

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В n-ВИМІРНИХ ТІЛЕСНИХ КУТАХ

Зменшення масштабу тілесних кутів дозволяє геометрично аналізувати n -вимірний простір змінних з прямокутними осями координат. В косокутній n -вимірній системі координат зі збереженням властивостей прямокутності осей можна геометрично побудувати точку, лінію, вектор, площину у 4-вимірному та 5-вимірному просторі; можна розглядати n -вимірну кулю з n -вимірними тілесними кутами, що охоплює всі вектори n -вимірного простору. Детерміновані, стохастичні, безперервні чи дискретні, диференційовані функції $Q(R)$, які залежать від модуля вхідного вектора $R = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ та його напрямку у n -вимірному просторі цифрових змінних x_j , можна візуально аналізувати на двовимірній мапі розгорнутих тілесних вкладених одна в одну порожнистих куль на основі точкових, середніх чи кластерних значень. Розглянуті напрями застосування двовимірного аналізу для n -вимірних інтелектуальних систем управління економікою.

Ключові слова: Аналітична геометрія, n -вимірний простір змінних, скалярні та векторні поля, інтелектуальні системи управління економікою.

Постановка проблеми. Твердження, що людина живе у тиховимірному просторі, є невірним: до трьох-вимірного простору (довжини, ширини, висоти) слід додати простори звуку, освітлення, часу, концентрації речовин у просторі тощо. Людина живе й приймає рішення стосовно ієрархічних інтелектуальних систем управління економікою і у багатьох інших практичних напрямках при аналізі n -вимірних функцій $Q(R)$ залежно від вхідного вектора $R = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ з цифровими змінними x_j . Для поліпшення цього аналізу бажано отримувати зручне двовимірне представлення функції $Q(R)$.

Аналіз досліджень та публікацій. Аналітична геометрія аналізує геометричні фігури у n -вимірному просторі засобами алгебри. Хоча аналітична геометрія й надала геометричну інтерпретацію системам лінійним рівнянь і нерівностей, але відсутній наочний образ вихідної довільної функції $Q(R)$ залежно від вхідного вектора R [1; 2].

У найбільш поширених випадках довільна n -вимірна функція $Q(R)$ аналізується у вигляді наочних геометричних образів за допомогою:

1. Графічної залежності виходу $Q(R)$ від «найбільш впливової» змінної x_j . Її різновидом є *OLAP* – технологія, за якою інформація (наприклад, у базах даних) надається у вигляді *тривимірного куба* з функцією виходу залежно від частки атрибутів аналізованого процесу (наприклад: осі – товар, час, країна; функція виходу – обсяги продажів) [3]. Користувач може «розрізати» куб за різними напрямками і узагальнювати або деталізувати дані.

2. *Кластерного аналізу* (існує до 100 методів класифікації) в інтелектуальних економічних системах, коли окремі елементи універсуму об'єднуються у

кластери за окремими ознаками та за призначенням [4; 5].

3. *Нейронних мереж* з використанням методів класифікації. Серед нейронних мереж найбільш поширеним є метод Кохонена [7; 8], на який нижче ми будемо орієнтуватись. Але кластерний метод має недостатнє математичне обґрунтування стосовно пояснення кластерів, обґрунтування їх кількості та впливу на вихід способу розміщення нейронів у вихідному шарі нейронів.

Метою статті є надання математичного підґрунтя і геометричної наочності аналізу n -вимірних функцій $Q(R)$ з можливістю класифікації їх значень і отримання точкових, інтегральних та кластерних оцінок.

Виклад основного матеріалу.

1. Фізичні значення змінних у n -вимірному просторі прямокутних координат. Хоча в геометрії розглядаються фігури абстрактних об'єктів з абстрактними числовими ознаками та існує поняття *n -вимірного простору прямокутних цифрових координат* (до $n = \infty$), але одночасно існує і історично обумовлене тяжіння до традиційної наочної геометричної «взаємної перпендикулярності осей змінних» та до однаковості метрик всіх відрізків. Виміри $R = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ та їх числові функціональні залежності $Q(R)$ іноді розглядаються як «взаємно несумісні» внаслідок того, що невідомо, як тлумачити метрики відповідних об'єднуючих геометричних відрізків. Тому іноді виміри переводять у «відносні одиниці» і (*наче це рятуює становище*) використовують «нормування».

Вважаємо, що нижче розглядається простір цифрових незалежних (геометрично – «взаємно перпендикулярних») змінних $(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$, включаючи

час, які з аналітичної та геометричної точок зору нічим не поступаються розмірам трихвимоірної кімнати в метрах і в будь-якій двовимірній чи тривимірній комбінації змінних задовольняють усім вимогам древньогрецької евклідової геометрії.

Значення змінних x_j можна нормалізувати так, щоб більш впливові з них (у прийнятому напрямку аналізу) змінювались у межах «-1 ... +1», у той час, як менш впливові (за даними експерта) – у межах, наприклад, «-0,2 ... +0,2». Слід урахувати: подібна нормалізація змінює вхідний вектор R , модуль і напрямок якого стає більш залежним від впливових вхідних змінних x_j ; але відповідні значення функції виходу $Q(R)$ теоретично не повинні змінюватись при зміні масштабів вхідних змінних R .

Твердження, що людина живе у тривимірному просторі є невірним: людина живе в n -вимірному просторі при $n > 3$. Це підтверджується кількістю його чуттєвих органів. За допомогою такого «датчика» як розум людина аналізує n -вимірний простір, який впливає на її життя і у якому вона працює та живе. Людина знає, вимірює (датчиками), аналізує і використовує особливості додаткових змінних n -вимірного простору – магнітного поля, радіації, рентгеновського випромінювання, виміру електричного поля, потоків товарів, особливостей покупців тощо.

2. Математичні залежності для гіперкола, гіперкруга, гіперсфери, гіперкулі.

Вважаємо, що між двома точками n -вимірного простору з прямокутними осями координат згідно евклідової геометрії можна провести пряму лінію, яка залишається прямою лінією при зміні масштабу тілесного кута (при зміні величини площі, на яку спирається тілесний кут).

Незалежно від кількості змінних, їх фізичної сутності і вимірювання, вважаємо, що в будь-якому n -вимірному просторі за умови співпадіння центра фігур (Т-кола, Т-круга, Т-кулі та Т-сфери) з центром координат ми переносимо поняття довжини кола C_{2n} , площі круга S_{2n} у двовимірному просторі та площі сфери S_{3n} і об'єму кулі V_{3n} у тривимірному просторі на аналіз площин та об'ємів у n -вимірному просторі у вигляді відомих формул

$$C_{2n} = 2\pi R; S_{2n} = \pi R^2; S_{3n} = 4\pi R^2; V_{3n} = \frac{4}{3} \pi R^3, (1)$$

$$\text{де } R = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}; (2)$$

R – модуль вектора в n -вимірному просторі (радіус гіперсфери, на поверхні якої знаходиться кінцева точка вектора).

Формули (1) та (2) підтверджуються тим, що:

– гіперпряма лінія має властивість одновимірності (з рівнянь прямої лінії $\frac{x_1}{b_1} = \dots = \frac{x_j}{b_j} = \dots = \frac{x_n}{b_n}$ можна

отримати одновимірну залежність $\frac{x_j}{b_j} = \left(\frac{x_1 b_j}{b_1} \right) \frac{1}{b_j}$);

– гіперплощина $\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_j}{a_j} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$ визначає-

ться перетином двох гіперпрямих ліній і тому має властивість двовимірності;

– гіпероб'єм визначається перетином трьох гіперпрямих ліній і тому має властивість тривимірності.

Разом із тим подібні твердження не означають, що n -вимірний простір ми розглядаємо як тривимірний чи двовимірний. При знаходженні у тривимірному просторі замість n координат ми «розрізняємо і бачимо» лише три координати; у тривимірній кулі довжина радіусу при інших рівних умовах за формулою (2) менше за довжину радіусу n -вимірної кулі тощо.

3. T_g^n -кути.

T_g^n -кутами з порядковим десятинним номером $g = 0, 1, 2, \dots, G$ у n -вимірному просторі прямокутної системи координат з векторами $R = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$, $j = 1, 2, \dots, n$, звуться окремі і незалежні, однакові за формою, тілесні кути (у тому числі «квадранти» при $n = 2$ та «октанти» при $n = 3$), які виділяються по знаках «+» та «-» числових значень осей координат $(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$, які замінюються на коди «1» та «0» і у сукупності заповнюють усю гіперкулю ознак n -вимірної функції $Q(R)$. Т-кут виділяється в гіперкулі сукупністю площин, які проходять через початок координат та через дві сусідні точки перетину осями Т-кута гіперсфери кулі. У загальному випадку « T_g^n -кути» будемо скорочено звати «Т-кутами». Кожний Т-кут має лінію тяжіння (середню лінію), яка проходить через початок координат та середину тіла Т-кута і має масштаб Т-кутів $k_m = 1$, що пропорційно змінює площу, на яку спирається Т-кут на гіперсфері.

При невід'ємних значеннях координат кількість Т-кутів дорівнює $(G + 1) = n$, а якщо осі вміщують позитивні і негативні числові змінні, то кількість Т-кутів дорівнює $(G + 1) = 2^n$. Далі ми розглядаємо лише випадок $(G + 1) = 2^n$, коли кожна ось x_j вміщує позитивні і негативні числові значення.

Окремість і незалежність Т-кута означає, що внутрішній простір Т-кута геометрично та аналітично аналізується за власною прямокутною системою координат без зміни формул, масштабів осей, їх аналізу, навіть якщо: початок координат Т-кута перенесений у інше місце; його осі отримали будь-яке нове спрямування (при дотриманні умови прямокутності між ними); тілесні кути мають масштабні коефіцієнти $k_m \neq 1$ (геометрично це утворює косокутну систему координат без впливу на масштаби, перпендикулярність осей та аналіз) і можуть взаємно пересікатись з іншими Т-кутами або накладатись на них. Тобто вважаємо, що «розкидані» по всьому простору, повернені на довільні кути, накладені один на одній і взаємно «перемішані» Т-кути, незалежно від масштабів власних тілесних кутів і розміщення, продовжують точно і неухильно виконувати свої «математичні, аналітичні і геометричні обов'язки» стосовно єдиної прямокутної системи координат з єдиним початком координат.

Порядковий номер Т-кута у двоїстому значенні визначається в результаті призначення кода «1» позитивній частці осі x_j і кода «0» – негативній частці x_j ; номер Т-кута у двоїстому значенні отримується при розміщенні бітів кодованих осей у зворотному порядку $(x_n, \dots, x_j, \dots, x_2, x_1)$. Отриманий двоїстий порядковий номер переводиться в десятинну величину g .

Наприклад, для вектора з координатами $R = (x_1 = +10, x_2 = +7, x_3 = -3, x_4 = -6)$, отримуємо кодований двоїстий номер « $x_4 = 0, x_3 = 0, x_2 = 1, x_1 = 1$ » з десятичним значенням « $0011 \rightarrow g = 3$ ». Отримана десятична нумерація Т-кутів $g = 0, 1, 2, \dots, G$ не співпадає зі звичною нам нумерацією квадрантів (при $n = 2$) і октантів (при $n = 3$).

Після завершення нумерації Т-кутів однієї «Т-кулі № 1» нумерація кутів і куль при необхідності може продовжуватись і може охоплювати наступну «Т-кулю № 2», «Т-кулю № 3» і т. д., які є тотожними і геометрично співпадають. Нумерація Т-куль однакового простору змінних $(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ призначена або для визначення процесу розвитку вихідної функції $F_f(R) = F_f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$, $f = 1, \dots, A$, у часі, або для контролю зміни станів інтелектуальної ієрархічної економічної системи. Зміна нумерації кулі також ураховується, якщо у Т-кулі при подібному аналізі використовуються не всі Т-кути.

Координати (порядкові номери) Т-кута будемо позначати як T_g^n , де n – загальна кількість змінних, $g = 0, 1, 2, \dots, G$ – порядковий десятичний номер Т-кута. Позначення T_g^{+n} , де $g = 0, 1, 2, \dots, G$, означає, що осі координат мають лише невід’ємні числові значення, для яких $G = (n-1)$, а T_g^n означає, що осі координат відображують негативні і позитивні числові значення, для яких $G = (2^n-1)$. Ми будемо розглядати Т-кути T_g^n .

Т-кути також можуть утворюватись і між двома осями x_j та x_i прямокутної системи координат із сукупності $(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ з власними масштабними коефіцієнтами тілесних кутів k_{mji} .

4. T_{gr}^n -коміркі.

Координати (порядкові номери) Т-коміркі тілесного Т-кута будемо помічати як T_{gr}^n . Позначення $T_{gr}^n = T_{5,4}^3$ означає: $n = 3$ – загальна кількість змінних; $g = 5$ – десятичний порядковий номер відповідного Т-кута; $r = 4$ – порядковий номер радіусу гіперкулі, в середині якої (і на поверхні її гіперсфери) знаходяться кінці векторів даної T_{gr}^n -коміркі; $r = 1, 2, \dots, E$ – визначені дослідником порядкові номери радіусів (R_1, R_2, \dots, R_E) вставлених одна в одну порожнистих

гіперкуль. Якщо порожниста гіперкуля T_{gr}^n радіусом R_r має вкладену іншу гіперкулю з меншим радіусом $R_{r-1} < R_r$, то Т-комірка вміщує ті вектори, у яких їх модуль R відповідає логічній умові $R_{r-1} < R \leq R_r$. Кожна T_{gr}^n -комірка може мати власну вихідну функцію $Q_{gr}^n(R)$, підпорядковану в загальному випадку загальній функції $Q(R)$.

Очевидно, що будь-який універсум (сукупність векторів, що розглядається) розподіляється по T_{gr}^n -комірках, які складають гіперкулю. Порожні Т-коміркі не аналізуються.

T_{gr}^n -коміркі мають всі властивості Т-кутів стосовно довільного розміщення в просторі при збереженні перпендикулярності осей координат і можливості в сукупності з іншими Т-комірками та Т-кутами виконувати задачу загального аналізу, яка їх об’єднує (тобто Т-коміркі можуть утворювати *багатоагентну інтелектуальну систему*). У T_{gr}^n -коміркі попадають вектори при їх класифікації і в них «зберігаються» узагальнені математичні і геометричні характеристики функції виходу $Q(R)$, ізолінії $Q(R)$, окремі значення $Q(R)$, їх сукупності, кластери. Крім того, з T_{gr}^n -комірками Т-кутів при необхідності можна зв’язати додаткову математичну та лінгвістичну інформацію, яка зберігається окремо і яка у даному випадку не розглядається.

При $n = 1$ Т-кут та Т-куля (Т-сфера) змінної x_1 мають вироджений вигляд прямої лінії з двома $(2^n = 2^1)$ нумерованими Т-кутами. При $n = 2$ Т-куля (та Т-сфера) вироджується у тілесний круг (у коло), який розділюється осями x_1, x_2 на чотири $(2^n = 2^2)$ нумеровані Т-кути. При $n = 3$ осі x_1, x_2, x_3 розділяють Т-кулю та Т-сферу на вісім $(2^n = 2^3)$ нумерованих Т-кутів.

5. Геометричне будівництво точки, лінії, площини, вектора в чотиривимірному просторі.

Розглянемо будівництво вектора $R = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ в Т-куті з чотиривимірною системою прямокутних координат (x_1, x_2, x_3, x_4) при масштабі Т-кутів $k_m < 1$, за рахунок чого всі осі стають видимими (рис. 1). На осях чорними колами помічені точки А, В, С, D – по числових значеннях координат (x_1, x_2, x_3, x_4) .

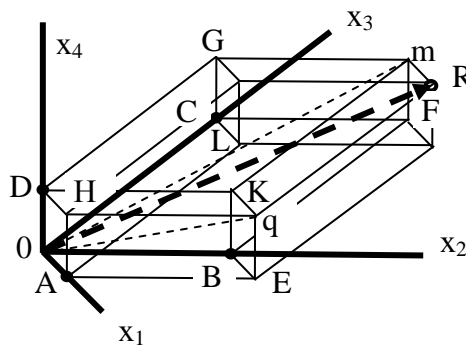


Рис. 1. Геометричне будівництво вектора $R = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ в чотиривимірному просторі

Стрілки на осях (x_1, x_2, x_3, x_4) рис. 1 не наведені, щоб підкреслити можливість подібного будівництва при будь-якому спрямуванні осей. Через кожну з помічених точок А, В, С, D на відповідних осях потрібно провести площину так, щоб вона була паралельною граням, які утворює кожна пара інших

осей. Внаслідок зміни масштабів тілесних кутів, на рис. 1 через кожну точку А, В, С, D проводяться три площини паралельно трьом граням (ми їх помічаємо двома прямими): для точки А – HAE (осі x_2, x_4), LAE (осі x_2, x_3), LAH (осі x_3, x_4); для точки В – KBE (осі x_1, x_4), FBE (осі x_1, x_3), KBF (осі x_3, x_4); для точки С –

LCF (осі x_1, x_2), LCG (осі x_1, x_4), GCF (осі x_2, x_4); для точки D – HDK (осі x_1, x_2), GDH (осі x_1, x_3), GDK (осі x_2, x_3).

З побудованих «прямокутників» випливає, що квадрат пунктирного відрізка $Om^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Якщо ці дані скласти з квадратом відрізка mR , то отримуємо показане жирною штриховою лінією значення вектора R , квадрат модуля якого дорівнює

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \quad (3)$$

Аналогічним чином, якщо квадрат пунктирного відрізка $Oq^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_4^2$ скласти з квадратом відрізка qR , то отримуємо значення квадрата вектора R за формулою (3). Відрізок OR рис. 1 є геометричним відображенням вектора R в чотиривимірному просторі зі зменшеним масштабом тілесного кута.

Замість будовання показаних складних фігур рис. 1, вектор R можна отримати шляхом складання проєкцій вектора R по осях (x_1, x_2, x_3, x_4) з урахуванням їх напрямку. Аналогічним чином можна будувати вектори у просторах значно більшого виміру.

Таким чином, на рис. 1 для чотиривимірного простору продемонстрована можливість розгляду осей, будовання площин, точок і прямих ліній.

При покроковій зміні заданих координат (x_1, x_2, x_3, x_4) вектора R , його годограф на рис. 1 буде мати вигляд *кривої лінії*, а цю криву лінію можна обертати для отримання *криволінійної поверхні* – як у звичній геометрії.

Хоча рис. 1 й є спрощеним двовимірним зображенням багатомірного простору, але подібний підхід збагачує наше уявлення про багатомірний простір, як його збагачує зображення тривимірного об'єму на площині. Наприклад, якщо вважати що об'єкт «тривимірного приміщення» в осях (x_1, x_2, x_3) набуває четверту координату по урахуванню зростання задимленості вздовж осі x_4 , то поряд з розмірами приміщення ми можемо наочно визначити вплив задимленості.

6. Геометрична форма та взаємне розміщення Т-комірок в Т-кулях.

Якщо Т-куля не порожниста, то всі Т-комірки прямокутної системи координат з осями ($x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$), які відрізняються мінімум однією віссю або її знаком числових значень, мають *однакову форму* і

створюють однакові симетрично розміщені в Т-кулі опуклі пірамідальні «Т-многогранники» із загальною вершиною у початку координат і обмеженням зовнішньою гіперсферою з протилежного боку. При цьому можливе взаємне не співпадіння однакових осей отриманих Т-куль; але підсумок площин, на які спираються Т-комірки, вважаємо рівним площині відповідної гіперсфери. Вважаємо, що Т-комірки мають *однакове (симетричне і по колу)* розміщення точок перетину своїми осями координат поверхні відповідної Т-сфери. Ці точки перетину Т-сфери у своїй площині є *вершинами правильного Т-багатокутника*. При $n \rightarrow \infty$ Т-багатокутник за формою наближується до кола.

На гіперсфері однакові відстані точок вершин Т-багатокутника від центра його тяжіння в площині багатокутника є геометричним масштабним відображенням рівності радіусу R гіперсфери, а різні геометричні відстані між парами точок вершин цього правильного Т-багатокутника вважаємо наслідком використання різних масштабів Т-кутів між відповідними парами координатних осей.

У Т-комірок (через властивості їх Т-кутів) відсутня вимога геометричного взаємного співпадіння осей координат з однаковими позначеннями у різних Т-комірок. *Усі лінії тяжіння Т-комірок* симетрично розміщуються в тілі Т-кулі і мають симетрично розміщені точки перетину її Т-сфери. Навколо точки перетину лінією тяжіння Т-сфери симетрично (по колу) розміщуються відповідні n вершин правильного Т-багатокутника з можливістю не співпадіння осей координат різних Т-кутів і окремих Т-комірок.

Результати і порядок аналізу не змінюються, якщо збільшувати чи зменшувати *масштабні коефіцієнти* k_m Т-кутів (це впливає лише на їх геометричний образ: площі гіперсфери і тіла Т-кутів у гіперкулі або збільшуються і взаємно перекриваються, або зменшуються порівняно з площею та об'ємом, які отримуються за формулами (1) та (2) за значенням модуля вектора R).

Наприклад, на рис. 2,а для $n = 2$ наведені два круга: «Тⁿ⁼²-круг № 1» у вигляді чотирьох Т-комірок з десятинними порядковими номерами «3, 1, 0, 2» та «Тⁿ⁼²-круг № 2» у вигляді чотирьох Т-комірок «3*, 1*, 0*, 2*» (на рис. 2,а після нумерації Т-комірок круга № 1 продовжується нумерація Т-комірок круга № 2).

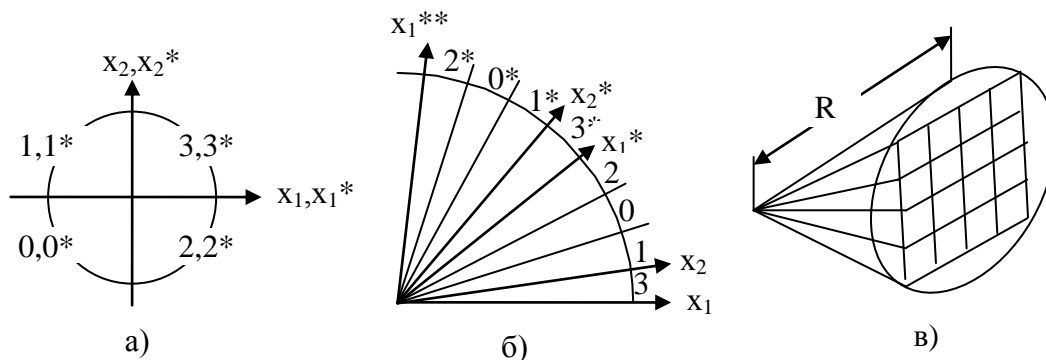


Рис. 2. Вигляд Т-кутів при зміні їх масштабів:

- а) для двох кругів («Т-круга № 1» та «Т-круга № 2») при $n = 2$ з десятинними порядковими номерами Т-комірок ($g = 3, 1, 0, 2$) та ($g^* = 3^*, 1^*, 0^*, 2^*$) при масштабному коефіцієнті тілесних кутів $k_m = 1$;
- б) для двох кругів рис. 2,а при $k_m < 1$; в) – для макета однієї кулі тривимірного простору при $k_m < 1$

Якщо зменшити у Т-комірок масштабний коефіцієнт Т-кутів $k_m < 1$, то вигляд двох кругів рис. 2,а перетворюється на рис. 2,б при збереженні властивості прямокутності осей в отриманій косокутній системі координат.

Відповідно для $n = 3$ при $k_m < 1$ T^{n-3} -сфера та T^{n-3} -куля перетворюються у частки T^{n-3} -сфери та T^{n-3} -кулі і набувають вигляд сукупності однакових опуклих пірамідальних *Т-многогранників* (що охоплюють лише частки попередніх відповідних геометричних образів) з рівномірно розміщеними в них Т-комірками і зі збереженням початку координат, величини радіусу R і властивості прямокутності осей (рис. 2,в). Внаслідок незалежності аналізу Т-многогранників, їх розміщення при аналізі вихідної функції може бути довільним. Саме тому n -вимірну систему координат при зменшенні масштабу тілесних кутів можна відобразити тривимірною кулею з рівномірно розміщеними в ній

Т-комірками, які цілком заповнюють усю гіпер-кулю, або як двовимірні коло, квадрат, прямокутник, трикутник, шестикутник, мапу тощо.

При наявності порожнистих куль вище розглянуті Т-комірки розрізаються кількома сферами різних радіусів, і Т-комірки з більшими радіусами обмежуються з двох протилежних сторін зовнішньою та внутрішньою гіперсферами. В позначенні $T^{n,g,r}$ -комірки наводиться радіус r зовнішньої гіперсфери.

7. Сусідство Т-комірок.

У кулі n -вимірного простору кожна Т-комірка має «Сусідів c », де $c = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$, означає кількість сумісних осей між Т-комірками («Сусід 0» має всі осі протилежними). Як приклад, розглянемо сусідство чотирьох вхідних векторів $R_1, R_2, R_3, R_4 = R_m$ у *двовимірному просторі* (рис. 3), які попадають у різні Т-комірки.

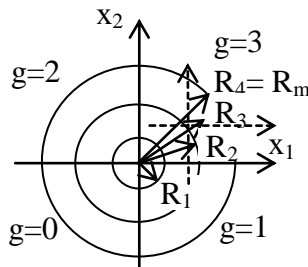


Рис. 3. Розміщення вхідних векторів $R_1, R_2, R_3, R_4 = R_m$ двовимірної системи координат всередині «гіперкулі» із зовнішнім радіусом $R_4 = R_m$ та всередині тілесних $T^{n-2}_{g,r}$ -комірок, де $g = (0, 1, 2, 3)$ – порядкові десятинні номери T^{n-2}_g -кутів; $r = 1, 2, 3, 4$ – порядкові номери радіусів векторів R_1, R_2, R_3, R_4

Тут символи $R_1, R_2, R_3, R_4 = R_m$ є однаковими в позначеннях: векторів; їх геометричного зображення; модуль; зовнішніх радіусів порожнистих «гіперкуль» та «гіперсфер»; кінцевих точок векторів. Рівність $R_4 = R_m$ вказує, що зовнішній радіус порожнистої «гіперкулі» R_4 має максимальне значення R_m , і тому

всі інші вектори знаходяться всередині «гіперкулі» з максимальним радіусом $R_4 = R_m$. Позначення та числові значення десятинного порядкового номеру квадрантів g з визначенням їх «сусідів» показані в табл. 1 – табл. 4 для отриманих Т-кутів від двовимірного до п’ятивимірного простору.

Таблиця 1

Нумерація порядкових номерів T^2_g -кутів у двовимірному просторі

Десятинний номер, g	Номер T^{n-2}_g -кута		Позначення T^{n-2}_g -кута	Сусіди 1 (мають один збіжний двоїтий біт), g	Сусід 0 (всі біти незбіжні), g
	Двоїтий номер x_2	Двоїтий номер x_1			
0	0	0	T^2_0	1, 2	3
1	0	1	T^2_1	0, 3	2
2	1	0	T^2_2	3, 0	1
3	1	1	T^2_3	1, 2	0

Вважаємо, що у двовимірній системі координат сусідній тілесний «гіперкут» «Сусід 1» відрізняється від даного тілесного кута лише одним бітом двоїстого номеру (однією віссю, яка змінює свій знак). Наприклад, для тілесного кута $g = (0, 0)$ (у двоїстому численні) замінюємо $x_1 = 0$ на $x_1 = 1$ і отримуємо квадрант сусіда $g = (0, 1) = 1$, що підтверджується рис. 3; для тілесного кута $g = (0, 0)$ номер протилежного кута «Сусіда 0» отримується заміною всіх бітів на протилежні за значенням з отриманням значення $g = (1, 1) = 3$. Аналогічним чином отримуються сусіди для інших квадрантів $g = (1, 2, 3)$.

Згідно з рис. 3 вектори R_1, R_2, R_3, R_4 попали Т-кути за номерами $g = (1, 3)$, а Т-кути $g = (0, 2)$ є порожніми. Наведені в табл. 1 позначення сусідства між різними Т-кутами дають ліпше уявлення про розміщення векторів у гіперкулі.

У тривимірному просторі маємо $2^n = 2^3 = 8$ початкових Т-кутів (табл. 2). Кожний Т-кут має: 3-х «Сусідів 2», у яких два біти збіжні; 3-х «Сусідів 1», у яких один біт збіжний; одного «Сусіда 0», у якого всі три біти незбіжні.

Таблиця 2

Десятинна нумерація T_g^3 -кутів у тривимірному просторі

Номер $T_g^{n=3}$ -кута			Сусіди 2 (мають два збіжні біти)	Сусіди 1 (мають один збіжний біт)	Сусід 0 (не має жодного збіжного біта)	
Десятинний номер, g	Двоїстий номер					
	x_3	x_2	x_1			
0	0	0	0	1, 2, 4	3, 5, 6	7
1	0	0	1	0, 3, 5	2, 4, 7	6
2	0	1	0	0, 3, 6	1, 4, 7	5
3	0	1	1	1, 2, 7	0, 5, 6	4
4	1	0	0	0, 5, 6	1, 2, 7	3
5	1	0	1	1, 4, 7	0, 3, 6	2
6	1	1	0	2, 4, 7	0, 3, 5	1
7	1	1	1	3, 5, 6	1, 2, 4	0

У чотиривимірному просторі маємо $2^n = 2^4 = 16$ початкових T-кутів № 1 (табл. 3). Кожна T-комірка чотирихвимерного простору (кожний тілесний T-кут) має: 4-х «Сусідів 3», у яких три біти збіжні; 6-х

«Сусідів 2», у яких два біти збіжні; 4-х «Сусідів 1», у яких один біт збіжний; одного «Сусіда 0», у якого всі чотири біти незбіжні.

Таблиця 3

Нумерація T_g^4 -комірок (T-кутів) у чотиривимірному просторі

Номер $T_g^{n=4}$ -кута					Сусід 3	Сусід 2	Сусід 1	Сусід 0
g	Двоїстий номер							
	x_4	x_3	x_2	x_1				
0	0	0	0	0	1, 2, 4, 8	3, 5, 6, 9, 10, 12	7, 11, 13, 14	15
1	0	0	0	1	0, 3, 5, 9	2, 4, 7, 8, 11, 13	6, 10, 12, 15	14
2	0	0	1	0	0, 3, 6, 10	1, 4, 7, 8, 11, 14	5, 9, 12, 15	13
...
14	1	1	1	0	6, 10, 12, 15	2, 4, 7, 8, 11, 13	0, 3, 5, 9	1
15	1	1	1	1	7, 11, 13, 14	3, 5, 6, 9, 10, 12	1, 2, 4, 8	0

У п'ятихвимерному просторі маємо $2^n = 2^5 = 32$ початкових T-кутів № 1 (табл. 4), кожний з яких має: 5-х «Сусідів 4», у яких збіжні 4 біти; 4-х «Сусідів 3», у яких три біти збіжні; 3-х «Сусідів 2», у яких два біти

збіжні; 2-х «Сусідів 1», у яких один біт збіжний; одного «Сусіда 0», у якого всі п'ять бітів незбіжні. В табл. 6 для її скорочення перелічені лише «Сусіди 4» та «Сусіди 0».

Таблиця 4

Нумерація T-кутів у п'ятихвимерному просторі

Номер $T_g^{n=5}$ -кута						Сусіди 4 (мають 4 збіжні біти)	Сусід 0 (усі біти незбіжні)
Десятинний номер K_i	Двоїстий номер						
	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1		
0	0	0	0	0	0	1, 2, 4, 8, 16	31
1	0	0	0	0	1	0, 3, 5, 9, 17	30
2	0	0	0	1	0	0, 3, 6, 10, 18	29
...
30	1	1	1	1	0	14, 22, 26, 28, 31	1
31	1	1	1	1	1	15, 23, 27, 29, 30	0

8. Двовимірна мапа.

Загальне. Кожний T_g^n -кут з десятинним порядковим номером g і розміщеними в ньому кінцевими точками векторів r спирається на деяку гіперплощину S_g на поверхні гіперкулі. Сукупність цих гіперплощин S_g у розгорнутому вигляді з урахуванням «сусідства» T-кутів створює мапу розміщення T_g^n -кутів на гіперсфері. Але при створенні «мапи» ми розглядаємо не лише поверхню, але весь вміст відповідних тілесних T_g^n -кутів та $T_{g,r}^n$ -комірок з наявними в них кінцевими точками векторів r та відповідними вихідними функціями Q(R). Для вхідних векторів R кожного T-кута мапи можна вказати: годограф; центроїд (осереднені значення координат усіх векторів R T-кута); середньоквадратичну відстань між векторами; кількість векторів і їх координати; максимальне, мінімальне та середнє значення модуля векторів. Ізолінії

та інші характеристики можна навести для вихідної функції Q(R). У саму двовимірну мапу, або окремо можна ввести додаткову математичну та лінгвістичну інформацію (яка у цьому випадку не розглянута).

Двовимірна мапа може мати довільний вигляд (таблиці; кола; трикутника, чотирикутника, шестикутника; комірок з лінійним розміщенням; сукупності багатокутників з кількістю кутів, рівною кількості змінних).

Нижче наводяться мапи з найбільшими T-комірками № 1, які у дійсності у процесі уточнення координат векторів та їх групування можуть подрібнюватись на менші за об'ємом T-комірки № 2, № 3, ...

Проблема сусідства T-комірок пов'язана з ускладненням наочності розміщення T-комірок на двовимірній мапі. Тому сусідство при великій розмірності n-мірного простору потрібно або розрахувати, або

визначати по таблиці. Співпадіння або не співпадіння осей і «сусідів» не впливає на аналіз Т-комірок.

Розглянемо створення мапи на прикладі даних рис. 3.

Згідно з рис. 3 ми можемо «розрізати» тіла 3-х порожнистих «гіперкуль» із зовнішніми радіусами $R_1, R_2, R_4 = R_m$ по границях отриманих 4-х тілесних Т-кутів (з розміщеними в їх Т-комірках кінцевими точками векторів R_1, R_2, R_3, R_4) і розгорнути їх на

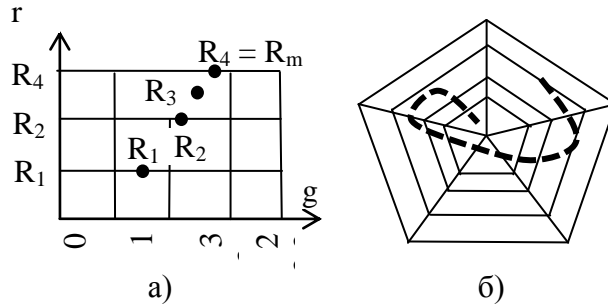


Рис. 4. Вигляд на двовимірній мапі: а) розміщення векторів $R_1 - R_4$ рис. 3; б) годографа деякого п'ятивимірного вхідного вектора R в одному T^5 -куті з його розділом сферами різних радіусів на чотири T^5 -комірки

На рис. 3 та рис. 4,а урахуємо наявність лише трьох «сфер» радіусом $r = R_1; R_2; R_4$. При цьому нумерація Т-кутів $g = (0, 1, 2, 3)$ не співпадає зі звичною нам нумерацією квадрантів у двовимірній системі координат. І на додаток – їх розміщення, наприклад на рис. 4,а (та рис. 3) є неупорядкованим за власними номерами квадрантів. Пояснюється це особливістю нумерації Т-кутів та наданням переваги не нумерації Т-кутів, а ознакам їх сусідства.

Згідно з рис. 4,а вектори $R_1 - R_4$ рис. 3 наступним чином розподіляються по $T_{g;r}^n$ -комірках при радіусах «сфер» $r = R_1; R_2; R_4$: $T_{1;R_1}^2 = (R_1)$, $T_{3;R_2}^2 = (R_2)$, $T_{3;R_4}^2 = (R_3, R_4)$; усі інші $T_{g;r}^n$ -комірки є порожніми і далі не розглядаються. В позначеннях $T_{g;r}^n$ -комірок вказівка на охоплені вектори може опускатись: $T_{1;R_1}^2$, $T_{3;R_2}^2$, $T_{3;R_4}^2$.

На рис. 4,а отримана **двовимірна мапа**, що складається з 12-ти $T_{g;r}^n$ -комірок № 1 (№ 1 вказує на $T_{g;r}^n$ -комірки великих розмірів, які отримуються розділом першою системою координат початкового простору змінних на однакові великі Т-кути у кількості $2^n = 2^2 = 4$ з виділенням в кожному з них по три Т-комірки сферами $r = R_1; R_2; R_4$). На мапі $T_{g;r}^n$ -комірки № 1

площині (рис. 4,а). При цьому розміщуємо тіла трьох розгорнутих у площину порожнистих «гіперкуль» одне під одним у міру зменшення їх радіусів $R_1, R_2, R_4 = R_m$ і при співпадінні по вертикалі порядкових номерів їх Т-кутів.

У результаті на рис. 4,а отримуємо двовимірну мапу розміщення векторів у просторі радіусу «гіперсфер» та Т-кутів, яка може використовуватись для групування векторів.

виглядають як однакові прямокутники, але насправді вони не є однаковими і не є прямокутниками, а «розтягнуті» наче гумові зображення по координатах кластерів з ординатою радіусу $r = R_1; R_2; R_4$ (ми їх розглядаємо і як порядковий номер порожнистої «гіперкулі») та абсцисою $g = 0, 1, 3, 2$ (вона вказує десятинний порядковий номер Т-кута). В тілах Т-комірок розміщені кінцеві точки векторів $R_1, R_2, R_3, R_4 = R_m$.

T^5 -комірка рис. 4,б демонструє можливість наочного представлення даних у п'ятивимірному просторі у вигляді показаного на мапі жирною штриховою лінією зображення годографа деякого п'ятивимірного вхідного вектора R в одному Т-куті гіперкулі з розділом Т-кута сферами різних радіусів на чотири частки. Лінії п'ятикутника утворюються перетином бокових граней Т-кута з площиною, на якій розміщені точки перетину гіперсфери осями координат $T_{g;r}^n$ -комірки.

Мапу для тривимірного простору згідно з даними табл. 2 для T_g^3 -комірок уявляємо розміщеною на шарі зі «склеєними боками» у вигляді табл. 5: тоді кожний Т-кут має три сусідні Т-кути. Як приклад, для $T_{g=0}^3$ -комірки номери Т-комірок «Сусідів 1» виділені сірим фоном.

Таблиця 5

Двовимірна мапа T_g^3 -комірок з урахуванням взаємного розміщення Т-комірок тривимірного простору для осей (x_1, x_2, x_3) з урахуванням «Сусідів 1»

4	5	7	6
0	1	3	2

У табл. 5 для двовимірної мапи наведено лише великі за розмірами Т-комірки № 1 двовимірної мапи, на які розділена «гіперкуля» тривимірного простору для осей (x_1, x_2, x_3) . Тому у дійсності в комірки табл. 5 повинні записуватись Т-комірки з групуванням по зміні радіусу їх вкладених порожнистих «гіперкуль»; з групуванням за уточненими координатами нумерації «гіперкутів», які отримуються при застосуванні нових

систем координат; з вказівкою кількості векторів, які попали у дані Т-комірки тощо (ця інформація в табл. 5 не наведена).

Мапа для T_g^4 -комірок чотиривимірного простору згідно даних табл. 3 з дотриманням сусідства з «Сусідами 3» на поверхні гіперсфери наведена в табл. 6. Для тілесного кута $g = 0$ в табл. 6 сірим фоном виділені сусідні тілесні кути.

**Нумерація $T^4_{g,r}$ -комірок (Т-кутів) на двовимірній мапі
Т-комірок у чотиримірному просторі з урахуванням «Сусідів 3»**

8	9	11	10
0	1	3	2
4	5	7	6
12	13	15	14

Мапу Т-комірок табл. 6 уявляємо розміщеною на шарі зі «склеєними боками»: тоді кожний Т-кут має чотири сусідні Т-кути типу «Сусідів 3». Як приклад, для тілесного кута $g = 0$ номери Т-комірок «Сусідів 3» виділені сірим фоном.

Двовимірна мапа $T^5_{g,r}$ -комірок п'ятивимірного простору показана як табл. 7 з розміщеними по порядку десятинними номерами $g T^5_{g,r}$ -комірок (всього 32 Т-кутів), але без дотримання умов сусідства (сусідство для кожної $T^5_{g,r}$ -комірки або розраховується, або встановлюється по табличним даним).

Таблиця 7

Десятинна нумерація $g T^5_{g,r}$ -кутів та тілесних кутів на мапі $T^5_{g,r}$ -комірок для п'ятивимірного простору

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31

У табл. 7 сірим фоном помічені номери комірок $g = 1, 16, 19, 21, 25$, які є «Сусідами 4» для Т-комірки $g = 17$.

9. Теорія кластерів $T^n_{g,r}$.

$T^n_{g,r}$ -кластер є $T^n_{g,r}$ -коміркою і має тотожне позначення, де n – кількість змінних, g – десятинний порядковий номер Т-кута в гіперсфері, а r – зовнішній радіус гіперсфери кластера. Будь-які вхідні вектори обов'язково попадають в один з кластерів № 1 різних зовнішніх радіусів r . Кластер $T^n_{g,r}$ може супроводжуватись окремою математичною і лінгвістичною інформацією, а також може застосовуватись для:

– класифікації вхідних векторів R з візуальною оцінкою їх характеристик (координат центроїда кластера, кількості векторів і евклідових відстаней між ними, годографа вектора та ін.);

– візуальної оцінки характеристик вихідної функції $Q(R)$ (даних вхідних векторів; координат центроїда вихідної функції Q ; значень функції Q по ізолініям; середнього, максимального, мінімального, точкового значення функції Q ; інформації «географічної» мапи у вигляді таблиці з відображенням характеристик функції Q ; значеннями найбільш впливових вхідних змінних x_j).

Кожний $T^n_{g,r}$ -кластер охоплює $(1/2^n)$ частину об'єму змінних універсуму вхідних векторів. При відсутності вкладених порожнистих куль і при $n = 3$ великий за розміром кластер № 1 охоплює $(1/2^n = 1/2^3 = 1/8)$ частку простору змінних. Якщо в координати центроїда виділеного дослідником $T^n_{g,r}$ -кластера № 1 перенести новий початок координат, то тоді виділений кластер № 1 розділяється на 8 менших кластерів № 2, і при $n = 3$ початковий простір кластера № 1 зменшується до простору кластера № 2, який в $8 \times 8 = 64$ разів є меншим за кластер № 1.

Задачею дослідника стосовно кожного початкового великого $T^n_{g,r}$ -кластера № 1 і наступних менших кластерів № 2, № 3, ... є: реєстрація векторів R , кінцеві точки яких попали у даний $T^n_{g,r}$ -кластер; визначення числових значень вихідної функції Q ; перевірка

евклідової відстані між всіма парами векторів R (або парами функції виходу Q); визначення центроїдів кластерів; з метою зменшення евклідової відстані між вхідними векторами кластера (або між значеннями вихідної функції) – розділ великого кластера № 1 на менші за об'ємом кластери № 2, № 3, ...; об'єднання центроїдів великих і малих кластерів у сукупність центроїдів складних кластерів та мінімізація евклідової відстані між кластерами. Обробка отриманих даних може охоплювати об'єднання груп Т-кластерів за значенням функції виходу Q ; використання мап з довільною нумерацією Т-кутів і з вказівкою характеристик вхідних векторів R та функції виходу Q .

Позначення координат кластерів для кінців їх векторів використовуються лише для визначення групування векторів у кластери, а величини відстаней між векторами у кластерах та вектори центроїдів кластерів розраховуються по початкових величинах координат векторів, які не змінюються протягом усього аналізу.

У деяких випадках необхідно або збільшувати або зменшувати розміри Т-кластерів.

Стосовно отриманих кластерів виконуються наступні дії:

– не аналізуються і не розглядаються кластери без векторів в них;

– для заповнених векторами кластерів $T^n_{g,r}$ визначаються координати векторів – центроїдів кластерів (осереднених значень координат їх векторів, що попали у кластер) у вигляді

$$X_{g,r}^C = (x_{g,r,1}^C, x_{g,r,2}^C, \dots, x_{g,r,j}^C, \dots, x_{g,r,n}^C), \quad (4)$$

де

$$x_{g,r,j}^C = \frac{1}{A_{g,r}} \sum_{j=1}^n \sum_{g,r=1}^{A_{g,r}} x_{g,r,j}^C,$$

$g, r = 1, 2, \dots, A_{g,r}$ – порядковий номер вектора, який попав в кластер $T^n_{g,r}$; $A_{g,r}$ – загальне число векторів, яке попало в кластер $T^n_{g,r}$.

Значення $X_{g,r}^C$ є центроїдом – еталоном, призначеним для розпізнавання векторів стосовно їх належності до кластера № 1 $T^n_{g,r}$;

– з метою виявлення необхідності подальшого розділу кластерів № 1 на менші частки, всередині кластерів T_{gr}^n для всіх пар векторів з порядковими номерами $gr = k$ та $gr = \delta$ при $\delta \neq k$ розраховуються квадрати евклідової відстані

$$X_{gr,k\delta}^E = \sum_{j=1}^n (x_{gr=k,j} - x_{gr=\delta,j})^2. \quad (5)$$

Евклідові відстані (5) не повинні перевищувати квадрат заданого дослідником максимального дозволеного значення відстані між всіма парами векторів всередині кластерів;

– з метою виявлення можливості об'єднання кластерів № 1 визначаються квадрати евклідових відстаней між всіма парами векторів – центроїдів X_{gr}^C з порядковими номерами $gr = \alpha$ та $gr = \beta$

$$(\Delta X_{gr,\alpha\beta}^C)^2 = \sum_{j=1}^n (x_{gr=\alpha,j}^C - x_{gr=\beta,j}^C)^2; \quad (6)$$

– якщо значення $(\Delta X_{gr,\alpha\beta}^C)^2$ перевищує квадрат заданого експертом максимального дозволеного значення відстані між центроїдами, то дана пара центроїдів не об'єднується, а в іншому разі вони об'єднуються у складний кластер.

Ми розглядаємо автоматизовану систему. Остаточне рішення про об'єднання кластерів у складні кластери та про роз'єднання кластера на менші кластери приймає експерт. Але ці дії можуть відбуватись також і автоматично.

Складний кластер при збільшенні в ньому кількості об'єднаних кластерів у просторі змінних може набувати будь-яку форму: випуклої чи не випуклої фігури; «черв'яка», що охоплює своїм «тілом» весь простір змінних і вміщує центроїди елементарних кластерів з дуже великими відстанями між ними (тобто, відстані між центроїдами віддалених кластерів «черв'яка» перевищують задані експертом дозволений величини, але одночасно всі складові частини «черв'яка» задовольняють вимогу експерта стосовно відстані до найближчого кластера, який входить у даний складний кластер). Відомо, що складний кластер у загальному випадку описується не одним вектором – центроїдом, а сукупністю векторів – центроїдів відповідних елементарних кластерів, що входять у складний кластер [9]. Відповідно вважаємо, що вектор входить у складний кластер, якщо він має відстань до будь-якого з центроїдів складного кластеру, меншу за дозволену експертом величину відстані між двома центроїдами.

Припустимо, що за рішенням експерта стосовно кластерів № 1 (рис. 4,а) у вигляді $T_{1;R1}^2 = (R_1)$, $T_{3;R2}^2 = (R_2)$, $T_{3;R4}^2 = (R_3, R_4)$ два останні кластери об'єднуються в один і в результаті отримуємо два кластери: окремий простий кластер розміром №1 $T_{1;R1}^2$ і складний кластер $[T_{3;R2}^2; T_{3;R4}^2]$ (складні кластери охоплюємо квадратними дужками; окремі кластери складного кластера роз'єднуються точкою з комою «;»). Після виконання вказаних дій, навчання центроїдів є завершеним, і два отриманих кластери можуть використовуватись для класифікації вхідних векторів.

У результаті цього рішення кожний новий вхідний вектор R_H перевіряється на належність до одного з двох вказаних кластерів по евклідовій відстані до їх центроїдів $X_{1;R1}^C$ та $[X_{3;R2}^C; X_{3;R4}^C]$.

Але якщо евклідові відстані між векторами всередині кластера мають більші за дозволений значення, то це означає необхідність розділу такого кластера № 1 на менші кластери № 2. Подібний розділ великих кластерів № 1 на менші кластери № 2 (а після цього – на ще менші кластери № 3, № 4...) потрібно виконувати неодноразово до задоволення вимоги стосовно заборони перевищення дозволених значень евклідових відстаней між векторами всередині великих і малих кластерів.

Слід ураховувати, що розрахунки кластерних координат спрямовані на визначення групування векторів по кінцевим точкам їх векторів, а розрахунки відстаней між векторами, розрахунки координат векторів центроїдів та відстаней між центроїдами виконуються по початковим значенням координат векторів, які не змінюються протягом всього аналізу.

Т-комірки (кластери) можна зменшити за об'ємом збільшенням кількості вкладених порожнистих гіперкуль (збільшенням кількості внутрішніх радіусів), чи розділом (за різними способами) на частки тілесних кутів. У цьому відношенні універсальним є «метод перенесення початку координат», бо він зменшує одразу дві координати кластера: вздовж осі радіусу гіперсфери та вздовж осі зміни тілесного кута.

З цією метою помічаємо зірочкою «*» кластер, наприклад, з центроїдами $[X_{3;R2}^C; X_{3;R4}^C]^*$, який розміщений в Т-куті $g=3$ системи координат (рис. 3). Т-кут $g=3$ потрібно розділити на менші за об'ємом кластери № 2 новою системою координат.

На рис. 3 у тілесному Т-куті $g=3$ наведені осі нової системи координат без позначення її осей (бо вони співпадають з позначеннями і напрямками наведених осей x_1, x_2), які використовуються для розділу тілесного Т-кута $g=3$ поміченого кластера $[X_{3;R2}^C; X_{3;R4}^C]^*$, на менші за розмірами кластери № 2 з метою наступного уточнення евклідових відстаней між новоутвореними групами векторів у менших кластерах та відстаней між кластерами. Нові координати векторів у новій декартовій системі координат мають значення

$$x_j^H = x_j - x_j^C,$$

де x_j^H – нові значення координат; x_j^C – значення координат центру нової системи координат у старій системі координат; x_j – старі значення координат.

За знаками нових числових значень координат x_j^H векторів визначаються координати нових зменшених кластерів, в яких розміщені помічені вектори.

З рис. 3 видно, що один Т-кут $g=3$ у старій системі координат розділяється новою системою координат на чотири нові Т-кути ($2^n = 2^2 = 4$) за аналогічними номерами $g = (0^*, 1^*, 2^*, 3^*)$, які утворюють чотири нові кластери розміром № 2. Нові Т-кути $g = 0^*$ та $g = 2^*$ не мають вхідних векторів, вони вважаються порожніми і далі не використовуються; в Т-кут $g = 1^*$ попав вектор R_1 , а в Т-кут $g = 3^*$ попали вектори R_3 та R_4 . У результаті на місці одного старого складного кластера $[X_{3;R2}^C; X_{3;R4}^C]$ утворились два нових кластери розміру № 2, які помічаємо як $T_{3;R2}^2; T_{1;R2}^2$ та $T_{3;R4}^2; T_{3;R4}^2$ (тут кожний новий кластер меншого розміру № 2 з'єднується з попереднім кластером більшого розміру № 1 через двокрапку «;»). Якщо ми має-

мо велику кількість векторів у кластері, або бажано уточнити положення кластеру, то ми й далі можемо зменшувати аналогічним чином розмір кластера; приклад позначення такого зменшеного кластеру № 5 має вигляд $T_{3;R2}^2:T_{1;R2}^2:T_{2;R2}^2:T_{0;R2}^2:T_{3;R2}^2$. Кластер № 5 менше за кластер № 1 в $(2^n)^{5-1} = (2^2)^{5-1} = (4)^4 = 256$ разів.

Отримані нові кластери знову перевіряються на евклідові відстані між парами векторів усередині кластерів, визначаються їх центроїди і знову перевіряється можливість об'єднання кластерів.

Зменшення розмірів кластерів (№ 1, № 2, № 3, ...) впливає лише на визначення групування векторів, але не на їх модулі та початкові координати. Для нових менших кластерів № 2 виконується за формулою (5) перевірка евклідових відстаней між усіма парами векторів всередині кластерів; за формулою (6) визначаються квадрати евклідових відстаней між всіма парами векторів – центроїдів з метою виявлення можливості об'єднання кластерів.

Ми розглянули принципи визначення координат кластерів векторів у двовимірному просторі, які використовуються для розрахунків у n -мірному просторі будь-якої розмірності.

10. Деякі напрями застосування.

1. *Складні ієрархічно зв'язані інтелектуальні економічні системи*, при різній кількості фізично різних змінних і за наявності кількох спільних однакових змінних, можуть розглядатись як взаємозалежні і можуть бути «вставлені одна в одну» з взаємною прив'язкою їх виходів по T -комірках з додатковою окремою лінгвістичною та математичною інформацією. Такий підхід має властивості ієрархічних, продукційних, фреймових, семантичних і реляційних баз знань і є корисним у ієрархічних інтелектуальних системах прийняття рішень у випадках, коли прийняття рішення $F_{j1}(R_{j1})$ залежить від стану ієрархічно вищої системи $F_{j0}(R_{j0})$ та стану нижчої системи $F_{j2}(R_{j2})$.

2. При виконанні стохастичних розрахунків вектори вибірки можуть бути розподіленими за T -комірками з визначенням ймовірності їх розподілу та початковим групуванням через визначення центроїдів T -комірок. Подальше групування векторів може виконуватись на основі визначення величин відстаней між центроїдами.

3. Представлений аналіз дозволяє суттєво скоротити процес створення нейронної мережі, призначеної для класифікації об'єктів, бо не використовує навчання (за рахунок ресстрації розподілу існуючих навчальних об'єктів по T -комірках), попередньо дослідником не призначається кількість вихідних кластерів і не вказується форма їх взаємного розміщення (що впливає на виходи нейронів), не псуються вхідні дані згідно з даними «міри близькості» при урахуванні впливу латеральних зв'язків. Крім того, створена можливість аналізу складних кластерів з великими відстанями між ними при малих відстанях до окремих елементів складних кластерів.

4. Візуальний аналіз «чорного ящика» та складних функціональних залежностей дозволяє контролювати перехід годографа вхідного вектора даних R з

дозволених комірок у заборонені: для підприємства (по даних дискримінантного аналізу); для складних систем керування; для «чорного ящика» літака тощо.

5. Розглянутий аналіз є корисним для інтелектуальних багатоагентних ієрархічних систем, у яких T_{gr}^n -комірочки мають властивості окремих агентів, що довільно розміщуються у просторі при збереженні перпендикулярності осей координат, розглядають окремі частки загальної задачі і мають можливість у сукупності з іншими агентами (T -комірками та T -кутами) виконувати поставлену загальну задачу.

6. Існує теоретична можливість створення «загальної теорії всіх знань людства», якщо всі знання у вигляді цифрових функціональних залежностей описати за різними або частково співпадаючими сукупностями осей в одній n -вимірній системі осей прямокутних координат з наступним їх «об'єднанням» за загальними взаємними осям у один математичний «реально існуючий матеріально підтверджений» об'єкт. Ця модель, при спрощенні системи координат, буде давати вірні і підтвержені практикою дані. Для цього достатньо лише ввести перемикаючі функції для увімкнення осей потрібного аналізу або використати інші форми об'єднання і нормування змінних, особливо якщо об'єднувані теорії мають загальні змінні. Потрібно урахувувати шкідливість подібних моделей, якщо вони лише ускладнюють сприйняття навколишнього середовища, викликають даремні витрати ресурсів та часу на їх освоєння і не додають нових знань. З цієї точки зору треба обережно ставитись до подібних пропонуєваних об'єднуючих моделей знань.

Висновки.

1. *Людина живе в n -вимірному просторі при $n > 3$* . Це підтверджується кількістю його чутливих органів; можливістю будувати геометричних образів з двох будь-яких їх числових даних; аналізом людиною n -вимірних об'єктів з виміром і використанням багатьох інших змінних.

2. *Розроблена теоретична основа аналітичної геометрії в n -вимірних тілесних кутах*, яка дає можливість візуально будувати точку, лінію, площину в n -вимірному просторі прямокутної системи координат при $n > 3$. Для аналізу вихідної функції використовуються дві вхідні координати – модуль вхідного вектора та його напрямок. Двовимірний геометричний аналіз дозволяє класифікувати, візуалізувати і аналізувати на двовимірній мапі дані n -вимірної функції $Q(R)$, $R = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$, для всіх ділянок гіперпростору функції $Q(R)$: для кожної T -комірочки можна вказати ізолінії функції $Q(R)$, годограф вектора R чи значення $Q(R)$, максимальні, мінімальні та інтегральні характеристики.

3. *Отримана теоретична основа кластерних методів* класифікації і аналізу багатовимірних функціональних залежностей, включаючи статистичні дані та методи класифікації нейронних мереж. При цьому нейронні мережі при налагодженні без процесу навчання лише фіксують навчальні дані; кількість кластерів і їх форма представлення не визначаються заздалегідь та не псуються вхідні дані об'єктів з метою їх введення у «потрібний» кластер.

4. **Надається можливість додаткового інформаційного забезпечення** складних ієрархічних систем управління економікою та складних систем прийняття рішень, бо інтелектуальні багатовимірні системи різної фізичної природи можна представити як вкладені одна в одну функціонально зв'язані між собою порожнисті гіперкулі з наданням оперативної інформації і взаємною прив'язкою їх виходів по Т-комірках. Такий підхід має властивості баз знань (фреймових та ін.) і є корисним у ієрархічних інтелектуальних системах прийняття рішень з урахуванням залежності прийняття рішення $F_{i1}(R_{x_i})$ від стану ієрархічно вищої системи $F_{i0}(R_{z0})$ та ієрархічно нижчої системи $F_{i2}(R_{z2})$.

5. **Отримана теоретична основа для інтелектуальних багатоагентних систем**, бо T_{gr}^n -комірчки

мають всі властивості агентів, які довільно розміщуються у просторі при збереженні зв'язку по осях координат і можливості у сукупності з іншими агентами (Т-комірками та Т-кутами) виконувати поставлену загальну задачу.

6. **Існуючий математичний аналіз** надає теоретичну можливість отримати «загальну теорію знань людства» у вигляді однієї математичної моделі за рахунок опису окремих знань по різним сукупностям осей в одній n -вимірній системі прямокутних координат. Така модель буде давати вірні і підтвержені практикою дані при переході на визначену галузь знань. Потрібно ураховувати шкідливість подібних моделей і обережно ставитись до них, якщо вони викликають лише даремні витрати ресурсів та часу на їх освоєння і не додають нових знань.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гриньков В. В. Аналітична геометрія / В. В. Гриньков, І. К. Кириченко. – Харків : Гімназія, 2008. – 340 с.
2. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1974. – 832 с.
3. Барсегян А. А. Технологии анализа данных: Data Mining, Visual Mining, Text Mining, OLAP / Барсегян А. А., Куприянов М. С., Степаненко В. В., Холод И. И. – СПб. : БХВ-Петербург, 2007. – 384 с.
4. Трюон Р. С. Cluster analysis / Tryon R. C. – London : Ann Arbor Edwards Bros, 1939. – 139 p.
5. Жамбю М. Иерархический кластер-анализ и соответствия / М. Жамбю. – М. : Финансы и статистика, 1988. – 345 с.
6. Олдендерфер М. С. Кластерный анализ / М. С. Олдендерфер, Р. К. Блэшфилд // Факторный, дискриминантный и кластерный анализ. – М. : Финансы и статистика, 1989. – 215 с.
7. Kohonen T. Self-Organizing Formation of Topologically Correct Feature Maps / T. Kohonen // Biological Cybernetics. – 1982. – № 43. – P. 59–69.
8. Kohonen T. The Self-Organizing Map / T. Kohonen // Proc. of IEEE. – 1990. – 78. – № 9. – P. 1464–1480.
9. Калан Р. Основные концепции нейронных сетей / Р. Калан ; пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2003. – 288 с.

Кутковецкий В. Я.,

Черноморский государственный университет им. Петра Могили, г. Николаев, Украина.

Аналитическая геометрия в n -мерных телесных углах

Уменьшение масштаба телесных углов позволяет геометрично анализировать n -мерный простор переменных с прямоугольными осями координат. В n -мерной системе косоугольных координат с сохранением свойств прямоугольности можно построить точку, линию, вектор, площадь в 4-мерном и 5-мерном пространстве; можно рассматривать n -мерный шар с телесными n -мерными углами, охватывающий все векторы n -мерного пространства. Детерминированные, стохастические, непрерывные или дискретные, дифференцируемые функций $Q(R)$, которые зависят от модуля входного вектора $R = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ и его направления в n -мерном пространстве цифровых переменных x_j , можно визуально анализировать на двумерной карте телесных вложенных друг в друга полых шаров на основе точечных, средних или кластерных значений. Рассмотрены направления применения двумерного анализа в n -мерных интеллектуальных системах управления экономикой.

Ключевые слова: аналитическая геометрия; n -мерное пространство переменных; скалярные и векторные поля; интеллектуальные системы управления экономикой.

Kutkovetskyi V. Y.,

Peter Mogila Black Sea State University, Mykolaiv, Ukraine

Analytic geometry in n -dimensional space of corporeal angles

The diminution of corporeal angles allows the geometrically analyzing in the space of n -dimensional variables with squared axes. The oblique n -dimensional coordinate system with preserved properties of axes' squareness makes it possible to construct a geometric point, line, vector, plane in 4-dimensional and 5-dimensional space; to see

n-dimensional ball with n-dimensional corporeal angles that encompasses all the vectors of n-dimensional space. Deterministic, stochastic, continuous or discrete, differentiated functions $Q(R)$, which depend on the modulus of input vector $R = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ and its direction in n-dimensional space of variables x_j , can be analyzed on the base of point's, medium's or cluster's values on the two dimensional map that is created by unfolded hollow inserted one in another globes. Directions for use of 2-dimensional analysis of n-dimensional intelligent systems of economic management are considered.

Key words: *analytic geometry; n-dimensional space of variables; scalar and vector fields; intelligent system of economic management.*