УДК 004.94

Самойленко Є. Є.,
доцент, канд. техн. наук,
доцент кафедри
комп'ютерної інженерії,
ЧНУ ім. Петра Могили,
м. Миколаїв, Україна,
sam7@imath.kiev.ua

АЛГОРИТМИ ОПЕРАЦІЙ НАД МАТРИЦЯМИ-ОРТОПРОЕКТОРАМИ З $M_n(C)$

Бурхливий розвиток інтегрованих систем комп'ютерної математики для персональних комп'ютерів торкнувся найбільш інтелектуальної сфери діяльності людини – розв'язання особливо складних математичних та науково-технічних задач: задачі теорії поля, аеродинаміки, космонавтики, математичного моделювання систем і т. д. Але математичні методи знаходяться у постійному еволюційному розвитку і тому останні досягнення математичних наукових шкіл не є охопленими такими інтегрованими системами. Одна з таких областей математичного інструментарію – операторні C^*-алгебри. Все це пов'язано з потребами та запитами сучасної фізики. У роботі розглянуто матриці спеціального вигляду: $M = m^* \cdot m$, $D = d^* \cdot d$, $M(k) = m^*(k) \cdot m(k)$ та знайдено прості формули, які відображають їх властивості: $|m| = \sqrt{|m_1|^2 + |m_2|^2 + \ldots + |m_n|^2} = 1$, $MDM = \tau^2 M \iff |m \cdot d^*|^2 = \tau^2$, $M = U\hat{M}U^*$, $M(k) = U\hat{M}(k)U^*$.

Проведено алгоритмізацію основних операцій над об'єктами цієї різновидності якими є матриці-ортопроектори з $M_n(C)$.

***Ключові слова:** інтегровані системи; комп'ютерна математика; оператор; алгебра; матриця; ортопроектор; алгоритм*

Вступ. Останнім часом бурхливий розвиток отримали інтегровані системи комп'ютерної математики для персональних комп'ютерів. Вони суміщають у собі сучасний інтерфейс користувача, розв'язувачі математичних задач та потужні засоби графіки. Ці системи вторглися у найбільш інтелектуальну сферу діяльності людини – розв'язання особливо складних математичних та науково-технічних задач: задачі теорії поля, аеродинаміки, космонавтики, математичного моделювання систем і т. д. Проблемою є те, що математичні методи знаходяться у постійному еволюційному розвитку. Тому останні досягнення математичних наукових шкіл (див. 1–9) не є охопленими такими інтегрованими системами.

Проаналізуємо одну з таких областей математичного інструментарію. Нехай F_n – стандартна поліноміальна тотожність степеня n з n некомутативними змінними. Зокрема, говоримо, що A є F_n-алгебра, якщо $\forall x_1, \ldots, x_n \in A$ виконується рівність $F_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Яскравим прикладом таких алгебр є алгебра квадратних матриць над полем комплексних чисел $M_n(C)$. Теорема Аміцура-Левітскі говорить, що $M_n(C)$ є F_{2n}-алгеброю, але не F_{2n-1}-алгеброю. F_n-алгебри є одним з найважливіших класів алгебр, якщо розглядати їх з точки зору структури незвідних зображень алгебри. З того, що A є F_{2n}-алгеброю випливає, що для довільного зображення $\pi \in IrrepA$ з множини незвідних зображень алгебри A розмірність цього зображення не перевищує n. Навпаки стверджувати не можна. Контрприкладом цього слугує $*$-алгебра Вейля диференціальних операторів з поліноміальними коефіцієнтами від однієї змінної $C\langle P = P^*, Q = Q^* | [P, Q] = iI \rangle$. Багато робіт присвячено дослідженню алгебр, які є C^*-алгебрами, зокрема таким:

$$A(n,m) = C\left\langle P_1, \ldots, P_n \middle| P_k = P_k^* = P_k^2,\ F_i(P_1, \ldots, P_n) = 0,\ i = 1, \ldots m \right\rangle.$$

Алгебри $A(n, m)$ породжені ортопроекторами P_k з поліноміальними тотожностями F_i. Знаходяться незвідні $*$-зображеня (з точністю до унітарної еквівалентності) таких алгебр та умови їх існування. Описуються породжені ними обгортуючі C^*-алгебри.

Розглянувши систему аксіом C^*-алгебр І. М. Гельфанд та М. А. Наймарк встановили, що «немає

C^*-алгебр, окрім операторних C^*-алгебр». Все це пов'язано з потребами та запитами сучасної фізики: недарма некомутативну математику називають також "квантовою".

Ціллю даної статті є алгоритмізація операцій над матрицями-ортопроекторами з $M_n(\boldsymbol{C})$.

Основні результати. Нехай ненульова матриця з комплексними елементами $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ має вигляд

$$M = m^* \cdot m = \begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \overline{m}_2 \\ \vdots \\ \overline{m}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{m}_1 m_1 & \overline{m}_1 m_2 & \cdots & \overline{m}_1 m_n \\ \overline{m}_2 m_1 & \overline{m}_2 m_2 & \cdots & \overline{m}_2 m_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{m}_n m_1 & \overline{m}_n m_2 & \cdots & \overline{m}_n m_n \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де $\forall i \in \boldsymbol{N} \quad m_i \in \boldsymbol{C}$, ($*$ – стандартна матрична інволюція, тобто транспонування та комплексне спряження). Тоді M – ортопроектор (тобто $M^2 = M = M^*$) тоді і тільки тоді, коли

$$|m| = \sqrt{|m_1|^2 + |m_2|^2 + \ldots + |m_n|^2} = 1. \qquad (2)$$

Справді, переконаємося, що $\boldsymbol{M}^* = \boldsymbol{M}$. Маємо: $\boldsymbol{M}^* = (\boldsymbol{m}^* \cdot \boldsymbol{m})^* = \boldsymbol{m}^* (\boldsymbol{m}^*)^* = \boldsymbol{m}^* \cdot \boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}$.

Врахуємо, що

$$m \cdot m^* = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \overline{m}_2 \\ \vdots \\ \overline{m}_n \end{pmatrix} = |m_1|^2 + |m_2|^2 + \ldots |m_n|^2 = |m|^2$$

отримаємо:

$$M^2 = m^* \cdot m \cdot m^* \cdot m = \begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \overline{m}_2 \\ \vdots \\ \overline{m}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \overline{m}_2 \\ \vdots \\ \overline{m}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \overline{m}_2 \\ \vdots \\ \overline{m}_n \end{pmatrix} \underbrace{\left(|m_1|^2 + |m_2|^2 + \ldots |m_n|^2 \right)}_{=|m|^2} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix} = |m|^2 \begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \overline{m}_2 \\ \vdots \\ \overline{m}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \end{pmatrix} = |m|^2 M.$$

Отже, $\boldsymbol{M}^2 = |\boldsymbol{m}|^2 \boldsymbol{M} \quad \Leftrightarrow \quad |\boldsymbol{m}| = 1$.

Далі, нехай матриці з комплексними елементами $M, S \in M_n(\boldsymbol{C})$ мають вигляд (1):

$M = m^* \cdot m$, $S = s^* \cdot s$

де $\forall i \in \boldsymbol{N} = \overline{1,n} \quad m_i, s_i \in \boldsymbol{C}$, причому

$$m = \begin{pmatrix} m_1 & \ldots & m_k & m_{k+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$s = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & s_k & s_{k+1} & \ldots & s_n \end{pmatrix}, \quad m^* \cdot s \neq 0.$$

Тоді $MS = SM = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{m}_k s_k + \overline{m}_{k+1} s_{k+1} = 0$.

Справді, врахуємо, що $MS = m^* \cdot m \cdot s^* \cdot s =$

$$= \begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \vdots \\ \overline{m}_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{m}_1 & \ldots & \overline{m}_k & \overline{m}_{k+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s}_1 \\ \vdots \\ \overline{s}_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{s}_1 & \ldots & \overline{s}_k & \overline{s}_{k+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \vdots \\ \overline{m}_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left(\overline{m}_k s_k + \overline{m}_{k+1} s_{k+1}\right)\left(\overline{s}_1 \quad \dots \quad \overline{s}_k \quad \overline{s}_{k+1} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\right) = \left(\overline{m}_k s_k + \overline{m}_{k+1} s_{k+1}\right)\cdot\left(m^* \cdot s\right),$$

оскільки $m^* \cdot s \neq 0$, тоді $\overline{m}_k s_k + \overline{m}_{k+1} s_{k+1} = 0$. Для SM – аналогічно.

Далі, нехай матриці з комплексними елементами $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{D} \in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ мають вигляд (1):

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}^* \cdot \boldsymbol{m},\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{d}^* \cdot \boldsymbol{d} \qquad (3)$$

де $\forall \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{N} = \overline{1,n} \quad m_i, d_i \in \boldsymbol{C}$, причому $\left|\, m \right|^2 = 1$, $\left|\, d \right|^2 = 1$. Тоді $\boldsymbol{MDM} = \tau^2 \boldsymbol{M}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\left|\, m \cdot d^* \right|^2 = \tau^2. \qquad (4)$$

Справді, врахуємо, що

$$MD = \left(m^* \cdot m\right)\left(d^* \cdot d\right) = \begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \overline{m}_2 \\ \vdots \\ \overline{m}_n \end{pmatrix}\left(m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_n\right)\begin{pmatrix} \overline{d}_1 \\ \overline{d}_2 \\ \vdots \\ \overline{d}_n \end{pmatrix}\left(d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \overline{m}_2 \\ \vdots \\ \overline{m}_n \end{pmatrix}\left(m_1\overline{d}_1 + m_2\overline{d}_2 + \ldots + m_n\overline{d}_n\right)\left(d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n\right) =$$

$$= \left(m_1\overline{d}_1 + m_2\overline{d}_2 + \ldots + m_n\overline{d}_n\right)\cdot\begin{pmatrix} \overline{m}_1 \\ \overline{m}_2 \\ \vdots \\ \overline{m}_n \end{pmatrix}\left(d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n\right) = \left(m \cdot d^*\right)\cdot\left(m^* \cdot d\right),$$

отримаємо:

$$MDM = \left(m^* \cdot m\right)\left(d^* \cdot d\right)\left(m^* \cdot m\right) = \left(m \cdot d^*\right)\cdot\left(m^* \cdot d\right)\left(m^* \cdot m\right) =$$
$$= \left(m \cdot d^*\right)\cdot\left(d \cdot m^*\right)\left(m^* \cdot m\right) = \left(m \cdot d^*\right)\left(d \cdot m^*\right)\cdot M = \left(m \cdot d^*\right)\left(m \cdot d^*\right)^* M = \left|m \cdot d^*\right|^2 \cdot M,$$

звідки $\left|\, m \cdot d^* \right|^2 = \tau^2$.

Далі, нехай сім'я матриць з комплексними елементами $M(k) \in M_n(\boldsymbol{C})$, $1 \le k \le n-1$ має вигляд (1):

$$M(k) = m^*(k) \cdot m(k), \quad m(k) = \Big(\underbrace{\overbrace{0,\ldots,0}^{k-1}, m_k(k)\mathrm{e}^{i\varphi_k(k)}, m_{k+1}(k)\mathrm{e}^{i\varphi_{k+1}(k)}, \overbrace{0,\ldots,0}^{n-k-1}}_{n}\Big) \in \boldsymbol{C}^n, \qquad (5)$$

де $1 \le k \le n-1$, $i = \sqrt{-1}$, $m_k(k), m_{k+1}(k) \in \boldsymbol{R}$. Тоді $\exists U \in M_n(\boldsymbol{C})$:

$$\forall k \in \{1,\ldots,n-1\} \;\; U\, M(k) U^* = \hat{M}(k) \in M_n\left(\boldsymbol{R}_0^+\right),\; U^* = U^{-1},\; \boldsymbol{R}_0^+ = \left\{x \in \boldsymbol{R} \middle| \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\right\}.$$

Можна побудувати матрицю

$$U = \mathrm{diag}(u_k),\ 1 \le k \le n-1, \qquad (6)$$

причому:

$$u_1 = \mathrm{Exp}\left(i\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_j(j)\right);\ u_k = \mathrm{Exp}\left(i\sum_{r=1}^{k-1}\varphi_{r+1}(r) + i\sum_{j=k}^{n-1}\varphi_j(j)\right),\ 2 \le k \le n-1;$$

$$u_n = \mathrm{Exp}\left(i\sum_{r=1}^{n-1}\varphi_{r+1}(r) + i\varphi_n(n-1)\right).$$

Легко перевірити, що $U^* = U^{-1}$. Врахуємо, що

$$\varphi \overset{def}{=} i\varphi_k(k) - i\varphi_k(k) + i\sum_{r=1}^{k-1}\varphi_{r+1}(r) + i\sum_{j=k+1}^{n-1}\varphi_j(j) = i\varphi_{k+1}(k) - i\varphi_{k+1}(k) + i\sum_{r=1}^{k-1}\varphi_{r+1}(r) + i\sum_{j=k+1}^{n-1}\varphi_j(j).$$

Тоді $\forall k : 2 \le k \le n-2$ виконується:

$$U\,M(k)U^* = U\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & (m_k(k))^2 & m_k(k)m_{k+1}(k)\mathrm{e}^{i(-\varphi_k(k)+\varphi_{k+1}(k))} & \vdots \\ \vdots & m_k(k)m_{k+1}(k)\mathrm{e}^{i(\varphi_k(k)-\varphi_{k+1}(k))} & (m_{k+1}(k))^2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}U^* =$$

$$= U\,m^*(k)m(k)U^* = \left(U\,m^*(k)\right)\cdot\left(m(k)U^*\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_k\,\mathrm{Exp}\left(-i\varphi_k(k) + i\sum_{r=1}^{k-1}\varphi_{r+1}(r) + i\sum_{j=k}^{n-1}\varphi_j(j)\right) \\ m_{k+1}\,\mathrm{Exp}\left(-i\varphi_{k+1}(k) + i\sum_{r=1}^{k}\varphi_{r+1}(r) + i\sum_{j=k+1}^{n-1}\varphi_j(j)\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\cdot\left(0\ldots0 \quad m_k\,\mathrm{Exp}\left(-i\varphi_k(k) + i\sum_{r=1}^{k-1}\varphi_{r+1}(r) + i\sum_{j=k}^{n-1}\varphi_j(j)\right) \quad m_{k+1}\,\mathrm{Exp}\left(-i\varphi_{k+1}(k) + i\sum_{r=1}^{k}\varphi_{r+1}(r) + i\sum_{j=k+1}^{n-1}\varphi_j(j)\right) \quad 0\ldots0\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_k\,\mathrm{Exp}(\varphi) \\ m_{k+1}\,\mathrm{Exp}(\varphi) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.\left(0\ldots0 \quad m_k\,\mathrm{Exp}\,(-\varphi) \quad m_{k+1}\,\mathrm{Exp}\,(-\varphi) \quad 0\ldots0\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & (m_k(k))^2 & m_k(k)m_{k+1}(k) & \vdots \\ \vdots & m_k(k)m_{k+1}(k) & (m_{k+1}(k))^2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \hat{M}(k).$$

Аналогічно перевіряється, що $U\,M(1)U^* = \hat{M}(1)$ та $U\,M(n-1)U^* = \hat{M}(n-1)$. Також аналогічно матрицю M у вигляді (1) легко представити у вигляді

$$M = U\hat{M}U^*, \qquad (7)$$

де

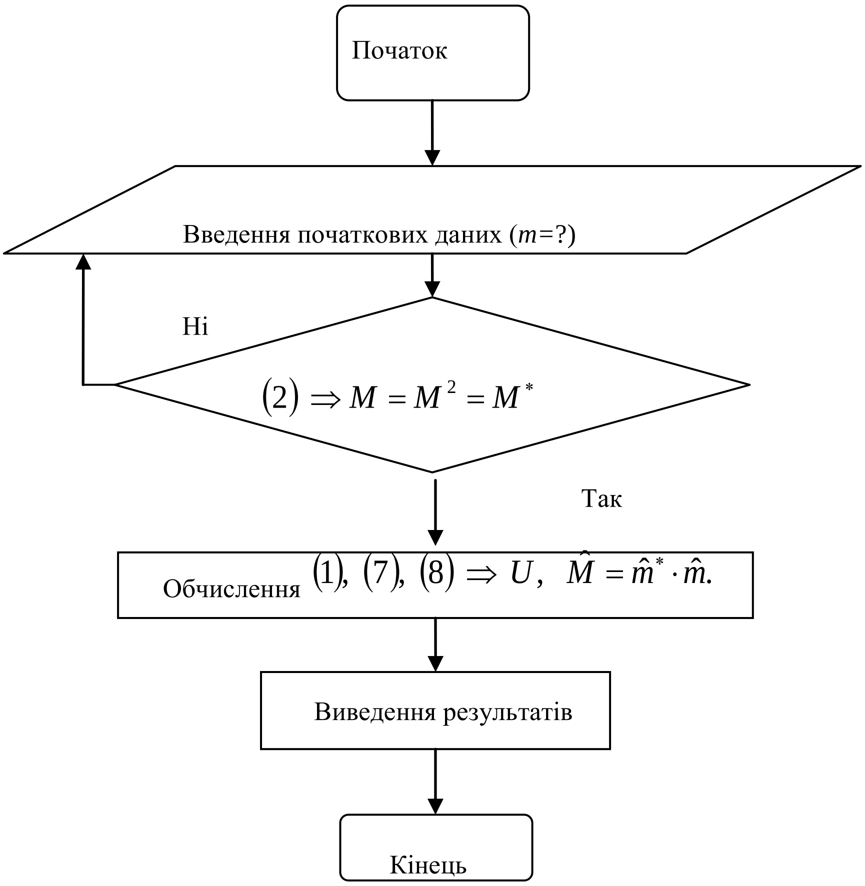
$$U = \mathrm{diag}(u_k),\ u_k = |\,m_k| \cdot \mathrm{Exp}(\varphi_k),\ 1 \le k \le n \qquad (8)$$

Наведемо зразки таких алгоритмів. Нехай M – ортопроектор (тобто $M^2 = M = M^*$) тоді можна записати алгоритм зведення ортопроектора (з точністю до унітарного оператора) до дійсно значного вигляду.

Алгоритм 1:

1) отримання початкових даних;
2) перевірка початкових даних;
3) розклад ортопроектора у вигляді (1);
4) знаходження з $(1), (7), (8) \Rightarrow U,\ \hat{M} = \hat{m}^* \cdot \hat{m}$;
5) вивід результатів.

Блок-схема алгоритму 1



Нехай $M(k)$ – сім'я ортопроекторів вигляду (5). Тоді можна записати алгоритм зведення такої сім'ї ортопроекторів (з точністю до унітарного оператора) до дійсно значного вигляду та обчислення функції від такої сім'ї $\tilde{M}$:

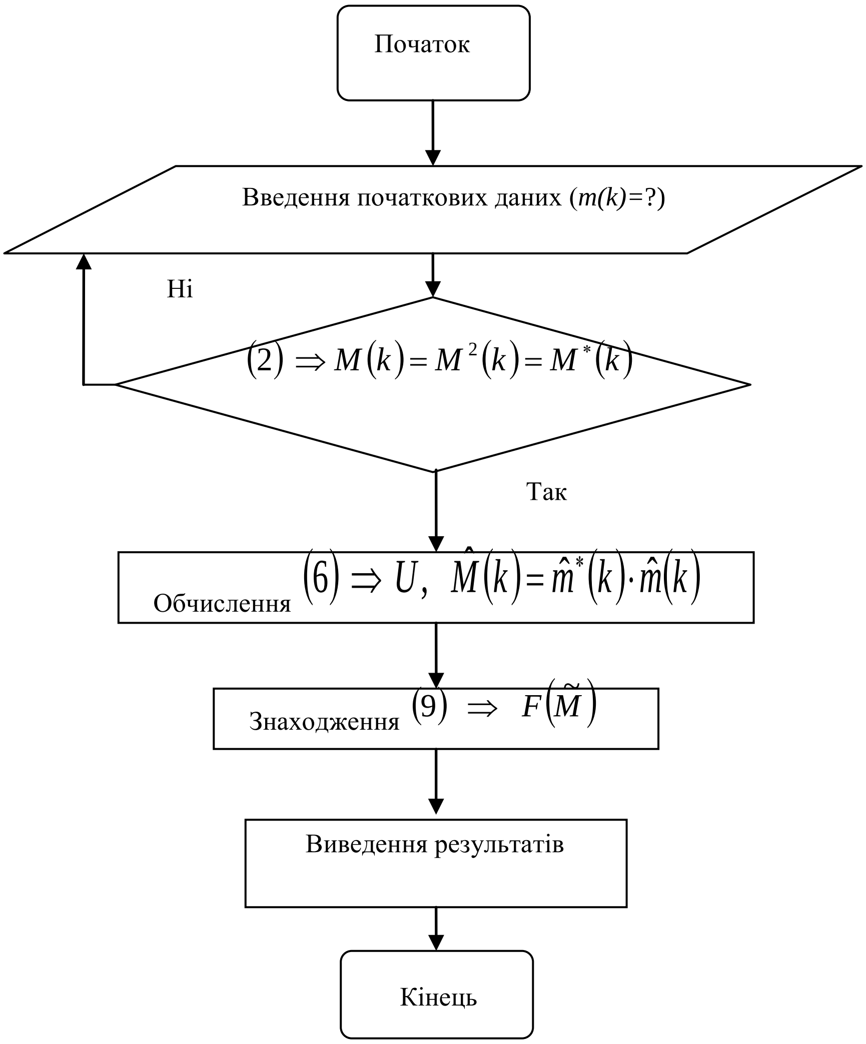
$$F(\tilde{M}) = a_1M_1 + a_2M_2 + \ldots + a_nM_1 =$$
$$U(\mathrm{Re}(a_1)M_1 + \mathrm{Re}(a_2)M_2 + \ldots + \mathrm{Re}(a_n)M_1)U^* + iU(\mathrm{Im}(a_1)M_1 + \mathrm{Im}(a_2)M_2 + \ldots + \mathrm{Im}(a_n)M_1)U^*, \qquad (9)$$

бо коефіцієнти a_k можуть бути комплексними. Відмітимо, що формула (9) має такий вигляд, який мінімізує кількість обчислювальних операцій з врахуванням комплекснозначності коефіцієнтів a_k.

Алгоритм 2:

1) отримання початкових даних;
2) перевірка початкових даних;
3) розклад ортопроектора у вигляді (5);
4) знаходження з $(6) \Rightarrow U,\ \hat{M}(k) = \hat{m}^*(k) \cdot \hat{m}(k)$;
5) знаходження $(9) \Rightarrow F(\tilde{M})$
6) вивід результатів.

Блок-схема алгоритму 2



Висновок. Метою дослідження була система правил виконання конкретного дискретного процесу, яка досягає поставленої мети за скінчений час.

У цілому мету досягнуто. Хоча немає остаточної відповіді на питання: які властивості систем матрицьортопроекторів вважати основними, а які ні. Дослідження можна продовжити у напрямку побудови алгоритмів роботи з квантово-механічними системами.

ЛІТЕРАТУРИ

1. Halmos P. R. Two subspaces [text] / P. R. Halmos // Trans. of the Amer. Math. Soc. – 1969. – 144. – P. 381–389.
2. Popova N. D. On the existence of configurations of subspaces in a Hilbert space with fixed angles [text] / N. D. Popova , Yu. S. Samoilenko // Sigma Symmetry Integrability Geom. Metods Appl. – 2006. – 2, № 055. – P. 1–5.
3. Albeverio S. On functions on graphs and representations of a certain class of $*$-algebras [text] / S. Albeverio, V. Ostrovskyi, Y. Samoilenko // J. Algebra. – 2007. – 308, № 2. – P. 567–582.
4. Samoilenko Ye. Ye. On Spectrum of Matrix-Valued Continuous Functions of a Family of Commuting Operators [text] / Ye. Ye. Samoilenko // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, – 2004. – 50, № 3. – P. 1192–1194.
5. Власенко М. А. О конфигурациях подпространств гильбертова пространства с фиксированными углами между ними [текст] / М. А. Власенко, Н. Д. Попова // Укр. мат. журн. – 2004. – 56, № 5. – С. 606–615.
6. Самойленко Ю. С. О простых n-ках подпространств гильбертова пространства [текст] / Ю. С. Самойленко, А. В. Стрелец // Укр. мат. журн. – 2009. – 61, № 12. – С. 1668–1706.
7. Кругляк С. А. Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов [текст] / С. А. Кругляк, Ю. С. Самойленко // Функцион. анализ. и его прил. – 1980. – 14, № 1. – С. 60–62.

Є. Є. Самойленко,
Черноморский национальный университет
им. Петра Могилы,
г. Николаев, Украина

АЛГОРИТМЫ ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ-ОРТОПРОЕКТОРАМИ С $M_n(C)$

Бурное развитие интегрированных систем компьютерной математики для персональных компьютеров коснулось наиболее интеллектуальной сферы деятельности человека – решение особенно сложных математических и научно-технических задач: задачи теории поля, аэродинамики, космонавтики, математического моделирования систем и т. д. Но математические методы находятся в постоянном эволюционном развитии и поэтому последние достижения математических научных школ не являются охваченными такими интегрированными системами. Одна из таких областей математического инструментария – операторные C^*-алгебры. Всё это связано с потребностями и запросами современной физики. В данной работе рассмотрено матрицы специального вида: $M = m^* \cdot m$, $D = d^* \cdot d$, $M(k) = m^*(k) \cdot m(k)$ и найдено простые формулы, которые отображают их основные свойства: $|m| = \sqrt{|m_1|^2 + |m_2|^2 + \ldots + |m_n|^2} = 1$, $MDM = \tau^2 M \Leftrightarrow |m \cdot d^*|^2 = \tau^2$, $M = U\hat{M}U^*$, $M(k) = U\hat{M}(k)U^*$. Проведено алгоритмизацию основных операций над матрицами-ортопроекторами с $M_n(C)$.

Ключевые слова: *интегрированные системы; компьютерная математика; оператор; алгебра; матрица; ортопроектор; алгоритм.*

E. E. Samoilenko,
Petro Mohyla Black Sea National University,
Mykolayiv, Ukraine

ALGORITHMS FOR OPERATIONS ON PROJECTION-MATRICES OF $M_n(C)$

The rapid development of integrated systems of computer mathematics for PCs affected most intellectual sphere of human activity – especially solving complex mathematical and scientific-technical problems, problems of field theory, aerodynamics, space, mathematical modeling systems and so on. But math methods are in constant evolutionary development and therefore the latest achievements of mathematical scientific schools are not covered by such integrated systems. One of the areas of mathematical tools – C^*-operator algebra. This is due to the needs and demands of modern physics. In this paper, it's the matrix of special type: $M = m^* \cdot m$. Matrix M is projection if and only if $|m| = \sqrt{|m_1|^2 + |m_2|^2 + \ldots + |m_n|^2} = 1$. For this matrix presented algorithm of conversion to within unitary transformation from a complex-valued matrix-projection to real-valued matrix-projection: 1) obtaining initial data; 2) verification of source data; 3) schedule in the form projection; 4) finding out: U, $\hat{M} = \hat{m}^* \cdot \hat{m}$; 5) output results. And matrix properties of this type are investigated. That, matrix $M = m^* \cdot m$, $S = s^* \cdot s$, $m = (m_1 \ \ldots \ m_k \ m_{k+1} \ 0 \ 0 \ \ldots \ 0)$, $s = (0 \ \ldots \ 0 \ 0 \ s_k \ s_{k+1} \ \ldots \ s_n)$, $m^* \cdot s \neq 0$ are orthogonal $MS = SM = 0$ if and only if $\overline{m}_k s_k + \overline{m}_{k+1} s_{k+1} = 0$. And let matrix $M, D \in M_n(C)$ with complex elements are as follows: $M = m^* \cdot m$, $D = d^* \cdot d$, where $\forall i \in N = \overline{1,n}$ $m_i, d_i \in C$, $|m|^2 = 1$, $|d|^2 = 1$ then $MDM = \tau^2 M$ if and only if $|m \cdot d^*|^2 = \tau^2$. For family of $M(k) = m^*(k) \cdot m(k)$-matrix, where $m(k) = \left(\underbrace{\overbrace{0,\ldots,0}^{k-1}, \widetilde{m}_k(k), \widetilde{m}_{k+1}(k), \overbrace{0,\ldots,0}^{n-k-1}}_{n}\right) \in C^n$ presented algorithm of conversion to within unitary transformation from a complex-valued family of matrix-projection to real-valued family of matrix-projection and calculating $F(\widetilde{M})$-function of family this matrix: 1) obtaining initial data; 2) verification of source data; 3) schedule in the form projection; 4) finding out: U, $\hat{M}(k) = \hat{m}^*(k) \cdot \hat{m}(k)$; 5) calculating $F(\widetilde{M})$; 6) output results. So, a algorithmization of basic operations of objects which are the matrix-projection and the family of the matrix-projections was made.

Key words: *integrated systems; computer mathematics; operator; algebra; matrix; projection; algorithm.*

Рецензенти: д. т. н., проф. ***А. Н. Хомченко;***
к. т. н., доц. ***І. О. Кравець.***

Дата надходження статті до редколегії 10.11.16