УДК 519

Шупик И. Е.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ КОРРЕКЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ УЧАЩИХСЯ КАК ПОВЕДЕНИЯ ОРГАНИЗАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

В работе рассмотрена задача создания математической модели динамики системы изменения физического состояния студентов как членов организационной системы, при коррекции их физического состояния. На основе использования гипотезы о движении объекта, как следствия принятия решения, построена модель объекта управления, найдено представление модели в информационном пространстве, и решена задача оптимального управления по критерию минимальных затрат информации в канале управления. Исходя из предположения выпуклости функции цели и использования градиентной процедуры поиска оптимума, определен порядок динамической системы. Естественная в таком случае процедура идентификации выполнена в рамках беспоисковой процедуры, что позволяет упростить алгоритм управления и использовать современное математическое обеспечение.

Ключевые слова: *организационная система, модель динамики, линеаризация, информация.*

У роботі розглянуто задачу створення математичної моделі динаміки системи зміни фізичного стану студентів як членів організаційної системи при корекції їх фізичного стану. На основі використання гіпотези про рух об’єкта, як наслідку прийняття рішення, побудовано модель об'єкта управління, знайдено представлення моделі в інформаційному просторі і вирішено задачу оптимального управління за критерієм мінімальних витрат інформації в каналі управління. Виходячи з припущення опуклості функції мети та використання градієнтної процедури пошуку оптимуму, визначено порядок динамічної системи. Природну, у такому випадку, процедуру ідентифікації виконано в рамках без пошукової процедури, що дозволяє спростити алгоритм управління та використовувати сучасне математичне забезпечення .

Ключові слова: *організаційна система, модель динаміки, лінеаризація, інформація.*

In this article we consider the problem of creating a mathematical model of the dynamics of change in the physical condition of students as members of the organizational system for the correction of their physical condition. Based on the use of the hypothesis of the object motion, as a consequence of the decision, was created the model of the control object, was found the representation of the model in the informational space, and the optimal control problem was solved by the minimum cost of information in the control channel. Based on the assumption of convexity of the objective function and we use the optimum gradient search procedure, which is called the procedure for the dynamic system. Naturally, in this case, the procedure performed as part of identification search procedure that allows simplifying the control algorithm, and using the current software.

Key words: *organizational system dynamics model, linearization, information.*

Введение. Задача коррекции физического состояния молодежи в период их обучения в университете связана с решением задачи управления организационной системой. Движение в данной системе происходит как результат операции принятия решения. То есть каждый из элементов системы имеет собственную функцию цели и действует таким образом, чтобы достичь ее оптимума. Таким образом, моделируя процедурой оптимизации «разумность» каждого из элементов системы формируем модель группы студентов, как объекта управления.

Состояние вопроса. Задача построения математической модели динамики организационной системы является достаточно сложной проблемой [1]. Существует множество подходов к данной задаче от попыток построения чисто статистических моделей до построения детерминированных логических структур [2; 3]. Собственно основные методы построения данных моделей относятся к проблематике искусственного интеллекта и теории активных систем. В данной работе использована абстрактная модель, построенная на последовательности процедур принятия оптимального решения в процессах взаимодействия с внешними источниками информации. При этом рассматривается достаточно узкий круг проблем связанных с функционированием группы, как организационной системы, в процессе занятий по физической подготовке в периоде обучения в университете.

Постановка задачи. В работе поставлена цель, основываясь на представлении о «разумности» элементов системы, как объектов, движение которых определяется результатом решения задачи оптимизации, построить математическую модель, достаточную для оценки динамики изменения физического состояния учащихся.

Основные результаты. При построении модели группы студентов, как объекта управления в системе коррекции физического состояния учащихся, в задаче повышения уровня физической подготовки рассмотрим отдельный элемент группы или агента. Задача контакта объекта с внешней средой в нашем случае связана с решением задачи распознавания образов, так как управление осуществляется при помощи передачи сообщений, которые надо понять. При этом объект имеет внутреннее состояние, отображающееся вектором $\boldsymbol{s}$ с размерностью dim$\boldsymbol{s}$=m. Входное воздействие описывается вектором $\boldsymbol{d}$ размерностью dim$\boldsymbol{d}$=p. Тогда состояние объекта под воздействием внешних воздействий и собственной модели, формирующий вектор $\boldsymbol{s}$, будет определяться вектором состояния **x:**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}; \qquad \dim \mathbf{x} = m + p. \tag{1}$$

Тогда, используя оператор A, можно формализовать выдвижение гипотезы как преобразование входной информации в вектор решения $\boldsymbol{y}$ [4]:

$$A_i \mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i. \tag{2}$$

Оператор A_i связан с моделью Ω и соответствует первичной гипотезе, выдвигаемой при ожидании входного сигнала:

$$A_i \in \Omega. \tag{3}$$

Это несложное условие на самом деле является ключевым и утверждает, что выбор оператора ограничен знаниями агента. В данном случае можно предположить, что оператор сформирован на основе экспертных оценок, полученных к моменту поступления входного сигнала. Естественно предположить существование оптимального решения $\boldsymbol{y}_i^*$, тогда ошибка принятия решения определяется просто:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i^*; \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i &= A\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i^*. \end{aligned} \tag{4}$$

Естественно оператор A можно усложнять и трактовать, но самое простое это считать его оптимальным.

$$\begin{aligned} &A_i^* \to \inf \boldsymbol{\varepsilon}_i; \\ &A_i^* \in \Omega. \end{aligned} \tag{5}$$

В этом случае возникает вопрос: а можно ли считать задачу решенной? Действительно в случае стационарности d**x**/dt=**0**, dA/dt=0, задача решена, и находить больше ничего не нужно.

Однако ситуация стационарности встречается редко, и ошибка становится не только переменной но и не контролируемой. Действительно, даже в задаче минимизации квадрата средней ошибки [4]:

$$A^* \to \inf M\left\{\boldsymbol{\varepsilon}^2{}_i\right\}. \tag{6}$$

Остается вопрос о правильности принятого решения. Этот вопрос решается на основе операции сравнения с оригиналом [3]. Процедура проверки правильности принятого решения формулируется как задача проверки полноты знаний об объекте.

В этом случае формируем обратный оператор A^{-1}, и с его помощью восстанавливаем входной сигнал, причем существенно, что формирование этого оператора ограничивается принадлежностью к выдвинутой гипотезе или модели:

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbf{x}}_i = A^{-1}\mathbf{y}_i;\\&A^{-1} \in \Omega.\end{aligned} \tag{7}$$

Естественно, что в силу ограниченности знаний об объекте обратный оператор не может точно воспроизвести входной образ. Однако, при правильном решении отклонение образа, генерируемого ассоциативной памятью от входного образа минимально, и для получения сильного оптимума [5] сразу рассматриваем или учитывая структуру решения:

$$|\boldsymbol{\varepsilon}| = \max\min|\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i|, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\varepsilon} = \left|\mathbf{x}_i - A^{-1}\mathbf{y}\right|_i;\\&\boldsymbol{\varepsilon} = \left|\mathbf{x}_i - A^{-1}A^{*}\mathbf{x}_i\right|.\end{aligned} \tag{9}$$

Тогда задача коррекции принятого решения превращается в задачу определения оптимального оператора ассоциативной памяти:

$$\begin{aligned}&A^{-1*} \to \min\boldsymbol{\varepsilon};\\&A^{-1*} \in \Omega.\end{aligned} \tag{10}$$

Естественно, искомый оператор это не обратная или квазиобратная матрица. Рассматриваемый оператор порождается поиском точного воспроизведения входного сигнала на основе принятого решения и знаний об объекте.

В конечном счете, это может быть матрица, но вопрос ее формирования сложнее обращения.

Существенным вопросом является обеспечение монотонности, что выполняется при условии:

$$x_i - x_i^{*} \geq 0, \qquad i = \overline{1, m+p}. \tag{11}$$

В таком случае:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left|(I - A^{-1}A^{*})\mathbf{x}_i\right| = (I - A^{-1}A^{*})\mathbf{x}_i. \tag{12}$$

Поскольку ошибка зависит только от выбора обратного оператора, то можно записать:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(A^{-1}, A, \mathbf{x}). \tag{13}$$

Необходимое условие оптимума:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial A^{-1}} = 0;\\&A^{-1*} \in \Omega.\end{aligned} \tag{14}$$

Но ошибка зависит от оператора ассоциативной памяти линейно:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial A^{-1}} = \frac{\partial(I - A^{-1}A^{*})}{\partial A^{-1}} = A^{*} \neq 0. \tag{15}$$

Следовательно, данная задача как задача линейного программирования без учета ограничений решения не имеет [6].

Вопрос ограничений – это, собственно, вопрос свойства объекта, и ответ получаем в достаточно простом виде: для построения системы распознавания, способной работать при нестационарных входных сигналах, кроме процедуры выдвижения гипотезы на основе оператора A* необходим поиск оптимального оператора ассоциативной памяти. Причем операция поиска оптимального оператора ассоциативной памяти базируется на анализе ограничений, и полный перебор ограничений обеспечивает наилучший результат.

Следовательно, процедура распознавания содержит два процесса – процесс выдвижения гипотезы, базирующийся на использовании оптимального оператора преобразования информации, и процесса проверки гипотезы, базирующийся на построении на основе ограничений модели обратного оператора.

Однако решение задачи распознавания внешнего возмущения только является подготовкой для выполнения операции принятия решения о поведении по отношению к внешней среде. В этом случае, используя гипотезу о «разумности» действий агента, введем функцию цели *f*. Функция цели формируется на основе предыдущей информации и зависит от вектора состояния $\boldsymbol{x}$ и вектора решения $\boldsymbol{y}$. Таким образом, можно записать: $f=f(\mathbf{y})$.

Или, введя вектор решения **z** и используя оператор выхода B, получаем:

$$\mathbf{z} = B\mathbf{y}. \qquad (16)$$

Принятие решения о действии рассматриваем как оптимизационную процедуру:

$$\mathbf{z}^* \to \max \; f(\mathbf{z}). \qquad (17)$$

Естественное предположение выпуклости функции цели позволяет применить градиентную процедуру поиска оптимума:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i \to \alpha \cdot grad|_{\mathbf{z}_i} f(\mathbf{y}); \qquad (18)$$
$$\mathbf{z} = B\mathbf{y}.$$

Следовательно, процедура принятия решения о действии может быть смоделирована системой с динамикой не хуже градиентной процедуры. Наличие оценки ошибки распознавания ситуации позволяет ввести оценку принятого решения, например, используя оценки рисков. Однако данный вопрос выходит за рамки рассматриваемой темы.

На рис. 1 приведена структура модели системы принятия решения агентом.

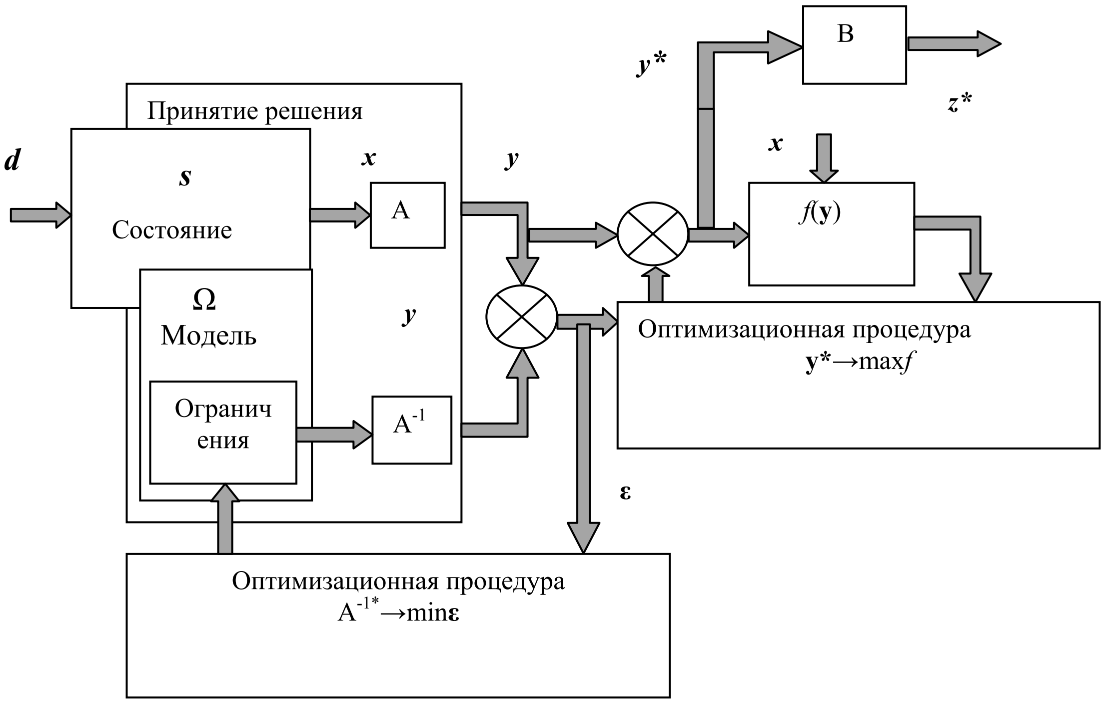

Рис. 1. Структура системы принятия решения агентом

Таким образом, модель поведения включает в себя подсистему распознавания ситуации и подсистему принятия решения. Обе подсистемы основаны на процедуре оптимизации, и можно считать, что предложенная структура обеспечивает принятие наиболее эффективного решения, с точки зрения сформированной модели и принятой функции цели.

С целью оценки адекватности модели проведена аппроксимация экспериментальных данных, полученных при подготовке спортивной команды как переходного процесса динамической системы.

Так как в математической модели определены две последовательные оптимизационные процедуры – распознавание внешней информации и принятия решения о действии, в динамической модели целесообразно рассматривать последовательность звеньев:

$$W(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1} \frac{k_2}{T_2 p + 1} . \tag{19}$$

где: k_1 – коэффициент восприятия информации;
k_2 – коэффициент выполнения решения;
T_1 – постоянная времени распознавания;
T_2 – постоянная времени принятия решения.

Структурная схема модели динамики объекта приведена на рис. 2:

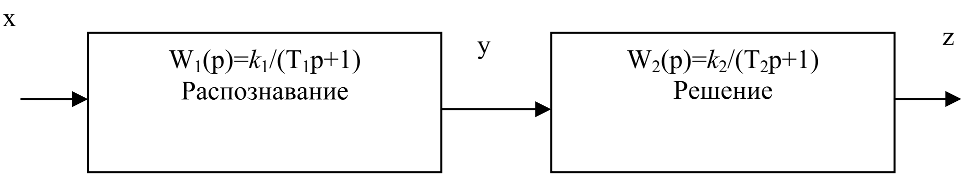

Рис. 2. Модель динамики объекта

Переходя к общей передаточной функции получаем:

$$W(p) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 T_2) p^2 + (T_1 + T_2) p + 1} . \tag{20}$$

И соответствующее дифференциальное уравнение в информационном пространстве:

$$(T_1 T_2) \frac{d^2 I_x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dI_x}{dt} + I_x = k_1 k_2 I_z . \tag{21}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$(T_1 T_2) \lambda^2 + (T_1 + T_2) \lambda + 1 = 0 . \tag{22}$$

Характер движения в данном случае – это монотонный апериодический процесс с корнями характеристического уравнения $\lambda_1 = -1/T_1$, $\lambda_2 = -1/T_2$. При этом постоянная времени в процессе распознавания меньше, чем в процессе принятия решения. Действительно, для того, чтобы понять указание преподавателя, требуется немного времени, а вот для того, чтобы выполнить требуемые действия в первый раз, необходимо гораздо больше времени.

Вид переходного процесса для $k_1 = k_2 = 1$ и постоянных времени $T_1 = 1$ с и $T_2 = 3$ с, приведен на рис. 3.

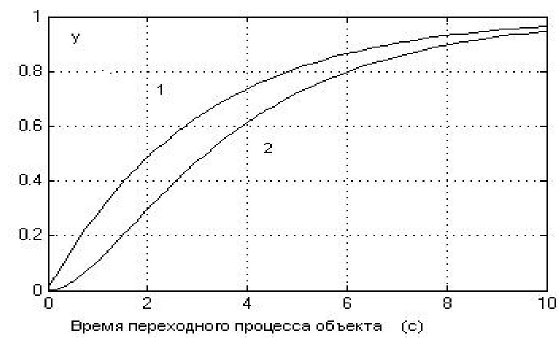

Рис. 3. Переходный процесс для модели первого порядка и модели второго порядка

В общем случае воздействия на объект нескольких источников в информационном пространстве получаем модель динамики в пространстве состояний:

$$\frac{d\mathbf{I}_x}{dt} = A\mathbf{I}_x + B\mathbf{U};$$
$$\mathbf{I}_z = C\mathbf{I}_x \qquad (23)$$

При этом матрица объекта А определяет скорости реакции системы на внешние сообщения, матрица управления В определяет приоритеты объекта, вектор управления **u** определяет цели и ограничения, являющиеся в организационной системе управлениями, и матрица С определяет степень выполнения решений.

Таким образом, динамика объекта по отношению к выполнению требований носит несложный характер, однако для достижения поставленной цели требуется учитывать не только краткосрочную реакцию объекта, но и длительный процесс изменения состояния объекта.

При построении математической модели процесса физического воспитания студентов прежде всего рассмотрим динамику изменения показателей физического состояния студента при регулярных тренировках. В таблице 1 приведены экспериментальные данные, полученные при анализе результатов в баллах, полученных командой по гимнастике в период за 1970-1988 гг. За нулевой уровень положен результат 1970 г., за единицу взят результат 1988 г. [20].

Таблица 1

Динамика роста подготовки спортивной команды

Время тренировки (месяцы)	0	24	48	72	96	120	144	168	192	216
Приближение к высшим достижениям	0	0,03	0,091	0,273	0,455	0,68	0,833	0,94	0,97	0,99

На рис. 4 приведена зависимость, полученная по данным таблицы 1, и её аппроксимация степенным рядом.

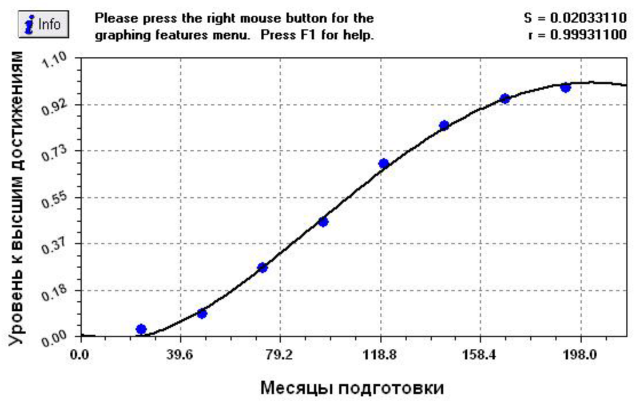

Рис. 4. Зависимость результатов команды от длительности подготовки

Для получения динамической модели процесса повышения физической подготовки проведена аппроксимация данных таблицы 1 динамической системой. Результаты аппроксимации приведены на рис. 5.

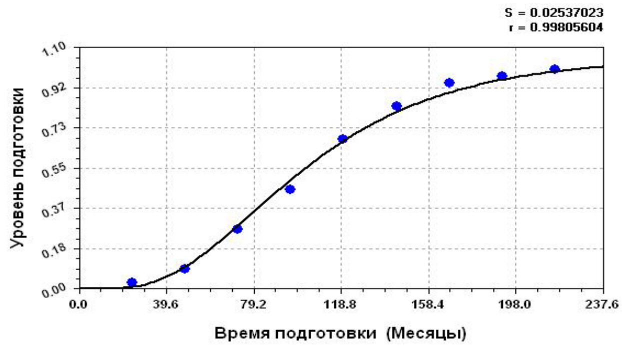

Рис. 5. Аппроксимация экспериментальных данных динамической системой

В результате наилучшее согласование экспериментальных данных и модели получено при описании объекта минимально фазовой системой пятого порядка. При этом система распадается на последовательное включение инерционных звеньев первого порядка:

$$W(p) = \prod_{i=1}^{5} W_i(p); \qquad W_i(p) = \frac{1}{50p+1} \tag{24}$$

Собственно, полученная модель отражает тот факт, что для получения высоких результатов в спорте необходимо несколько поколений спортсменов.

Естественно, в данной работе не идет речь о спорте высоких достижений, но вид модели остается постоянным и меняются только параметры, что связано с индивидуальными возможностями учащегося.

Таким образом, математическая модель динамики изменения степени подготовленности учащегося W описывается системой из трёх элементов – динамики восприятия внешней среды W_1, динамики принятия решений W_2 и динамики изменения уровня подготовленности W_3:

$$W(p) = \prod_{i=1}^{3} W_i(p); \quad W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p+1}; \quad W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p+1}; \quad W_3(p) = \frac{k_3}{T_3 p+1} \tag{25}$$

Таким образом, при идентификации необходимо определить:
T_1 – постоянную времени восприятия;
T_2 – постоянную времени принятия решения;
T_3 – постоянную времени изменения состояния;
k_1 – коэффициент восприятия;
k_1 – коэффициент выполнения;
k_3 – коэффициент физического развития.

Естественно, время восприятия и принятия решения значительно меньше времени изменения состояния, поэтому целесообразно рассматривать модель изменения состояния как самостоятельную модель.

Динамика системы в информационном пространстве описывается дифференциальным уравнением третьего порядка:

$$\frac{d^3 I_x}{dt^3} + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right)\frac{d^2 I_x}{dt^2} + \left(\frac{1}{T_1}\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_2}\frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_3}\frac{1}{T_1}\right)\frac{dI_x}{dt} + \left(\frac{1}{T_1}\cdot\frac{1}{T_2}\cdot\frac{1}{T_3}\right) = k_1 k_2 k_3 I_y \tag{25}$$

При идентификации объекта удобно воспользоваться значительным различием постоянных времени распознавания T_1, решения T_2 и изменения состояния T_3.

В таком случае идентификация содержит три шага:

– в интервале времени $0 < t < 60$ секунд идентифицируем модель распознавания, определяя T_1 и k_1;

– в интервале $1 < t < 24$ часа идентифицируем модель принятия решения, определяя T_2 и k_2;

– в интервале $6 < t < 12$ месяцев идентифицируем модель изменения состояния, определяя T_3 и k_3.

Естественно, данная процедура занимает значительный временной интервал, но таковы особенности объекта управления.

При построении модели поведения системы из нескольких студентов – группы – необходимо учитывать, что информационный поток формируется как совокупность сообщений от различных источников. В этом случае входная величина описывается вектором I_x.

Выводы. Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. Модель динамики организационной системы базируется на свойствах процедур оптимизации частных функций цели.

2. Распознавание, как стадия формирования поведения, базируется на операциях выдвижения и проверки гипотез.

3. Линеаризованная модель динамики изменения физического состояния учащегося содержит две подсистемы – это подсистема, определяющая модель динамики восприятия и принятия решения о действии, и подсистема, описывающая изменение состояния в периоде обучения.

4. Управление в системе представляет собой поток сообщений, поступающий от преподавателя как центра системы.

5. Управляющее сообщение содержит предлагаемую функцию цели и налагаемые ограничения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Д. А. Курс теории активних систем / Д. А. Новиков, С. Н. Петраков. – М. : CYNTU, 1999. – 104 с.
2. Згуровский М. З. Интегрированные системы оптимального управления и проектирования : [учебн. пособие] / М. З. Згуровский. – К. : Высшая шк., 1990. – 351 с.
3. Бондарев В. Н. Искуственный интеллект : [учебн. пособие для вузов] / В. Н. Бондарев, Ф. Г. Аде. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2002. – 615 с.
4. Комашинский В. И. Нейронные сети и их применение в системах управления и святи / В. И. Комашинсский. – М. : Горячая линия – Телеком, 2003. – 94 с.
5. Хайкин Нейронные сети : [полный курс]. – 2-е издание ; [пер. с англ.]. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
6. Черноруцкий И. Г. Методы оптимизации в теории управления : [пособие для вузов] / И. Г. Черноруцкий. – СПб. : Питер, 2004. – 256 с.

Дата поступления статьи в редколлегию 02.02.2013 г.