УДК 374.1.511.1

Майборода О. В.,
к. е. н., доцент, НУК ім. адмірала Макарова, м. Миколаїв, Україна
Воробйова А. І.,
к. ф-м. н., доцент, ЧДУ ім. Петра Могили, м. Миколаїв, Україна
Майборода В. А.,
вчитель вищої категорії, ММК ім. В. Д. Чайки, м. Миколаїв, Україна

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ І ЗАДАЧІ ШКІЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

У статті розглядається система формування дослідницьких компетентностей та розвиток математичних здібностей учнів-слухачів Малої академії наук. З урахуванням вікових психологічних особливостей учнів, надається практичне застосування методики розвитку інноваційного потенціалу майбутніх науковців.

Ключові слова: _математичні турніри, Мала академія наук, числа Ферма, проблема Варінга, двійкова система числення, тернарна квадратична форма._

Вступ. Проблема активізації пізнавально-пошукової діяльності учнів, розширення дослідницьких компетентностей та розвиток математичних здібностей учнів-слухачів Малої академії наук полягає в організації роботи таким чином, щоб майбутній науковець мав можливість найбільшою мірою проявити свої задатки і творчі здібності.

Доповнюючи індивідуальну активність суб'єктів навчання позитивним впливом навчального середовища, останнім часом більшої переваги надають технологіям соціально-активного навчання в системі позашкільної освіти звертаючи увагу на збільшення інноваційного потенціалу науково-дослідницьких робіт Малої академії наук.

Враховуючи корекцію психологічних проблем юних дослідників пов'язаних з збільшенням навантаження та інтенсивною роботою в «малій» науковій школі важливо побудувати стосунки активної взаємодії між учнем та вченим – науковим керівником шляхом занурення в реальну атмосферу ділової співпраці розв'язання наукової проблеми. Основна проблема при цьому полягає в постановці дослідницької задачі, яка складає основу наукового пошуку юного дослідника.

Аналіз досліджень і публікацій. Говорячи про ідею зближення сучасної математичної науки із шкільною математикою, ми продовжуємо вбачати роботу в системі МАН головним чинником її реалізації. А головною проблемою вчителів і учнів, що залучаються в цю систему, продовжує залишатись вибір теми наукової роботи. Вимоги до тем наукових робіт та джерела, з яких ці теми можна почерпнути, були нами висвітлені в роботі «Матеріали математичних турнірів як джерело задач дослідницького характеру для роботи в системі МАН» [2].

Серед іншого ми вказали на можливість вибору тем із задач математичних турнірів. Завдання XVII Всеукраїнського турніру Юних математиків ім. проф. М. І. Ядренка підтвердили наші сподівання і дали можливість знайти декілька цікавих, на наш погляд, задач, що легко можуть стати об'єктами математичного дослідження учнів [10].

Постановка задачі. У даній статті зупинимось на завданні № 10 XVII Всеукраїнського турніру Юних математиків ім. проф. М. І. Ядренка «Зображення чисел Ферма».

«_Числа_ $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \geq 0$, _називаються числами Ферма. При_ $n \geq 3$ _подайте кожне із них у вигляді суми квадратів трьох різних натуральних чисел_».

Багатогранність цієї задачі ми вбачаємо не тільки в тому що пропонуються для розгляду числа Ферма, які крім відомих, очевидно, мають і не досліджені ще властивості.

Інший аспект задачі може розглядатися в контексті проблеми Варінга. Нагадаємо її форму лювання. В перше проблема теорії чисел, сформульована Е. Варінгом (E. Waring) у 1770 р. в наступному вигляді: довільне натуральне число є сума чотирьох квадратів, дев'яти кубів, дев'ятнадцяти четвертих ступенів. Іншими словами: для будь-якого $n \geq 2$ існує таке $s = s(n)$, залежне тільки від _n_, що будь-яке натуральне число є сумою _n_-х ступенів невід'ємних цілих чисел:

$$\forall k \in N,\ \exists s = s(k) \in N,\ \text{що}\ \forall n \in N$$

діофантове рівняння

$$n = x_1^{\ k} + x_2^{\ k} + \ldots x_s^{\ k} \qquad (1)$$

має хоча б один розв'язок у Z^+.

Як легко бачити, проблема Варінга складається із трьох, не обов'язково пов'язаних між собою задач:

– власне існування розв'язків;
– знаходження їх кількості;
– знаходження формул для коренів даного рівняння.

Аналіз проблеми Варінга. До XX століття проблему вдавалось вирішити лише частково. Тільки в 1908 р. відповідь на перші два питання дав Д. Гільберт [5]. Нове доведення цієї проблеми в 1928р. було запропоновано Г. Х. Харді та Дж. І. Літлвудом [5]. Великий внесок у розв'язання проблеми пізніше зробили І. М. Виноградов [1], Г. Бейтмен та інші. У середині XX ст. у дослідженні проблеми Варінга значні результати отримав Ю. В. Лінник [11]. Серед перших здобутків відомий результат Лагранжа, що якщо $k = 2$, то $s = 4, \forall n \in N$. Також ще Л. Ейлер показав, що всі натуральні числа за виключенням чисел виду $4^m \cdot (8n+7), m, n = 0,1,2,\ldots$ можуть бути представлені у вигляді

$$n = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (2)$$

Але, крім деяких часткових випадків, загальних алгоритмів чи формул, які розв'язували б третю задачу проблеми Варінга нам невідомі. Тобто, не існує єдиного алгоритму чи методу, що дозволяє знаходити розв'язки (1) чи (2) для $\forall n \in N$.

Враховуючи, що (2) відоме також під назвою «тернарної квадратичної форми», яка надзвичайно широко використовується в прикладних питаннях фізики, зокрема в кристалографії не дивно, що саме на її дослідженні найбільше зупинялись Л. Ейлер, Г. Бейтмен, Ю. В. Лінник. Так, наприклад, для часткового випадку (2) у вигляді $n = x^2 + y^2 + p_1 p_2$, де p_1 *і* p_2 пробігають всі прості числа, Ю. В. Лінник одержав асимптотичну формулу для підрахунку кількості розв'язків цього рівняння [11]:

$$Q(n) \sim \pi A_0 \frac{\ln\ln n}{\ln n} \prod_{p \backslash n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)}, \text{ де}$$

$$A_0 = \prod_p \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right).$$

Виходячи з вищесказаного, можна говорити про *наукову актуальність* задачі № 10 «Зображення чисел Ферма», в якій іде мова про представлення чисел Ферма тернарною квадратичною формою. А сам розв'язок задачі можна вважати *науковою новизною*, що пропонує вирішення третьої задачі у проблемі Варінга, для чисел Ферма.

Розв'язок задачі завершується теоремою.

Теорема. Всі числа Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \geq 3$ у двійковій системі числення можуть бути подані у вигляді суми трьох квадратів (тернарної квадратичної форми) наступним чином:

$$F_n = 1\underbrace{00\ldots00}_{2^{n-1}}1 = \left(\underbrace{10\ldots10}_{2^{n-2}-1}11\right)^2 + \left(\underbrace{10\ldots10}_{2^{n-2}}\right)^2 + \left(\underbrace{10\ldots10}_{2^{n-2}-2}110\right)^2 \qquad (3)$$

Правильність теореми виплаває із наступних тверджень.

Лема 1. Всі числа Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \geq 0$ у двійковій системі числення мають вигляд:

$$F_n = 1\underbrace{00\ldots00}_{2^{n-1}}1.$$

Лема 2. Для чисел виду

$$x = \underbrace{10\ldots10}_{2^{n-2}-1}11, \quad y = \underbrace{10\ldots10}_{2^{n-2}}, \quad z = \underbrace{10\ldots10}_{2^{n-2}-2}110, n \geq 3$$

Справедлива рівність

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\underbrace{00\ldots00}_{2^{n-1}}1.$$

Справедливість леми 1 і леми 2 в свою чергу ґрунтується на теоремі про можливість запису будь-якого натурально числа в *p*-ічній системі числення ($p \geq 2$) єдиним способом [1, 3]. А також на властивостях арифметичних операцій в цих системах [1, 3].

Безумовно, в силу того, що числа Ферма, уже починаючи з $n = 6$ є досить великими, формула (3) носить скоріше теоретичний, ніж практичний характер. Проте, ми легко можемо продемонструвати результат для $n = 3, 4, 5, 6$, що і пропонуємо, як *апробацію* формули (3) із сформульованої теореми у наступних прикладах.

Приклади.

1) $n = 3$:

$$2^{2^3} + 1 = 257 = 1\underbrace{0000000}_{7}1_2 =$$

$$= (1011_2)^2 + (1010_2)^2 + (110_2)^2 =$$

$$= 11^2 + 10^2 + 6^2 = 121 + 100 + 36 = 257$$

2) $n = 4$:

$$2^{2^4} + 1 = 65537 = 1\underbrace{00\ldots00}_{15}1_2 =$$

$$= \left(\underbrace{101010}_{3}11_2\right)^2 + \left(\underbrace{10101010_2}_{4}\right)^2 + \left(\underbrace{1010}_{2}110_2\right)^2 =$$

$$= 171^2 + 170^2 + 86^2 = 65537$$

3) $n = 5$:

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 1\underbrace{00\ldots00}_{31}\,1_2 =$$

$$= \left(\underbrace{10\ldots10}_{7}11_2\right)^2 + \left(\underbrace{10\ldots10_2}_{8}\right)^2 + \left(\underbrace{10\ldots10}_{6}110_2\right)^2 =$$

$$= 43691^2 + 43690^2 + 21846^2 = 4294967297$$

3) $n = 6$:

$$2^{2^6} + 1 = 18446744073709551617 = 1\underbrace{00\ldots00}_{63}\,1_2 =$$

$$= \left(\underbrace{10\ldots10}_{15}11_2\right)^2 + \left(\underbrace{10\ldots10_2}_{16}\right)^2 + \left(\underbrace{10\ldots10}_{14}110_2\right)^2 =$$

$$= 2863311531^2 + 2863311530^2 + 1431655766^2 =$$

$$= 18446744073709551617$$

Результати досліджень. Ми свідомо не зупинилися на самому *моменті пошуку* чисел x, y, z у формулі (3), залишаючи можливість кожному отримати задоволення в результаті цієї роботи. Всі, хто пройде цей шлях, зможе не тільки зробити відкриття формули самостійно, а ще і встановити багато фактів, які, можливо, виявляться непотрібними для даної задачі, але безумовно стануть в нагоді при її різноманітних розширеннях і узагальненнях. В рамках даної статті ми також не мотивуємо наш перехід до двійкової системи числення, хоча це майже очевидно і на це надихають слова Г. В. Лейбніца: «… лічба двійками, тобто за допомогою 0 і 1, виявляється найбільш фундаментальною у науковому сенсі і дозволяє робити нові відкриття…» [4].

Отже, задача № 10 розв'язана. Проте залишається багато питань, пов'язаних з даною проблематикою, які можуть послужити стимулом для майбутніх учнівських досліджень. Наприклад:

1. При яких n рівняння (2) ще допускає знаходження досить простих формул для розв'язків.
2. Як впливають вагові коефіцієнти $\alpha_i \in N, \quad i = \overline{1, 3}$ на кількість розв'язків рівняння $n = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2$.
3. Показати, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_3(n) x^n = \left(1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \ldots\right)^3 = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \left(x^{u^2}\right)^3,$$

де $R_3(n)$ – кількість розв'язків рівняння (2).

4. При будь-якому натуральному n позначимо через $r_s(n)$ число розв'язків рівняння $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_s^2 = n$ в цілих числах $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Покладемо що $f_s = (2s)^{-1} r_s(n)$. Відомо, що при $s = 1, 2, 4, 8$ функція f_s мультиплікативна, тобто для будь-якої пари взаємно простих натуральних чисел m і n виконується рівність $f_s(mn) = f_s(m) f_s(n)$. Доведіть, що f_s не є мультиплікативною при будь-якому іншому значенні s.

Питання з проблемами адитивної теорії чисел можна продовжувати див. [7; 8; 9].

Висновки. Система формування дослідницьких компетентностей та розвиток математичних здібностей учнів-слухачів Малої академії наук базується на тісній співпраці учня та наукового консультанта, керівника.

Проблема розвитку інноваційного потенціалу майбутніх науковців, враховуючи їх вікові психологічні особливості, потребує насамперед правильної науково обґрунтованої постановки дослідницької задачі. В розв'язання цієї проблеми питому вагу ми надаємо теоретичним напрацюванням вчених-математиків України – авторам задач математичних турнірів юних математиків [10].

ЛІТЕРАТУРА

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел. [Текст] / И. М. Виноградов. – Издание шестое, переработанное и дополненное. М.-Л., Гостехиздат, 1952. – 180 с.
2. Воробйова А. І. Матеріали математичних турнірів як джерело задач дослідницького характеру для роботи в системі МАН. Наукові праці: Науково-методичний журнал. Вип. 176. Т. 188. Педагогіка / А. І. Воробйова, В. А. Майборода, О. В. Майборода. – Миколаїв, 2012. – С. 55–58.
3. Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. И. Алгебра и теория чисел [Текст] / С. Т. Завало, В. Н. Костарчук, Б. И. Хацет / Ч. 1., – К. : «Вища школа», 1980. – 398 с.
4. Лейбниц Г. В. Письма и эссе о китайской философии и двоичной системе исчесления / Г. В. Лейбниц. – М., 2005. – 404 с.
5. Ожигова Е. П.Что такое теория чисел [Текст] / Е. П. Ожигова. – М. : Знание, 1970. – 94 с.
6. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения [Текст] / Д. Пойа ; пер. с англ. И. А. Вайнштейна. – Изд. 2-е испр. – М. : Наука, 1975. – 463 с.
7. Серпинский В. Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики / В. Серпинский. – М., Учпедгиз, 1961. – 76 с.
8. Тригг Ч. Задачи с изюминкой [Текст] / Ч. Тригг ; пер. с англ. Ю. Н. Сударева. – М. : Мир, 1975. – 302 с.
9. *Wooley T. D.* Large improvements in Waring's problem // Ann. of Math. 135 (1992), 131–164.
10. Завдання для відбірних етапів XVII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://ukrtym.blogspot.com/.
11. Линник Ю. В. Простые числа и степени двойки, Тр. МИ-АН СССР, 1951, том 38, 152–169; http://1matematiki.ru/yurij-vladimirovich-linnik/

Майборода А. В.,
НУК им. адмирала Макарова, г. Николаев, Украина;
Воробьева А. И.,
ЧГУ им. Петра Могилы, г. Николаев, Украина;
Майборода В. А.,
НМК им. В. Д.Чайки, г. Николаев, Украина

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ И ЗАДАЧИ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

В статье рассматривается система формирования исследовательских компетенций и развитие математических способностей учащихся-слушателей Малой академии наук. С учетом возрастных психологических особенностей учащихся, предоставляется практическое применение методики развития инновационного потенциала будущих ученых.

Ключевые слова: *математические турниры, Малая академия наук, числа Ферма, проблема Варинга, двоичная система счисления, тернарная квадратичная форма*.

Maiboroda O.,
Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine;
Vorobyov A.,
Petro Mohyla Black Sea State University, Mykolaiv, Ukraine;
Maiboroda V.,
Nicholas municipal college name V. D. Chayky, Mykolaiv, Ukraine

FUNDAMENTAL PROBLEMS OF NUMBER THEORY AND PROBLEMS OF SCHOOL MATHEMATICS

The paper deals with the system of formation and development of research competencies and mathematical abilities of students participants of the Junior Academy of Sciences. Considering age-related psychological characteristics of students, we give examples of practical application of innovative methods for potential future scientists.

Key words: *mathematical tournaments, Junior Academy of Sciences, Fermat numbers, Waring problem, binary system, ternary quadratic forms.*

Рецензенти: ***Мещанинов О. П.,*** д. пед. н., проф.;
Курикша О. В., к. ф-м. н., ст. викладач.

Дата надходження статті до редколегії 02.09.2014 р.