапно:

1) із геометричних міркувань базисна функція *a priori* записується як добуток лінійних та нелінійних множників із невідомими коефіцієнтами;

2) відповідно до гіпотези Лагранжа, складається система алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується за допомогою матричних методів.

Не порушуючи характер зміни базисних функцій уздовж сторони квадрата по закону кубічної параболи, можна представити $N_1(x,y)$ та $N_2(x,y)$ у вигляді:

$$N_1 = K_1(1-x)(1-y)[1 + A(x+y) + B(x^2+y^2) + Cxy + D(x^2y + xy^2) + Ex^2y^2]; \quad (6)$$
$$N_2 = K_2(1-x^2)(1-y)(Fx + Gy + 1).$$

Множники в дужках будемо асоціювати з нелінійними площинами і поверхнями, що проходять через відповідні вузли і точку (-1, -1, 1) для першого вузла або точку (1/3, -1, 1) для другого вузла.

Відповідно до таких базисних функцій $N_1(x,y)$ та $N_2(x,y)$, інтерполяційний поліном буде мати 16 параметрів (замість стандартних 12), що симетрично розташовані в схемі Паскаля (див. рис. 2):

1
$x \quad y$
$x^2 \quad xy \quad y^2$
$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$
$x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3$
$x^3y^2 \quad x^2y^3$
x^3y^3

Рис. 2. Схема Паскаля для зміненого ССЕ-12

$$\varphi(x,y)= a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2+$$
$$+a_7x^3+a_8x^2y+a_9xy^2+a_{10}y^3+a_{11}x^3y+a_{12}xy^3+$$
$$+a_{13}x^2y^2+a_{14}x^3y^2+a_{15}x^2y^3+a_{16}x^3y^3. \qquad (7)$$

Тепер знайдемо невідомі коефіцієнти в (6), розв'язавши систему рівнянь, складену за допомогою (2):

$$\begin{cases} N_1(x_k,y_k) = 1, k = 1; \\ N_1(x_k,y_k) = 0, k = 2,3,11,12; \\ N_2(x_k,y_k) = 1, k = 2; \\ N_2(x_k,y_k) = 0, k = 3; \\ \iint\limits_D \frac{1}{4} N_1\,dxdy = \gamma, \\ \iint\limits_D \frac{1}{4} N_2\,dxdy = \frac{1}{8} - \frac{\gamma}{2}, \end{cases} \qquad (8)$$

Тепер за допомогою подвійних інтегралів, які входять до системи рівнянь (8), обчислюємо частку відповідного вузла в повузловому розподілі рівномірної масової сили, коли функції $N_1(x,y)$ та $N_2(x,y)$ уже нам відомі. Ми прирівнюємо ці інтеграли від невідомих функцій до вузлового значення рівномірної масової сили γ у вершині СЕ.

Розв'язання системи рівнянь (8) є функцією двох коефіцієнтів і значення γ, запишемо функції $N_1(x,y)$ та $N_2(x,y)$ у загальному вигляді:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(72x^2y^2\gamma+$$
$$+9x^2y^2-72x^2\gamma-72y^2\gamma+72\gamma-1);$$
$$N_2 = -\frac{9}{64}(1-x^2)(1-y)(6x+8y\gamma+$$
$$+y+8\gamma-1).$$

Таким чином, змінюючи значення коефіцієнтів C і D, ми маємо можливість конструювати нескінчену множину базисів для однакових значень γ. Тобто, при зміні значення параметра $\gamma = 0.125$ кількість параметрів полінома зменшується і ми можемо отримати 15-параметричний базис, для цього нам необхідно додати умову, що $\alpha_{16} = 0$ і D = 1, тоді отримуємо:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)[(72x^2\gamma+72y^2\gamma+$$
$$+8x^2+8y^2+144\gamma x+144\gamma y+8x+$$
$$+8y+216\gamma xy+7xy+72\gamma x^2y+$$
$$+72\gamma xy^2+72\gamma-x^2y-xy^2-1)].$$

Щоб отримати 14-параметричний базис додаємо умови, що $\alpha_{13} = 0$ і $\alpha_{16}0$, $D = 1$. Запишемо функцію:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)[(-x^2-y^2-$$
$$-10x-10y-20xy-10x^2y-10xy^2-10)];$$

Для отримання 13-параметричного базису додаємо умови $\alpha_{14} = 0$, $\alpha_{15} = 0$, $\alpha_{16} = 0$.

$$N_1(x,y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)[9x^2+9y^2+$$
$$+72\gamma xy+72\gamma x+72\gamma y+9xy+9x+$$
$$+9y+72\gamma-1].$$

Щоб отримати 12-параметричний стандартний поліном, необхідно до системи (8) додати умови: $\alpha_{13} - 0$, $\alpha_{14} - 0$, $\alpha_{15} - 0$ і $\alpha_{16} - 0$.

Цікавим також є комп'ютерний аналіз і візуалізація ліній нульового рівня – ліній перетину відповідних функцій поверхонь із площиною елемента.

Проведена на рисунках пряма пунктирна лінія – це лінія нульового рівня для N_2, що задається останньою дужкою, перші дужки N_2 – це сторони квадрату 4-7, 7-10, 10-1. Усі відомі раніше 15-параметричні базиси є окремими випадками при змінених значеннях параметру γ. Якщо $\gamma = -\frac{1}{8}$, тоді поліном має 14 параметрів. Тобто додається умова, що $\alpha_{13} = 0$. Якщо $\gamma = \frac{1}{8}$, отримаємо 13-параметричний базис. Усі зміни дуже добре можемо бачити на рис. 2-7, при змінених значеннях параметра γ:

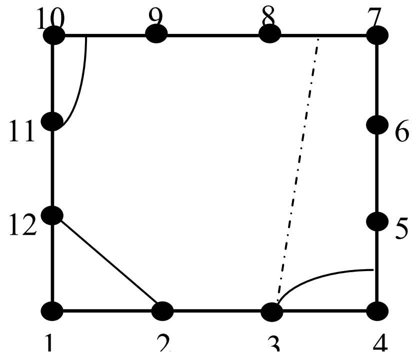

Рис. 2. $\gamma \in (-\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$

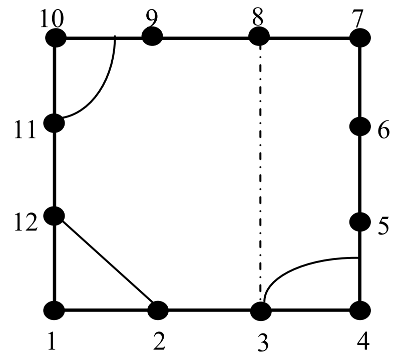

Рис. 3. $\gamma = -\frac{1}{8}$

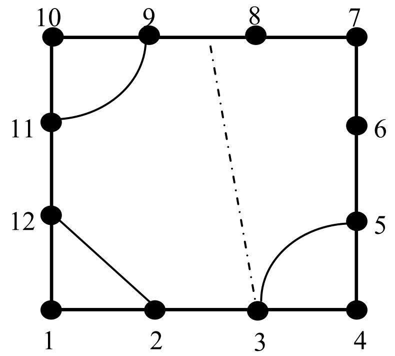

Рис. 4. $\gamma \in (-\frac{1}{8}; 0)$

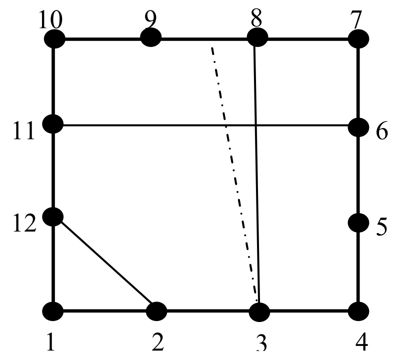

Рис. 5. $\gamma = 0$

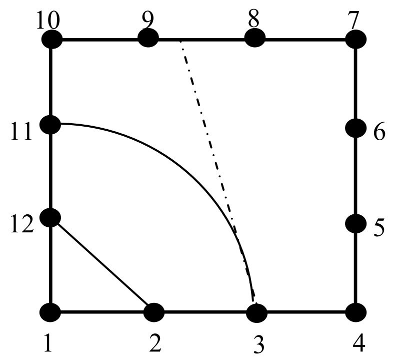

Рис. 6. $\gamma \subset (0; \frac{1}{8})$

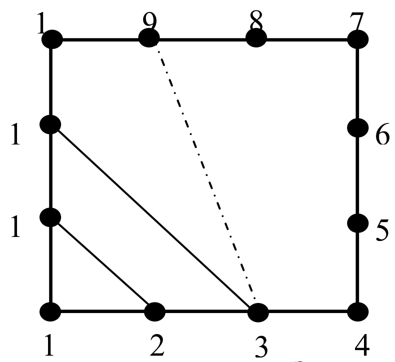

Рис. 7. $\gamma = \frac{1}{8}$

Висновки. «М'яке» моделювання біквадратичних базисів ССЕ відбувається шляхом варіювання початкових аплікат серендипових поверхонь. Отримані результати [6] такого підходу свідчать про можливість побудови нескінченої множини базисів на бікубічному ССЕ з можливістю отримання необхідної кількості параметрів інтерполяційного полінома. Також такий підхід цікаво розглянути на просторових ССЕ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ergatoudis I. Curved isoparametric «quadrilateral» elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz // Internat. J. Solids Struct., 4, 1968. – P. 31–42.
2. Арнольд В. И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2008. – 32 с.
3. Хомченко А. Н. Серендипові скінченні елементи: фізична адекватність / А. Н. Хомченко // Наукові праці: наук.-метод. журнал. – Вип. 179. Т. 191. Комп'ютерні технології. – Миколаїв : ЧДУ ім. Петра Могили, 2012. – С. 39–41.
4. Хомченко А. Н. О моделировании конечных элементов серендипова семейства / А. Н. Хомченко, Л. И. Камаева // Прикл. проблемы прочности и пластичности : Всесоюз. межвуз. сб. – Горький : ГГУ, 1985. – С. 14–17.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
6. Астионенко И. А. Обратные задачи серендиповых аппроксимаций / И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. – Выпуск 2 (35). – Херсон : ХНТУ, 2009. – С. 36–42.
7. Астіоненко І. О. Багатопараметричні інтерполяційні поліноми бікубічного елемента серендипової сім'ї / І. О. Астіоненко // Вісник Запорізького національного університету : Серія: Фізико-математичні науки. – 2009. – № 1. – С. 14–21.

 Дата надходження статті до редколегії 02.02.2013 р.

ХОМЧЕНКО Анатолій Никифорович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Чорноморського державного університету імені Петра Могили, м. Миколаїв.

Коло наукових інтересів: метод кінцевих елементів, методи геометричного моделювання.

БАРБАЗЮК Катерина Анатоліївна – магістрант факультету комп'ютерних наук Чорноморського державного університету імені Петра Могили, м. Миколаїв.

Коло наукових інтересів: методи математичного моделювання.