

МОДЕЛЮВАННЯ ПУЛЬСОВИХ ХВИЛЬ ЗАСОБАМИ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ MAPLE

У статті розглянуто точні рішення диференціального рівняння в частинних похідних Кортвега-де-Вріза (КдВ) засобами системи комп'ютерної математики Maple 17 (програмний пакет PDEtools). Рівняння КдВ застосовують для опису процесів розповсюдження пульсових хвиль по кровоносних судинах. Показано, що точні рішення у вигляді біжучих хвиль можуть бути задані як у формі кіноїдальних хвиль, які описуються через еліптичну функцію Якобі ($sn(z)$), так і у формі відокремлених хвиль, солітонів, які описуються гіперболічними функціями ($sech(z)$). При цьому солітонні рішення є граничним випадком кіноїдальних хвиль за умови, що їх період прямує до нескінченості. Періодичність кіноїдальних хвиль зумовлює їх більшу адекватність об'єкту під час математичного моделювання пульсових хвиль.

Ключові слова: Maple, рівняння Кортвега-де-Вріза, кіноїдальні хвилі, солітони, пульсові хвилі, математичне моделювання.

В статье рассматриваются точные решения дифференциального уравнения в частных производных Кортвега-де-Вриза (КдВ) средствами системы компьютерной математики Maple 17 (программный пакет PDEtools). Уравнение КдВ применяют для описания процессов распространения пульсовых волн в кровеносных сосудах. Показано, что точные решения в виде бегущих волн могут быть заданы как в форме киноидальных волн, которые описываются через эллиптическую функцию Якоби ($sn(z)$), так и в форме уединенных волн, солитонов, которые описываются гиперболическими функциями ($sech(z)$). При этом солитонные решения являются предельным случаем киноидальных волн при условии, что их период стремится к бесконечности. Периодичность киноидальных волн обуславливает их большую адекватность объекту при математическом моделировании пульсовых волн.

Ключевые слова: Maple, уравнение Кортвега-де-Вриза, киноидальные волны, солитоны, пульсовые волны, математическое моделирование.

Exact solitons of differential equation in partial derivatives by Kortveg-de-Vries (KdV) are studied with Maple computer mathematics system (software package PDEtools). KdV equation used to describe processes of pulse waves in blood vessels. It is shown that the exact solutions in the form of traveling waves can be set in the form of cnoidal waves, which are described through an elliptical Jacobi function ($sn(z)$), as well as in the form of solitary waves, solitons, which describes the functions of the hyperbolic type ($sech(z)$). The solitons solutions are the limiting case cnoidal waves, provided their period tend to infinity. Cnoidal wave's periodicity offers them more object adequacy within mathematical modeling of pulse waves.

Key words: Maple, Kortveg-de-Vries equation, cnoidal waves, solitons, pulse waves, mathematical modeling.

Постановка проблеми. Під час систоли (скорочення) серце перекачує кров в аорту, причому у перший момент деформується (розтягується) лише прилегла частина аорти. Утім підвищений тиск у цій частині аорти долає інерцію крові, і фронт хвилі, розтягуючи стінки судини, поширюється далі вздовж аорти. Це явище називають поширенням пульсової хвилі в артеріях [1]. Можна також казати, що розповсюдження

хвилі тиску та деформацій стінок артерії зі швидкістю, яка значно перевищує швидкість переносу рідини каналом, називають пульсовою хвилею [2]. Математичне моделювання пульсових хвиль є актуальною задачею з огляду на діагностичні можливості, які надає їх вивчення.

Аналіз досліджень і публікацій. У 1895 році датські вчені Дідерик Йоганнес Кортвег та Густав де-Вріз розглянули рівняння, якому підкоряються

хвилі на воді, за умови відсутності вихрів та незмінної густини рідини. Рівняння Кортевег-де-Вріза (КдВ) на початку описувало випадок відносно довгих хвиль на відносно неглибокій воді [3].

Останнім часом рівняння КдВ інтенсивно використовують для математичного моделювання пульсових хвиль [2]. Дійсно, пульсові хвилі багато у чому нагадують відокремлені хвилі, так звані солітони, які є одним з точних рішень рівняння КдВ [2; 3; 4; 5]. Зокрема, вони розповсюджуються з постійною швидкістю, характерною для солітонів КдВ, не змінюючи при цьому своєї форми, і виразно локалізовані у просторі в кожний окремий момент часу [4].

Утім відомо, що пульсові хвилі періодичні в часі, у той час як солітони є усамітненими, відокремленими хвилями. Цей очевидний дисонанс змушує шукати адекватніші математичні моделі для пульсових хвиль.

Метою цієї роботи є демонстрація можливостей системи комп'ютерної математики Maple 17 у побудові адекватної математичної моделі для

пульсових хвиль. Відповідні програмні коди Maple наведені в окремому розділі разом із коментарями

Виклад основного матеріалу. Рівняння, отримане Кортевегом та де-Врізом, має вигляд нелінійного диференціального рівняння третього порядку в частинних похідних

$$u_t + 6u \cdot u_x + u_{uu} = 0, \quad (1)$$

де $u(x, t)$ – функція, яка описує деформацію або тиск уздовж артерії залежно від координат та часу, а індексами в рівнянні (1) позначені відповідні частинні похідні цієї функції. Нелінійність рівняння (1) зумовлене другим доданком.

Рівняння КдВ має відоме періодичне рішення, яке можна задати через спеціальну функцію, так звану еліптичну функцію Якобі [4]. Додатково рівняння (1) має рішення у вигляді відокремленої хвилі, так званого солітону, яке задається через гіперболічні функції [2].

Програмний пакет PDEtools системи Maple дозволяє записати обидва ці рішення в таких формах:

$$u_s(x, t) = 2C_3^2 \left(\frac{C_3}{C_2} \right) \operatorname{sech}(C_2 x + C_3 t + C_1) - \frac{1}{6} \left(\frac{C_3}{C_2} \right) (4C_3^2 + 1); \quad (2)$$

$$u_{cn}(x, t) = 2C_1^2 C_4^2 \left(\frac{C_4}{C_3} \right) \operatorname{sn}(C_3 x + C_4 t + C_2 | C_1)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{C_4}{C_3} \right) (4C_1^2 C_4^2 + 4C_4^2 - 1), \quad (3)$$

де C_n ($n=1, \dots, 4$) – константи інтегрування, $\operatorname{sn}(\xi | k)$ – еліптичний синус Якобі, $\operatorname{sech}(\xi)$ – гіперболічний секанс.

Неважко перевірити валідність обох рішень, які обидва мають характер біжучих хвиль. Розглянемо, насамперед, рішення (3), яке вочевидь описує так звані кіноідальні хвилі, оскільки

містить еліптичну функцію Якобі ($\operatorname{sn}(\xi | k)$).

Покладемо константу $C_2 = 0$, бо вона визначає лише початкову фазу еліптичного синусу, і позначимо перший аргумент (фазу) функції Якобі через $\xi = C_3 x + C_4 t$. Тоді рішення (3) можна переписати у такому вигляді:

$$u_{cn}(x, t) = \frac{2}{3} \left(\frac{C_4}{C_3} \right) (3C_1^2 C_4^2 \operatorname{sn}(\xi | C_1)^2 - C_1^2 C_4^2 - C_4^2 + \frac{1}{4}). \quad (4)$$

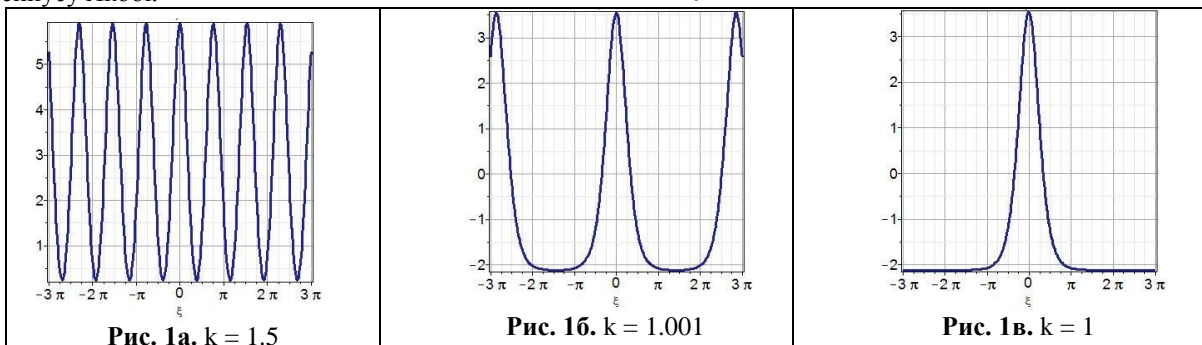
Далі можна покласти $C_4 = \sqrt{2}$, $C_3 = 1$, оскільки ці константи визначають лише амплітуду кіноідальної хвилі, яка для нас зараз не важлива, а

також $C_1 = k$. Як наслідок (4) спрощується до вигляду:

$$u_{cn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{2}}{8} (24k^2 \operatorname{sn}(\xi, k)^2 - 8k^2 - 7), \quad (5)$$

де ξ, k – відповідно фаза та модуль еліптичного синусу Якобі.

Побудуємо графіки функції (5) залежно від фази ξ при різних значеннях її модуля k (рис. 1)



З графіків кіноїдальних хвиль з різними періодами та амплітудами, залежними від модуля еліптичної функції Якобі, можна візуально переконатися як поступово кіноїдальна хвиля (рис. 1а, б) перетворюється на відокремлену хвилю (за умови $k \rightarrow 1$ на рис. 1в).

Тепер можна розглянути також рішення (2), яке описує солітон. Покладаючи

$$C_1 = 0, C_2 = C_3 = 1, C_2x + C_3t + C_1 = \xi, \text{ маємо}$$

$$\lim(u_{cn}(\xi, k)) = \frac{\sqrt{2}}{2 \cosh(\xi)^2} (3 \cosh(\xi)^2 - 8) = 2\sqrt{2} (2 \sec h(\xi)^2 - \frac{3}{4}). \quad (7)$$

Порівнюючи вирази (6) та (7), можна переконатися, що вони є масштабованими та зсунутими копіями одне одного. Отже, кіноїдальна хвиля (5) у граничному випадку $k \rightarrow 1$ перетворюється на відокремлену хвилю (6), тобто солітон.

Цікаво відмітити, що амплітуда та період кіноїдальних хвиль (5) зменшуються, якщо модуль еліптичної функції приймає значення з інтервалу $1 > k > 0$, а за умови $k \rightarrow 0$ функція (5) має межею деяку константу (за обраних вище значень констант інтегрування вона дорівнює $\frac{7}{6} \sqrt{2}$). У

той же час період кіноїдальних хвиль зменшується, а їх амплітуда зростає, якщо модуль еліптичної функції зростає в інтервалі величин $1 < k < \infty$. Отже, період кіноїдальних хвиль є максимальним за умови $k = 1$, як це видно з рис. 1в.

Висновки. Пакет «PDEtools» системи комп'ютерної математики Maple надає можливість отримати два точні рішення типу біжучої хвилі, у вигляді кіноїдальних хвиль та відокремленої хвилі, солітону, для диференціального рівняння Кортевега-де-Вріза, а також знайти нетривіальний зв'язок поміж цими рішеннями. Як наслідок, кіноїдальні хвилі виглядають адекватною математичною моделлю для пульсових хвиль. З одного боку, кіноїдальні хвилі з відносно великими періодами є близькими за формою та властивостями до солітонів, з іншого боку, вони мають виразну періодичність як і реальні пульсові хвилі.

Програмні коди Maple (# - символ коментаря)
`> restart;`
`> KdV:=diff(u(x,t),t)+6*u(x,t)*diff(u(x,t),x)+diff(u(x,t),t$3)=0; # Рівняння КдВ`
`> sol:=PDEtools[TWSolutions](KdV,singsol=false, functions = [sech, JacobiSN]); # Рішення рівняння КдВ типу біжучих хвиль, записані через гіперболічні функції та еліптичні функції Якобі`

з (3) такий простий вираз:

$$u_s(\xi) = 2 \sec h(\xi)^2 - \frac{5}{6}. \quad (6)$$

Графік функції (6) за формою аналогічний графіку відокремленої хвилі на рис. 1в. Знайдемо межу виразу (5) за умови, що $k \rightarrow 1$:

```
> pdetest(sol[1],KdV); pdetest(sol[2],KdV); #
Перевірка рішень на валідність
> cw:=factor(-2*_C1^2*_C4^3*JacobiSN(xi,
_C1)^2/_C3+_C4*(4*_C1^2*_C4^2+4*_C4^2-
1)/(6*_C3)); # Факторизація кіноїдального рішення
> cw1:=unapply(eval(cw,[_C1=k,_C3=1,_C4=sqrt
(2)]),xi,k); # Спрощення рішення
>> g1:=plot(cw1(xi,1.5),xi=-
3*Pi..3*Pi,thickness=3,gridlines=true,axes=boxed,c
olor=navy,title='Рис.6а,
k=1.5',titlefont=[Arial,14]);
g2:=plot(cw1(xi,1.1),xi=-
3*Pi..3*Pi,thickness=3,gridlines=true,axes=boxed,c
olor=navy,title='Рис.6б,k=1.1',titlefont=[Arial,14]);
g3:=plot(cw1(xi,1.001),xi=-
3*Pi..3*Pi,thickness=3,gridlines=true,axes=boxed,c
olor=navy,title='Рис.6в,
k=1.001',titlefont=[Arial,14]);
g4:=plot(cw1(xi,1),xi=-
3*Pi..3*Pi,thickness=3,gridlines=true,axes=boxed,c
olor=navy,title='Рис.6г,k=1, відокремлена
хвиля',titlefont=[Arial,14]);# Побудова графіків
>> B:=Array(1..4,[g1,g2,g3,g4]);
plots[display](B,font=[Arial,14]); # Створення
масиву з графіками та їх вивод
>> sw:=factor(2*_C3^3*sech(xi+_C1)^2/_C2-
_C3*(4*_C3^2+1)/(6*_C2));
sw1:=eval(sw,[_C1=0,_C2=1,_C3=1]); #
Факторизація солі тонного рішення
> plot(sw1,xi=3*Pi..3*Pi,thickness=3,gridlines
=true,axes=boxed,color=navy,title='Рис.7,
Відокремлена хвиля -
солітон',titlefont=[Arial,14],font=[Arial,14]); #
Побудова графіку солітонного рішення
> sol_1:=simplify(limit(cw1(xi,k),k=1));
sol_2:=4*sqrt(2)*sech(xi)^2/sqrt(2); #
Знаходження межі кіноїдального рішення
> simplify(sol_1-sol_2); # Перевірка тотожності
знайденої межі
```

ЛІТЕРАТУРА

1. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов / Т. Педли. – М. : Мир, 1983. – 400 с.
2. Волобуев А. Н. Течение жидкости в трубках с эластичными стенками / А. Н. Волобуев // Успехи физических наук. – 1995. – Т. 165. № 2. – С. 177–186.
3. Korteweg D. J. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves / D. J. Korteweg, G. de Vries // Philosophical Magazine. – 1895. – V. 39. – P. 422–443.

4. Drazin P. G. Solitons: an introduction / P. G. Drazin, R. S. Johnson. – Cambridge : Cambridge University Press, 1989.
5. Honglei Wang. Jacobi elliptic function solutions for the modified Korteweg-de Vries equation / Honglei Wang, Chunhuan Xiang // Journal of King Saud University. – Science. – July 2013. – V. 25. Issue 3. – P. 271–274.

© Чуйко Г. П., Дворник О. В.,
Шиян С. І., 2014

Дата надходження статті до редколегії 05.05.2014 р.

ЧУЙКО Геннадій Петрович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри медичних приладів і систем, Чорноморський державний університет імені Петра Могили.

Коло наукових інтересів: методи математичного моделювання.

ДВОРНИК Ольга Василівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри медичних приладів і систем, Чорноморський державний університет імені Петра Могили.

Коло наукових інтересів: методи математичного моделювання.

ШИЯН Сергій Іванович – аспірант кафедри медичних приладів і систем Чорноморського державного університету імені Петра Могили.

Коло наукових інтересів: математичне моделювання, інформаційні технології.