УДК 514.18

Борисенко В. Д.,
д-р техн. наук, професор кафедри комп'ютерної інженерії, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського, м. Миколаїв, Україна

Устенко С. А.,
д-р техн. наук, доцент, завідувач кафедри комп'ютерної інженерії, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського, м. Миколаїв, Україна

Устенко І. В.,
канд. техн. наук, доцент кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем, Національний університет кораблебудування ім. адмірала Макарова, м. Миколаїв, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДЕНИХ КРИВИХ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЛІНІЙНИХ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ЇХ КРИВИНИ

У роботі пропонується числовий метод геометричного моделювання складених кривих, кожна ділянка з яких формується за умови, що їх кривина лінійно залежить від довжини дуги. Невідомі коефіцієнти лінійних залежностей визначаються шляхом мінімізації відхилення точок, отриманих у результаті роботи алгоритму мінімізації, від точок, які задаються з вихідними даними. Крім координат точок, розраховуються або задаються кути нахилу дотичних до кривої, що моделюється. Комп'ютерна реалізація запропонованого методу підтвердила його працездатність.

Ключові слова: *моделювання; складена крива; лінійний закон розподілу кривини.*

Постановка проблеми. Криві лінії займають особливе положення в різних галузях науки і техніки. Вони застосовуються при розв'язуванні різноманітних наукових та інженерних задач, у геометричному моделюванні різних технічних об'єктів. Обриси багатьох споруд, деталей машин і механізмів подаються лініями. Кривими лініями описують обводи суден, літаків, автомобілів, лопаток турбін і компресорів тощо. За їх допомогою можна наочно простежити траєкторію руху об'єктів, хід того чи іншого процесу, відобразити результати експериментальних досліджень або теоретичних розрахунків. Вони надають можливість краще розуміти геометричні властивості тієї чи іншої залежності, дослідити закономірності, для яких ще не знайдено аналітичного виразу, розв'язати певну наукову або інженерну задачу.

Незважаючи на те, що фахівці з геометрії та інших прикладних галузей науки розробили достатньо різноманітних методів моделювання кривих, усе ж таки і на сьогодні існує низка задач, які не знижують зацікавленості науковців у подальшому розвитку нових підходів до формоутворення кривих. У першу чергу це відноситься до виробів технологічно складних галузей промисловості. Розробці нових методів моделювання кривих також сприяло зростання можливостей комп'ютерної техніки в плані відображення графічних даних на екранах персональних комп'ютерів.

Треба зазначити, що змодельована крива повинна бути гладкою лінією, мати похідні, при чому чим вищим буде порядок похідних, тим вищим буде ступінь гладкості лінії. Хоча в багатьох практичних застосуваннях достатньо гладкою кривою буде така, що має перші й другі похідні, які, у підсумку, забезпечують задовільний розподіл кривини.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У сучасній літературі [1–6; 11] можна знайти різні способи аналітичного визначення плоских кривих. При цьому існують способи, які однозначно описують криву. Сюди відносяться алгебраїчні та різноманітні трансцендентні криві, тобто такі криві, що мають певну аналітичну залежність, яка пов'язує ординату та абсцису будь-якої точки кривої в явному або неявному вигляді. Сюди відносяться також і параметричні криві.

З появою обчислювальної техніки в справі геометричного моделювання кривих ліній широко застосовуються такі методи, як метод Ерміта [5], метод Безьє [5], метод Бола [8], метод бета-сплайнів [2], метод Catmull-Rom [9], метод *B*-сплайнів [11]. Певного поширення, особливо в комп'ютерній графіці, набули так звані NURBS-криві, які є неоднорідними раціональними сплайнами Безьє і задаються координатами початкової і кінцевої точок та сукупністю проміжних точок [11]. Усі ці перелічені методи мають певне аналітичне підґрунтя, у зв'язку з чим відпадає необхідність запам'ятовувати кожну точку кривої, що моделюється. Це дозволяє створювати складні криволінійні об'єкти з невеликою кількістю управляючих вершин. Але саме доцільний вибір координат управляючих вершин є трудомісткою операцією для отримання бажаного результату моделювання того чи іншого об'єкта або процесу.

При моделюванні кривих дуже часто застосовуються їх параметричні рівняння, в яких за параметр приймається довжина дуги кривої. У літературі можна знайти приклади кривих, які мають натуральні рівняння, тобто для них можуть бути знайдені рівняння у функції довжини дуги. Але подібних кривих дуже мало і не всі вони можуть бути корисними в практичних застосуваннях.

Однією з перших робіт, у яких розглядається питання моделювання кривих на підставі лінійного закону розподілу кривини, слід вважати роботу [7]. Більш наближеною до тематики цієї статті є робота [1], в якій криві моделювалися із застосуванням лінійних графіків розподілу кривини, але в ній застосований інший математичний метод визначення невідомих величин рівняння кривини, зокрема числовий метод Ньютона розв'язання системи нелінійних інтегральних рівнянь, який, як відомо, має справу з частинними похідними, і тому в деяких випадках обчислювальний процес буває розбіжним.

Різні закони розподілу кривини для плоских кривих і кривини та скруту для просторових кривих стосовно профілів лопаток турбін і компресорів газотурбінних двигунів досліджено в роботі [4].

Формування цілей статті. Метою цієї статті є подальший розвиток методу моделювання кривих, які складаються з певної кількості ділянок, що будуються у натуральній параметризації, коли за параметр вибирається довжина дуги. В роботі при моделюванні складених кривих для кожної із складових ділянок застосовуються лінійні закони розподілу кривини від довжини дуги. За вихідні дані при побудові складеної кривої приймаються координати деякої сукупності точок та кути нахилу в них дотичних до кривої, що моделюється. Це в певній мірі відповідає підходу, який застосовується при побудові кривих (сплайнів) Ерміта, але сплайнова крива Ерміта відноситься до кривих, що визначаються параметричними рівняннями третього ступеня.

Виклад основного матеріалу дослідження. З диференціальної геометрії відомо, що плоска крива може бути однозначно визначена її натуральним рівнянням:

$$k = k(s), \tag{1}$$

де k – кривина кривої; s – довжина дуги.

Відомо, що кривина кривої k визначається наступною залежністю:

$$k(s) = \frac{d\varphi}{ds}, \tag{2}$$

де φ – кут, утворений між дотичною до кривої та віссю абсцис.

Розглянемо деяку довільну ділянку кривої, показаної на рис. 1. На цьому рисунку застосовані наступні позначення: S – довжина дуги кривої; ds – приріст довжини дуги; dx і dy – прирости декартових координат; φ(0) – кут нахилу дотичної в початковій точці ділянки кривої (надалі він приймається за сталу інтегрування); φ(S) – кут нахилу дотичної в кінцевій точці ділянки кривої.

Кривій, показаній на рис. 1, відповідає деякий графік розподілу кривини $k(s)$, побудований залежно від довжини дуги кривої.

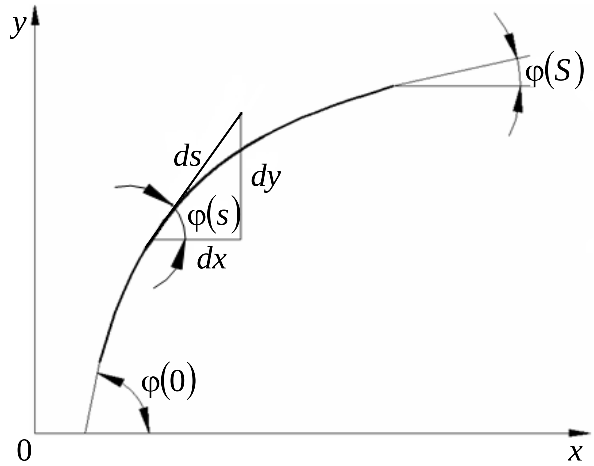

Рис. 1

Якщо кривина кривої вигляду (1) подається залежністю з відомим рівнянням, то можна змоделювати криву, що відповідає цій залежності.

З виразу (2) знаходять диференціал кута $d\varphi$, проінтегрувавши який визначають кут нахилу дотичної до кривої в довільній її точці:

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s k(s)ds\,. \tag{3}$$

З розгляду рис. 1 випливає, що

$$dx = ds\cos\varphi(s);\; dy = ds\sin\varphi(s).$$

Інтегруванням цих виразів отримують параметричне рівняння кривої залежно від довжини дуги:

$$\begin{aligned} x(s) &= x(0) + \int_0^s \cos\varphi(s)ds; \\ y(s) &= y(0) + \int_0^s \sin\varphi(s)ds. \end{aligned} \tag{4}$$

У цій роботі розглядається випадок моделювання кожної i-ої ділянки складеної кривої, коли кривина кривої k_i вздовж дуги обводу s змінюється за лінійним законом:

$$k_i(s) = a_i s + b_i. \qquad (5)$$

Якщо коефіцієнти a_i і b_i відомі, то можна розрахувати координати x і y кривої, застосувавши записані вище вирази. В цій роботі пропонується визначати вказані коефіцієнти, виходячи з умов, які подаються до кривої, що моделюється. При цьому розглядається випадок, коли відомі початкова і кінцева точки i-ої ділянки кривої та кути нахилу в них дотичних.

Із рівняння (3), з урахуванням закону зміни кривини кривої від довжини її дуги, взятому у вигляді (5), можна знайти залежність кута нахилу дотичної вздовж ділянки кривої:

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \frac{as^2}{2} + bs.$$

Наприкінці i-ої ділянки цей вираз набуде вигляду:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{a_i S_i^2}{2} + b_i S_i.$$

У цьому виразі три невідомих величини. Це коефіцієнти a_i та b_i, а також довжина дуги ділянки S_i. Але з цього виразу можна визначити невідомий коефіцієнт a_i

$$a_i = \frac{2}{S_i}\left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{S_i} - b_i\right),$$

і таким чином зменшити кількість невідомих, які підлягають визначенню, до двох.

Зрозуміло що, аналітично поставлену задачу розв'язати неможливо, тому застосовано числовий метод її вирішення, зокрема метод мінімізації. За цільову функцію в цій задачі взято відхилення кінцевої точки кривої, що проміжно розраховується, від заданої точки. Тобто застосовано наступний функціонал:

$$\delta_i = \sqrt{(\bar{x} - x_{i+1})^2 + (\bar{y} - y_{i+1})^2},$$

де $\bar{x}, \bar{y}$ – координати проміжної точки, визначеної з деякими значеннями невідомих параметрів.

Отже, задавшись деякими значеннями невідомих коефіцієнта b_i та довжини дуги ділянки S_i, можна за виразами (4) розрахувати проміжні значення координат кінцевої точки i-ої ділянки, які, цілком зрозуміло, не будуть збігатися з вихідними значеннями координат кінцевої точки ділянки, що розглядається.

Для мінімізації записаного вище функціоналу застосовано високоефективний алгоритм, запропонований Хуком-Дживсом [10] і призначений для мінімізації функції багатьох змінних. Перевагою цього алгоритму є те, що він не передбачає визначення частинних похідних від функції, яка мінімізується. Загально відомо, що саме частинні похідні при числовому їх знаходженні дуже часто ускладнюють пошук оптимальних параметрів, оскільки числовому визначенню похідних притаманні певні коливання і, навіть, похибки.

Алгоритм Хука-Дживса не передбачає наявності обласних обмежень параметрів, що оптимізуються. Це є дуже важливим для розв'язання задач, коли межі варіювання параметрів невідомі. Але за необхідності врахування обласних обмежень до функціоналів, що мінімізуються, додаються функції штрафів, які різко збільшують значення функціоналу при виході якоїсь змінної за дозволені межі їх варіювання.

При розв'язуванні задачі мінімізації задається вихідна точка в просторі параметрів, що оптимізуються. Процес розрахунків закінчується, коли кінцева точка проміжної ділянки кривої наближається до заданої точки з наперед обумовленою точністю.

Таким чином, застосувавши алгоритм мінімізації Хука-Дживса для кожної ділянки складеної кривої, можна визначити з достатньою точністю значення коефіцієнта b_i і довжини дуги ділянки S_i.

Деякі результати моделювання складених кривих, кожна ділянка з яких підпорядковується лінійному закону розподілу кривини, наведені на рис. 2–5. Перш за все, треба відмітити, що запропонований метод моделювання складених кривих є працездатним. Це наочно підтверджують наведені графічні результати, які отримані за допомогою спеціально розробленої комп'ютерної програми. Зображені на рис. 2–4 відрізки прямих ліній відповідають дотичним, проведеним до кривої в точках спряження окремих ділянок.

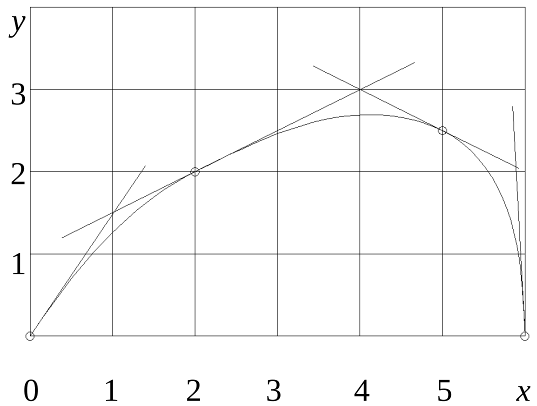

Рис. 2

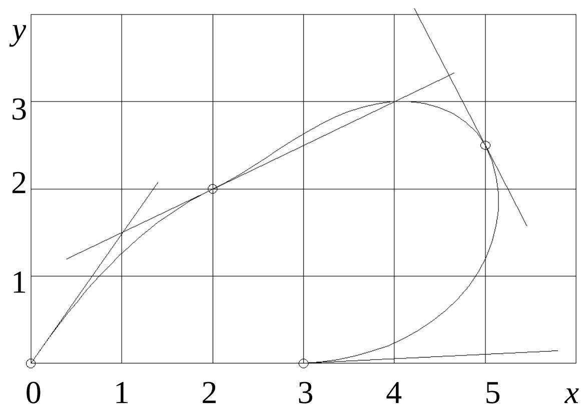

Рис. 3

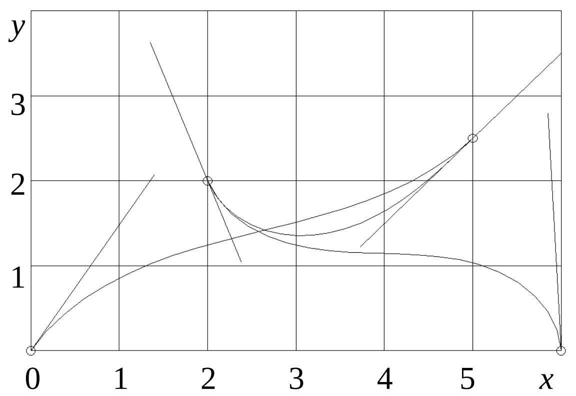

Рис. 4

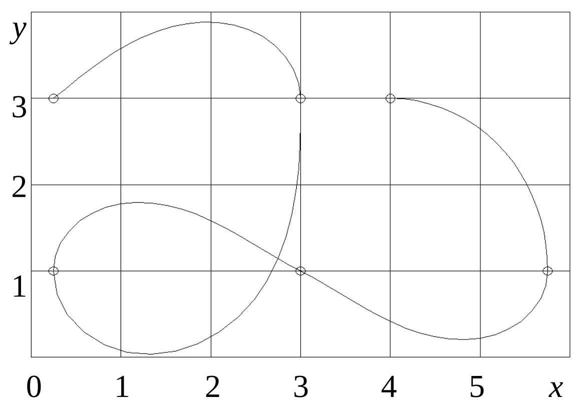

Рис. 5

Вище відмічалося, що окрім координат точок, що застосовуються при моделюванні кривої, мають бути задані похідні, які в геометричному сенсі відповідають кутам нахилу дотичних. У розробленій програмі кути нахилу дотичних у першій і останній точках задаються з вихідними даними. Для визначення кутів нахилу дотичних у проміжних точках застосовано такий прийом. У деякій i-й точці кут нахилу дотичної приймається рівним куту нахилу прямої, що з’єднує $(i - 1)$ та $(i + 1)$ точки. За цим принципом побудовані криві, показані на рис. 2–4.

За основу прийнята крива, що наведена на рис. 2. На рис. 3 складена крива побудована за умови зміни положення останньої точки та кута нахилі в ній дотичної. За цих обставин змінився кут нахилу дотичної в передостанній точці. Відповідно змінився характер проходження кривих другої та третьої ділянок.

Графічні результати, показані на рис. 4, отримані за умови, що змінено нумерацію другої і третьої вихідних точок. Зрозуміло, що результуюча складена крива суттєво змінила свою форму. Водночас слід ще раз підтвердити, що запропонований метод моделювання кривої виявився працездатним.

На рис. 5 показана цікава крива, яка отримана модифікованою програмою моделювання складеної кривої. В цій програмі величини кутів нахилу дотичних у всіх точках вводилися з вихідними даними, але складена крива все ж таки була побудована.

Слід зазначити, що всі показані на рис. 2–5 криві є інтерполяційними, вони проходять через кожну так звану базову точку.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Запропонований метод моделювання складених кривих базується на ідеях притаманних кривим Ерміта, але він принципово від них відрізняється іншими математичними засадами. Метод дозволяє будувати криві з лінійним законом розподілу кривини на кожній ділянці складеної кривої, що не передбачається в методі Ерміта. Відомо, що саме кривина є важливим геометричним показником, з яким треба рахуватися при моделюванні обводів об’єктів, що взаємодіють з високошвидкісною течією.

Подальші дослідження треба спрямувати на забезпечення у вузлах стикування рівності кривини суміжних ділянок. Але для цього треба підвищити степінь законів розподілу кривини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Борисенко В. Д. Геометричне моделювання плоских кривих із застосуванням лінійного елемента кривини [Текст] / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, В. Є. Спіцин // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – К. : КНУБА, 2006. – Вип. 76. – С. 43–49.
2. Поляков А. Ю. Методы и алгоритмы компьютерной графики в примерах на Visual C++ [Текст] / А. Ю. Поляков, В. А. Брусенцев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.
3. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения [Текст] / А. А. Савелов. – М. : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1960. – 293 с.
4. Устенко С. А. Геометрична теорія моделювання криволінійних форм лопаткових апаратів турбомашин з оптимізацією їх параметрів : автореф. дис. … д-ра техн. наук : 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка» / Сергій Анатолійович Устенко; КНУБА. – К., 2013. – 40 с.
5. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве [Текст] / А. Фокс, М. Пратт. – М. : Мир, 1982. – 304 с.
6. Шикин Е. В. Кривые на плоскости и в пространстве [Текст] / Е. В. Шикин, М. М. Каменецкий. – М. : Фазис, 1997. – 325 с.
7. Adams J. A. The intrinsic method for curve definition [Text] / J. A. Adams // Computer Aided Design. – 1975. – Vol. 7, No 4. – P. 243–249.
8. Ball A. A. CONSURF, Part 2: Description of the algorithms [Text] / A. A. Ball // Computer Aided Design, 1975. – № 7. – P. 237–242.
9. Catmull E. A class of local interpolating splines [Text] / E. Catmull, R. Rom // Computer Aided Geometric Design, R. E. Barnhill and R. F. Reisenfeld, Eds. Academic Press, New York, 1974. – P. 317–326.
10. Hooke R. Direct search solution of numerical and statistical problems [Text] / R. Hooke, T. A. Jeeves // Journal of the ACM. – 1961. – Vol. 8, No 2. – P. 212–229.
11. Rogers D. F. An introduction to NURBS: With historical perspective [Text] / D. F. Rogers. – Morgan Kaufmann Publishers, 2001. – 324 p.

Борисенко В. Д., Устенко С. А.,
Николаевский национальный университет им. В. А. Сухомлинского, г. Николаев, Украина
Устенко И. В.,
Национальный университет кораблестроения им. адм. Макарова, г. Николаев, Украина

Моделирование составных кривых с применением линейных законов распределения их кривизны

В работе предлагается численный метод геометрического моделирования составных кривых, каждый участок которых формируется при условии, что их кривизна линейно зависит от длины дуги. Неизвестные коэффициенты линейных зависимостей определяются путем минимизации отклонения точек, полученных в результате работы алгоритма минимизации, от точек, которые задаются с исходными данными. Кроме координат точек, рассчитываются или задаются углы наклона касательных к моделируемой кривой. Компьютерная реализация предложенного метода подтвердила его работоспособность.
Ключевые слова: *моделирование; составная кривая; линейный закон распределения кривизны.*

Borysenko V. D., Ustenko S. A.,
Mykolaiv National University after V. O. Sukhomlynsky, Mykolaiv, Ukraine
Ustenko I. V.,
The Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine

Modeling compound curves using linear distribution laws of curvature

The numerical method for geometric modelling compound curves, each portion of which is formed with the condition that their curvature is linearly dependent on the length of the arc. The unknown coefficients of the linear dependence are determined by minimizing deflection points obtained as a result of the minimization algorithm, from the points which are set to the initial data. In addition to the coordinates of points the angles of inclination of the tangent to the curve simulated are calculated or set. Computer implementation of the proposed method proved its efficiency.
Key words: *modeling; composite curve; the line of curvature of the distribution law.*

Дата надходження статті до редколегії 17.11.2015