УДК 519.766.4

Кутковецький В. Я.,
д-р техн. наук, професор, Чорноморський державний університет ім. Петра Могили, м. Миколаїв, Україна

СТАТИКА Й ДИНАМІКА МЕРЕЖ ВІДНОСНИХ ІМОВІРНІСНИХ ТА ДЕТЕРМІНОВАНИХ ПОТОКІВ

Ациклічна мережа з імовірнісними та детермінованими потоками призначена для отримання Байєсових висновків. Формула Байєса при цьому замінюється на відношення між потоками мережі. Універсум (у вигляді стохастичної вибірки та множини детермінованих подій) розглядається як одиничний потік, який входить у мережу (включно з економічною) і, не змінюючи свого загального одиничного числового значення, за методом ієрархічних потоків розгалужується у вигляді локальних потоків, які входять в інші ієрархічно нижчі вершини. Сума локальних вихідних потоків вузла дорівнює 1. Мережу можна змінити на еквівалентну електричну схему зі змінною структурою з використанням перемикаючих функцій, яка дозволяє моделювати за законами Кірхгофа детерміновані, стохастичні, статичні й динамічні процеси за умови зміни в часі параметрів, потоків мережі та подій керування.

Ключові слова: *Байєс; мережа відносних стохастичних та детермінованих потоків; статика та динаміка; закони Кірхгофа; електрична схема заміщення.*

Постановка проблеми. Хоча задача сумісного аналізу стохастичних і детермінованих подій з урахуванням їхнього взаємного впливу часто виникає на практиці, але у фаховій літературі звичайно обмежуються їх роздільним аналізом. По суті, цю проблему розв'язував також і сам Байєс: використання апостеріорних спостережень у Байєсових мережах можна також тлумачити як заміну стохастичного спостереження на детерміноване. Байєсова мережа – це орієнтований ациклічний граф, у якого вершини – це змінні, а ребра – ієрархічні зв'язки між вершинами [1; 2] із залежністю між змінними в табличній формі. Комбінаторний характер залежності між змінними зменшує наочність розв'язку задачі й не дозволяє розглядати стохастичні процеси в динаміці. Також не підкреслюється те, що формула Байєса стосується лише одного вузла й тому не завжди дає значення ймовірності стосовно всієї системи в цілому.

Метою роботи є встановлення зв'язку між стохастичними та детермінованими процесами в статиці й динаміці, у тому числі й векономіці,за рахунок використання еквівалентних електричних схем заміщення й законів Кірхгофа при заміні рівнянь Байєса на еквівалентні відношення між потоками інформації.

Аналіз досліджень і публікацій

Умовна ймовірність та формула повної ймовірності. Якщо вибірка випадкових подій n_0 за несумісними гіпотезами H_h, де h = 1, 2,…, H розділена на окремі групи, то з неї можна отримати формулу для *повної групи ймовірностей, підсумок яких дорівнює 1*:

$$n_0 = \sum\nolimits_{h=1}^{H} n_{Hh};\ 1 = \sum\nolimits_{h=1}^{H} n_{Hh} / n_0;\ 1 = \sum\nolimits_{h=1}^{H} p_{Hh}, \qquad (1)$$

де $p_{Hh} = n_{Hh} / n_0$ – імовірність гіпотези H_h, h = 1, 2,…, H.

Якщо кожна група n_{Hh} має деяку власну підгрупу n_{Ah} із випадковими подіями А, то отримуємо аналогічні вирази для *повної групи умовних імовірностей:*

$$n_A = \sum\nolimits_{h=1}^{H} n_{Ah};\ 1 = \sum\nolimits_{h=1}^{H} n_{Ah} / n_A;\ 1 = \sum\nolimits_{h=1}^{H} p(A_h, | A), \qquad (2)$$

де $p_{Ah} = n_{Ah} / n_A = p(A_h|A)$ – представляє *умовну ймовірністьp_{Ah}*.

Вертикальна риска в позначенні $p(A_h|A)$ стосується до подій А й означає «*ймовірність спостереження події A_h, **якщо** події А відбулись*».

Із формул (2) отримуємо *формули повної ймовірності*:

$$n_A = \sum\nolimits_{h=1}^{H} n_{Ah};$$

$$p(A) = \frac{n_A}{n_0} = \sum_{h=1}^{H} \frac{n_{Ah}}{n_0} = \sum_{h=1}^{H} \left(\frac{n_{Ah}}{n_A} \cdot \frac{n_A}{n_0} \right) = \sum_{h=1}^{H} [\, p(A_h | A) p(A); \qquad (3)$$

$$p(A) = \frac{n_A}{n_0} = \sum_{h=1}^{H} \frac{n_{Ah}}{n_0} = \sum_{h=1}^{H} \left(\frac{n_{Ah}}{n_{Hh}} \cdot \frac{n_{Hh}}{n_0} \right) = \sum_{h=1}^{H} p(A_h | H_h) p(H_h) \qquad (4)$$

Виведення формули Байєса. Припустимо, що у вибірці спостережених вогнищ у кількості n_0 імовірності спостереження окремих подій А (полум'я), В (дим) та їх сумісного спостереження АВ (полум'я та дим) дорівнюють:

$$p(A) = \frac{n_A}{n_0};\ p(B) = \frac{n_B}{n_0};\ p(AB) = \frac{n_{AB}}{n_0}, \qquad (5)$$

де $n_A = n_{A1} + n_{AB}$ – кількість спостережених подій А (полум'я); $n_B = n_{B1} + n_{AB}$ – кількість спостережених подій В (дим); n_{AB} –кількість одночасно спостережених подій (полум'я та дим), яка одночасно входить у множини n_A та n_B.

Умовні ймовірності спостереження події А (якщо події *В* вже відбулись) та *події В* (якщо події *А* вже відбулись) дорівнює:

$$p(A|B)=\frac{n_{AB}}{n_B},\qquad p(B|A)=\frac{n_{AB}}{n_A}. \qquad (6)$$

Імовірність одночасного спостереження двох подій дорівнює:

$$p(AB)=\frac{n_{AB}}{n_0}=\frac{n_{AB}}{n_B}\cdot\frac{n_B}{n_0}=p(A|B)p(B); \qquad (7)$$

$$p(AB)=\frac{n_{AB}}{n_0}=\frac{n_{AB}}{n_A}\cdot\frac{n_A}{n_0}=p(B|A)p(A). \qquad (8)$$

Із виразів (7) та (8) отримуємо ***формулу Байєса***:

$$p(A|B)=\frac{p(B|A)p(A)}{p(B)},$$

$$p(B|A)=\frac{p(A|B)p(B)}{p(A)}. \qquad (9)$$

Напрями аналізу ймовірнісних мереж за методом Байєса. Для розпізнавання кожної групи (n_{H1}, n_{H2},…, n_{Hh},…, n_{HH}) початкової вибірки об'єктів n_0 використовують *ознаки – змінні об'єктів вибірки* $X_h = (x_{h;1}, x_{h;2},\ldots, x_{h;j},\ldots, x_{h;n})$, кожна з яких для окремого об'єкта приймає одне з двох значень: «0/1», «Орел/Решка» тощо.

Залежно від кількості ознак-змінних задачі Байєса можна розділити на дві групи: вибірка з однією ознакою x_1 та вибірка з кількома ознаками x_j, j = 1,…, n.

Кожна вибірка може мати задану кількість взаємно несумісних гіпотез (H_1, H_2,…,H_h,…, H_H), імовірності яких складають повну групу.

1. Вибірка з об'єктами, що описуються однією ознакою x_1.

Одна ознака – змінна x_1 – може приймати одне з двох значень: або $x_{11;h} = 1$, або $x_{10;h} = 0$. Тому кожна група гіпотези розділяється на дві підгрупи у вигляді [($n_{H1;x11}$, $n_{H1;x10}$), …, ($n_{Hh;x11}$, $n_{Hh;x10}$),…,($n_{HH;x11}$, $n_{HH;x10}$)] із дотриманням рівності $n_{Hh} = n_{Hh;x11} + n_{Hh;x10}$.

Ми можемо:

– визначити апріорну ймовірність спостереження гіпотези H_h за формулою

$$p(H_h)=n_h/n_0, \qquad (10)$$

де $n_0 = (n_{H1} + n_{H2} +\ldots+ n_{Hh} +\ldots+ n_{HH})$.

– визначити *ймовірність* спостереження ознаки $x_{11;h} = 1$ гіпотези h за формулою:

$$p(x_{11;h})=\frac{n_{x11;h}}{n_0}=\frac{n_h}{n_0}\cdot\frac{n_{x11;h}}{n_h}=p(H_h)p(x_{11;h}|H_h); \qquad (11)$$

де $p(H_h) = n_h / n_0$ – апріорна ймовірність гіпотези H_h;$p(x_{11;h}|H_h) = n_{x11;h}/n_h$ – *умовна ймовірність* спостереження ознаки $x_{11:h} = 1$ у групі n_h (гіпотези H_h); $p(x_{10;h}|H_h) = 1 - p(x_{11;h}|H_h)$ – *умовна ймовірність* спостереження ознаки $x_{10:h} = 0$ у групі n_h.

За формулою повної ймовірності (4) розрахувати ймовірність спостереження об'єктів із заданим значенням ознаки-змінної $x_{11;h} = 1$ для всієї вибірки:

$$p(x_{11})=\sum_{h=1}^{H}\frac{n_{x11;h}}{n_0}=\sum_{h=1}^{H}\left(\frac{n_h}{n_0}\cdot\frac{n_{x11;h}}{n_h}\right)=$$

$$=\sum_{h=1}^{H}p(H_h)p(x_{11;h}|H_h). \qquad (12)$$

Із формул (11) та (12) визначаємо ***формулу Байєса*** для однієї змінної за наявності кількох гіпотез, за якою ймовірність спостереження гіпотези h за умови появи ознаки $x_{11:h} = 1$ дорівнює:

$$p(h|x_{11})=\frac{p(x_{11;h})}{p(x_{11})}=\frac{p(H_h)p(x_{11;h}|H_h)}{\sum_{h=1}^{H}p(H_h)p(x_{11;h}|H_h)}. \qquad (13)$$

У формулі (13) вважаємо, що ознака об'єкта $x_{11;h}$ може мати значення або 1, або 0. Відсутність у групі n_h ознаки $x_{11;h}$ не перетворює на 0 добуток $[p(H_h)p(x_{11;h}|H_h)]$, бо ми вважаємо, що наявність чи відсутність ознаки ($x_{11;h} = 1$ чи $x_{10;h} = 0$) у групі n_h мають однакову інформаційну цінність. Тому в цьому випадку ймовірність $p(x_{11;h}|H_h) = 0$ замінюємо на $p(x_{10;h}|H_h) = 1$.

2. У вибірці з об'єктами, що описуються багатьма змінними $X = (x_1, x_2,\ldots, x_j, \ldots, x_n)$, елементи вектора X спостерігаються одночасно. Тому ймовірність спостереження однієї події у формулі (13) *замінюється добутком імовірностей* спостереження вектора кількох ознак-змінних $X_h = (x_{1;h}, x_{2;h},\ldots, x_{j;h}, \ldots, x_{n;h})$. У результаті отримуємо ***формулу Байєса*** при спостереженні подій-об'єктів багатовимірного простору, за якою ймовірність спостереження гіпотези h за умови появи вектора ознак X_h:

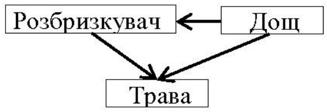
$$p(h|X_h)=\frac{p(H_h)\prod_{j=1}^{n}p(x_{j;h}|H_h)}{\sum_{h=1}^{H}\left[p(H_h)\prod_{j=1}^{n}p(x_{j;h}|H_h)\right]}, \qquad (14)$$

де $p(x_{j;h}|H_h)$ – імовірність наявності ознаки $x_{j;h}$ у гіпотезі H_h (тобто середнє значення ознаки $x_{j;h} = 1$ у групі n_h), яка вже спостережена; якщо $p(x_{j;h}|H_h) = 0$, то її значення замінюється на $p(x_{j;h}|H_h) = 1$ за аналогією з формулою (13).

Виклад основного матеріалу

Приклад «Спостереження мокрої трави» (рис. 1 [1]). Спочатку розглянемо відомі Байєсові мережі.

Дощ R	Розбризкувач S_T	S_F
R_T	0,01	0,99
R_F	0,4	0,6



Дощ R_T	R_F
0,2	0,8

Дощ йде R	Розбризкувач увімкнений S	Трава мокра G: G_T	G_F
R_T	S_T	0,99	0,01
R_T	S_F	0,9	0,1
R_F	S_T	0,8	0,2
R_F	S_F	0	1,0

Рис. 1. Байєсова мережа з вершинами-змінними [1]

Байєсова мережа (рис. 1 [1]) призначена для визначення ймовірності спостереження мокрої трави (G) залежно від ймовірності дощу (R) та ймовірності увімкнення розбризкувача (S). У таблицях рис. 1 використано відповідні позначення з нижніми індексами «T (TRUE)»: «R_T – дощ іде» «S_T – розбризкувач увімкнено», «G_T – трава мокра». Нижні індекси «F (FALSE)» означають протилежні події: «R_F – дощ не йде» і т. д. Нижче ймовірність початкової *вибірки* розглядається як рівний 1 потік, який за взаємно несумісними гіпотезами розгалужується по ієрархічно нижчих вершинах на окремі групи подій початкової вибірки. Мережу рис. 1 представимо у вигляді електричної схеми рис. 2.

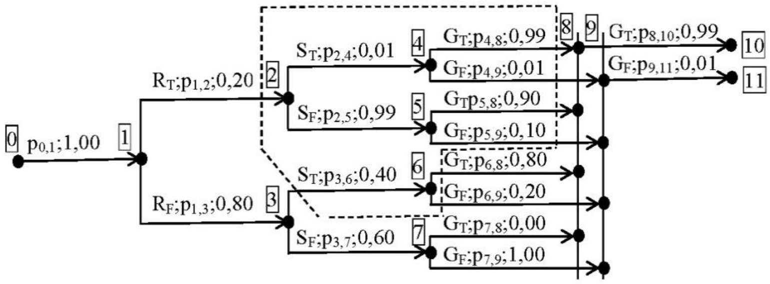


Рис. 2. Електрична схема заміщення з потоками умовних імовірностей рис. 1.

Імовірнісна мережа (рис. 2) має такі особливості: локальні потоки умовних імовірностей $p_{i,j}$ за методом ієрархічних потоків [3] складають повну групу; батьківські потоки ймовірностей теж можна перевести в локальні потоки; кожний батьківській потік одного вузла розділяється між нащадковими потоками пропорційно локальним потокам їхніх умовних імовірностей; кожна гілка є *джерелом потоку (струму)* [4]. На рис. 2 позначено:

– $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…, $\boxed{11}$ – вузли електричної схеми заміщення (показані в прямокутниках);

– $p_{0,1}$, $p_{1,2}$,…, $p_{9,11}$ – потоки *умовних* імовірностей між відповідними вузлами схеми (потік умовної ймовірності $p_{\alpha,\beta}$ позначається в нижніх індексах й означає: «потік умовної ймовірності витікає з вузла α та впадає у вузол β»; «β виконується, якщо виконано α»);

– R_T, S_T, G_T – перемикаючі функції відповідних гілок електричної схеми, які можуть мати два значення (1 або 0): 1 – апостеріорно спостережено, що дощ R іде, розбризкувач S увімкнено і трава G мокра; 0 – у протилежних випадках;

– R_F, S_F, G_F – перемикаючі функції відповідних гілок електричної схеми, які можуть мати два значення (1 або 0): 1 – апостеріорно спостережено, що дощ R не йде, розбризкувач S не увімкнено і трава G не мокра; 0 – у протилежних випадках.

Апріорні значення всіх перемикаючих функцій (R_T, R_F; S_T, S_F; G_T, G_F) дорівнюють 0; при цьому спостерігаються потоки апріорних імовірностей навченої мережі.

За наявності апостеріорного спостереження одна з перемикаючих функцій у парах (R_T, R_F), (S_T, S_F) та (G_T, G_F) може набувати детерміноване значення 1.

Вхідний локальний потік імовірності $p_{0,1} = n_0/n_0 = 1$ із загальною кількістю подій вибірки n_0 на *1-му ієрархічному рівні* у вузлі $\boxed{1}$ розділяється на частки ($n_0 = n_{1,2} + n_{1,3}$) між показаними в прямокутних рамках вузлом $\boxed{1}$ та вузлами ($\boxed{2}$, $\boxed{3}$) *2-го ієрархічного рівня*, для яких відповідні локальні потоки ймовірності складають повну групу ($p_{1,2} + p_{1,3} = 1$), де $p_{1,2} = n_{1,2}/n_0$; $p_{1,3} = n_{1,3}/n_0$. Далі отримані локальні потоки $p_{1,2} + p_{1,3} = 1$ знову розділяються на *локальні потоки умовних імовірностей нижчих ієрархічних рівнів* $p_{i,j}$, де i – порядковий номер *батьківської вершини*, звідки витікає потік $p_{i,j}$; j – порядковий номери *нащадкової вершини*, куди втікає потік $p_{i,j}$. Кожний *локальний* потік імовірності нижчого ієрархічного рівня $p_{i,j}$ характеризується відповідною часткою $n_{i,j}$ потоку початкової вибірки n_0.

На рис. 2 пунктирною лінією позначений *складний вузол*, який охоплює кілька вузлів схеми і стосовно якого також можна визначити вхідні та вихідні локальні потоки ймовірностей по відношенню до потоку вузла.

Для вузлів електричної схеми заміщення рис. 2 можна скласти математичну модель (рис. 3), рішення для якої отримане в MathCAD:

```
RT:= 0   RF:=0   ST:=1   SF:=0   GT:=0   GF:=0
p12:= (1 – RF)(0.2 + RT·0.8)              p13:=(1 – RT)(0.8 + RF·0.2)
p24:= (1 – SF)(0.01 + ST·0.99) p12        p25:=(1 – ST)(0.99 + SF·0.01)p12
p36:= (1 – SF)(0.4 + ST·0.6)·p13          p37:= (1 – ST)(0.6 + SF·0.4 )·p13
p48:= (1 – GF)(0.99 + GT·0.01)·p24        p49:=(1 – GT)(0.01 + GF·0.99 )·p24
p58:= (1 – GF)(0.9 + GT·0.1)·p25          p59:= (1 – GT)(0.1 + GF·0.9)·p25
p68:= (1 – GF)(0.8 + GT·0.2)·p36          p69:= (1 – GT)(0.2 + GF·0.8)·p36
p78:= (1 – GF)(0 + GT·1)·p37              p79:= (1 – GT)(1 + GF·0)·p37
p810:= p48 + p58 + p68 + p78              p911:= p49 + p59 + p69 + p79
p12 = 0.2   p24 = 0.2   p25 = 0   p48 = 0.198   p49 = 0.002   p58 = 0   p59 = 0
p13 = 0.8   p36 = 0.8   p37 = 0   p68 = 0.64    p69= 0.16     p78 = 0   p79 = 0
p810 = 0.838          p911 =0.162
```

Рис. 3. Математична модель MathCAD для аналізу схеми рис. 2: p810 = 0.838 – потік імовірності, що трава мокра; p911 = 0.162 – потік імовірності, що трава суха

Модель рис. 3 розраховує *не локальні потоки умовних імовірностей, а **потоки ймовірностей** інформації*, які дорівнюють добутку локальної ймовірності даної гілки на локальні ймовірності всіх ієрархічно вищих гілок. Позначення цих величин імовірностей зафіксовано без використання нижніх індексів.

Унаслідок того, що (ST:= 1; SF:= 0), модель рис. 3 відображає відповідь на питання: «Якими будуть потоки ймовірностей у випадку, якщо апостеріорно помічено, що розбризкувач увімкнено (тобто ST:= 1; SF:= 0)?». У результаті отримано відповідь: p12 = 0.2; p24 = 0.2; p25 = 0; p48 = 0.198; p49 = 0.002; p58 = 0; p59 = 0; p13 = 0.8; p36 = 0.8; p37 = 0; p68 = 0.64; p69= 0.16; p78 = 0; p79 = 0; p810 = 0.838; p911 = 0.162. Як бачимо, у цьому прикладі для отримання відповіді формула Байєса не застосовується.

Якщо всі початкові значення станів прирівняти до нуля (RT:= 0, RF:= 0, ST:= 0, SF:= 0, GT:= 0, GF:= 0), то потоки моделі рис. 3 відображають *стан навченої мережі*: p12 = 0.2; p24 = 0.002; p25 = 0.198; p48 = 0.00198; p49 = 0.00002; p58 = 0.1; p59 = 0.02; p13 = 0.8; p36 = 0.32; p37 = 0.48; p68 = 0.256; p69 = 0.064; p78 = 0; p79 = 0.48; p810 = 0.436; p911 =0.564.

Якщо ввести дані апостеріорного спостереження «йде дощ (RT:= 1, RF:= 0)»; «увімкнений розбризкувач (ST:=1, SF:=0)»; «чи мокра трава – немає апостеріорного спостереження (GT:=0, GF:=0)», то модель видає значення потоків імовірностей: p12 = 1; p24 = 1; p25 = 0; p48 = 0.99; p49 = 0.01; p58 = 0; p59 = 0; p13 = 0.8; p36 = 0; p37 = 0; p68 = 0; p69 = 0; p78 = 0; p79 = 0; p810 = 0.99; p911 = 0.01.

З отриманих рівнянь можна бачити, що *ймовірність імовірнісного потоку* $P^*_{i,j} = n_{i,j}/n_0$, дорівнює добуткам локальних імовірностей цього конкретного потоку та потоків локальних імовірностей усіх вищих ієрархічних рівнів за наявності лише одного батьківського потоку в усіх вершин. У випадку наявності кількох батьківських потоків потрібноураховувати відповідні еквівалентні параметри гілок із потоками ймовірностей.

Приклад прогнозування дощу. Припустимо, що в нас є навчена ймовірнісна експертна система передбачення дощу (Ω_1 – завтра буде дощ; Ω_2 – завтра не буде дощу) за апріорної ймовірності наявності дощу $p^0_{\lambda=1} = 0{,}2$ та відсутності дощу $p^0_{\lambda=2} = 0{,}8$ [5]. Вважаємо, що Байєсова мережа вже навчена. Для отримання прогнозу про погоду на завтра користувач для кожного рядка вводить одну з можливих відповідей «ТАК/НІ» про дані про погоду сьогодні (табл. 1).

Таблиця 1

Факти про сьогоднішню погоду, які вводяться користувачем для отримання прогнозу на завтра ($p^*(x_j|\Omega_1) = 1 - p(x_j|\Omega_1)$; $p^*(x_j|\Omega_2) = 1 - p(x_j|\Omega_2)$;)

Ознаки погоди, які вводяться користувачем	Введені відповіді користувача	Ω_1 ($p^0_{\lambda=1} = 0{,}2$)		Ω_2 ($p^0_{\lambda=2} = 0{,}8$)	
		$p(x_j\vert\Omega_1)$	$p^*(x_j\vert\Omega_1)$	$p(x_j\vert\Omega_2)$	$p^*(x_j\vert\Omega_2)$
x_1 = Сьогодні є дощ?	ТАК; $x_1 = 1$	0,65	0,35	0,30	0,7
x_2 = Сьогодні холодно?	НІ; $x_2 = -1$	0,6	0,4	0,35	0,65
x_3 = Сьогодні туман?	ТАК; $x_3 = 1$	0,3	0,7	0,65	0,35
x_4 = Сьогодні вогко?	ТАК; $x_4 = 1$	0,55	0,45	0,40	0,6
x_5 = Сьогодні сонячно?	НІ; $x_5 = -1$	0,2	0,8	0,75	0,25
x_6 = Сьогодні сухо?	НІ; $x_6 = -1$	0,1	0,9	0,8	0,2

Виконуємо для кожного класу окремі розрахунки у вигляді чисельників формули Байєса, використовуючи введені користувачем дані згідно з табл. 1:

– для класу Ω_1 (оцінка наявності дощу завтра)

$$p_1^* = p_1^0 \prod\nolimits_{j=1}^{6} p_{1j}(x_j \mid \Omega_1) =$$

$= 0{,}2 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}00617;$

– для класу Ω_2 (оцінка відсутності дощу завтра)

$$p_2^* = p_2^0 \prod\nolimits_{j=1}^{6} p_{2j}(x_j \mid \Omega_2) =$$

$= 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}00203.$

Формула Байєса визначає локальну ймовірність окремих гіпотез багатовимірних об’єктів вибірки через відношення ***оцінок їхніх локальних потоків імовірностей***, які повинні скласти повну групу. У цьому випадку оцінка-чисельник формули Байєса p_1^* вказує на «передбачення на завтра дощу Ω_1», тому що $p_1^* > p_2^*$.

Приклад з офісними принтерами. В офісі є 20 принтерів: *8 принтерівввід компанії А* (вузол $\boxed{2}$) із гарантією роботи без ремонту 80 % та *12 принтерівввід компанії В* (вузол $\boxed{3}$) із гарантією роботи без ремонту 90 % (рис. 4).

Рис. 4. Електрична схема заміщення Байєсової мережі для принтерів

Завдання: 1. За формулою повної ймовірності знайти ймовірність того, що довільно обраний принтер буде працювати без ремонту (буде справним).

2. За формулою Байєса визначити ймовірність того, що справний принтер належить до компанії *A* або *B*.

Змінні визначаємо з умов задачі: $p_{1,2}$ = 8 / (8 + 12) = 0,4 – імовірність спостереження гіпотези H_A (принтер належить компанії A); $p_{1,3}$ = 12 / (8 + 12) = 0,6 – імовірність спостереження гіпотези H_B (принтер належить компанії B); $p_{2,4}$= 0,8; $p_{3,4}$= 0,9 – потоки умовної ймовірності отримання справного принтера (гарантія роботи без ремонту – 80 % для компанії A та 90 % для компанії B); $p_{2,6}$ = 0,2; $p_{3,4}$ = 0,1– потоки умовної ймовірності отримання принтера компаній A та B, який протягом терміну гарантії потребує ремонту.

Для вузлів електричної схеми рис. 4 можна скласти математичну модель (рис. 5):

```
HA:=0   HB:=0   ПAT:=1   ПAF:=0   ПBT:=1   ПBF:=0
p12:= (1 – HB)(0.4 + HA·0.6)              p13:= (1 – HA)(0.8 + HB·0.2)
p24:= (1 – ПAF)( ПAT · 0.8) p12            p26:= (1 – ПAT)(ПAF · 0.2) p12
p34:= (1 – ПBF)( ПBT · 0.9)·p13            p36:= (1 – ПBT)(ПBF · 0.1 )p13
p45:= p24 + p 34
p12 = 0.4    p13 = 0.6    p24 = 0.32     p34 = 0.54     p45 = 0.86
```

Рис. 5. Математична модель MathCAD для аналізу розподілу принтерів рис. 4 (HA, HB – гіпотези належності до компаній A та B; (ПАТ, ПАF), (ПВТ, ПВF) – гіпотези належності принтерів до справних та несправних для компаній A та B

У формулюванні задачі не передбачено автоматичного переходу, наприклад, від коефіцієнтів 0,8 до 1 для потоку працездатної продукції $p_{2,4}$ та від 0,2 до 0 для потоку бракованої продукції $p_{2,6}$, які в підсумку повинні завжди дорівнювати 1.

Відповідь. 1. За *формулою повної ймовірності* ймовірність праці довільно обраного справного принтера без ремонту протягом гарантійного терміну дорівнює $P^*_{4,5} = p_{2,4}p_{1,2}\, p_{0,1} + p_{3,4}p_{1,3}\, p_{0,1} = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}9 \cdot 0{,}6 \cdot 1 = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}32 + 0{,}54 = 0{,}86$.

2. Розрахунок імовірності того, що принтер належить до компанії *A* (або *B*) виконуємо за *формулою Байєса*:

$$p_A = \frac{p_{1,2}p_{2,4}}{p_{1,2}p_{2,4} + p_{1,3}p_{3,4}} =$$

$$\frac{0{,}4 \cdot 0{,}8}{0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}9} = \frac{0{,}32}{0{,}86} = 0{,}37.$$

$$p_B = \frac{p_{1,3}p_{3,4}}{p_{1,2}p_{2,4} + p_{1,3}p_{3,4}} =$$

$$\frac{0{,}6 \cdot 0{,}9}{0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}9} = \frac{0{,}54}{0{,}86} = 0{,}63.$$

Формулу Байєса в моделі рис. 4 може бути замінено відношенням потоків:

$$p_A = \frac{P24}{P24 + P34} = \frac{0{,}32}{0{,}32 + 0{,}54} = \frac{0{,}32}{0{,}86} = 0{,}37.$$

$$p_B = \frac{P34}{P24 + P34} = \frac{0{,}54}{0{,}32 + 0{,}54} = \frac{0{,}54}{0{,}86} = 0{,}63.$$

Обраний справний принтер належить компанії B з імовірністю 0,63 (проти ймовірності 0,37 для компанії A).

Приклад купівлі книги. На цьому прикладі розглянемо *вплив детермінованих подій на стохастичні події*. Робітник і пенсіонер однаково ймовірно й кожен окремо відвідують магазини A та B з наміром купити книгу (рис. 6 та рис. 7). На рис. 6 та 7 позначено гіпотези: H_A, H_B – відвідини магазинів A та B; K_{AT}, K_{BT} – купівля книги в магазинах A та B; K_{AF}, K_{BF} – некупівля книги в магазинах A та B; H_C – *детермінований час*, який відбирається в робітника та пенсіонера на сон, роботу та інші справи.

У магазині A книжка буває в продажу з імовірністю $p_{2,4}$ = 0,6, а в магазині B – з імовірністю $p_{2,4}$ = 0,8. Виникає питання: «З якою ймовірністю кожен із них купить книжку?», «Хто з них раніше купить книгу?».

Насправді в кожного з покупців за гіпотезою H_C *відбирається неоднаковий детермінований час*. Природно, що в робітника цей час за гіпотезою H_C є більшим, порівняно з часом пенсіонера.

Припустимо, що в робітника за гіпотезою H_C детермінований потік $p_{1,7}$ = 0,8 при рівноймовірнісних відвідинах магазинів ($p_{1,2}$ = 0,1; $p_{1,3}$ = 0,1). Ці потоки відображено на рис. 6. У результаті ймовірність купівлі книжки робітником дорівнює $p_{4,5} = p_{2,4}p_{1,2} + p_{3,4}p_{1,3} = 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}14$.

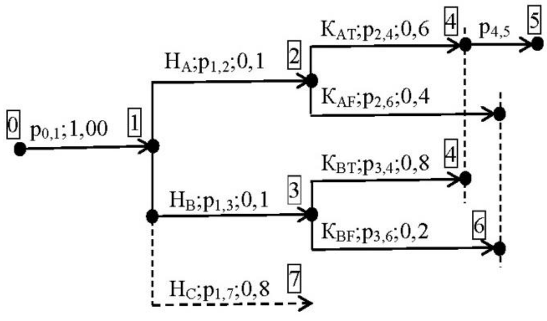


Рис. 6. Схема заміщення мережі з відносними потоками щодо купівлі книжки робітником

Відповідно, у пенсіонера за гіпотезою H_C детермінований потік $p_{1,7}$ = 0,6 при рівноймовірнісних відвідинах магазинів ($p_{1,2}$ = 0,2; $p_{1,3}$ = 0,2). Ці потоки відображено на рис. 7. В результаті ймовірність купівлі книжки робітником дорівнює $p_{4,5} = p_{2,4}p_{1,2} + p_{3,4}p_{1,3}$ = 0,6 · 0,2 + 0,8 · 0,2 = 0,28.

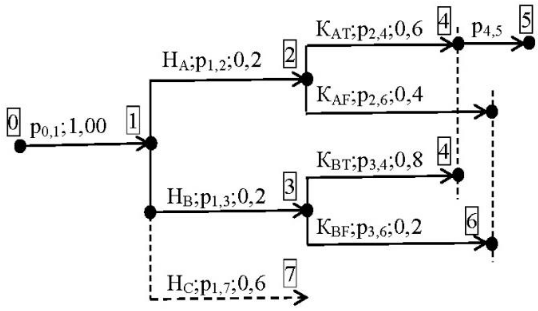


Рис. 7. Схема заміщення мережі з відносними потоками щодо купівлі книжки пенсіонером.

Якщо не ураховувати <u>*детермінований час*</u>, який відбирається за гіпотезою H_C у покупців на сон, роботу та інші справи, то гіпотези відвідин магазинів (H_A, H_B) у обох покупців мають однакові потоки ймовірностей ($p_{1,2}$ = 0,5; $p_{1,3}$ = 0,5). Тому ймовірність купівлі книжки кожним з них є однаковою і дорівнює $p_{4,5} = p_{2,4}p_{1,2} + p_{3,4}p_{1,3}$ = 0,6 · 0,5 + 0,8 · 0,5 = 0,7.

Отже, якщо не враховувати детерміновані потоки подій, <u>*можна помилитись*</u> у значеннях ймовірностей подій й у відповіді на питання: «Хто з покупців раніше придбає книгу?»

Водночас виникає ще одне питання: за який час спостерігаються ці ймовірності? Очевидно, що за час t = 0 нічого не відбувається і розраховані вище ймовірності дорівнюють нулю. Тобто потрібно в статистичних розрахунках (щоб вони відбулись) «набрати вибірку» відвідин магазинів, а це не робиться миттєво. У результаті за експериментальними даними можна визначити для робітника й пенсіонера поступове збільшення в часі значення ймовірностей купівлі книги.

Цей приклад демонструє: практичну значущість урахування взаємної залежності потоків випадкових і детермінованих подій; необхідність контролю зміни статистичних показників у часі; якщо універсум уміщує випадкові дані вибірки й детерміновані дані, то висновки наближуються до реальності, але, з іншого боку, підсумок відносних потоків імовірностей стає меншим за 1.

Теоретична основамереж із відносними інформаційними потоками. До мереж із відносними ймовірнісними й детермінованими потоками можна застосувати перефразовані закони Кірхгофа, які використовуються для аналізу роботи вентильних перетворювачів [6, 7]:

1. *«Для з'єднаних у вершині простих та складних дуг алгебраїчна сума добутків потоків дуг p_{ij} (чи похідних від потоків p_{ij} по часу) на їхні перемикаючі функції дорівнює нулю (ці рівняння складаються для (n-1) вершин)»:*

$$\sum f_{ij}\,p_{ij} = 0\,, \qquad \sum f_{ij}\,dp_{ij}/dt = 0\,, \tag{15}$$

де t – час; f_{ij} – перемикаюча функція, яка має значення 1, якщо дугу увімкнено, та 0, якщо вимкнено [6]; $\boxed{i}$ = 1, 2,…, m – порядковий номер вершини; $\boxed{j}$ = 1, 2,…, n – порядкові номери сусідніх вершин при $\boxed{i} \neq \boxed{j}$; n – кількість вершин; p_{ij} – потік дуги між вершинами $\boxed{i}$ та $\boxed{j}$.

2. *«Алгебраїчна сума падінь тисків потоків u_{ij} уздовж замкненого простого чи складного контуру, помножена на перемикаючу функцію цього контуру, дорівнює нулю (згідно з цим законом складаються $[m-(n-1)]$ рівнянь)»:*

$$f_K \sum u_{ij} = 0\,, \tag{16}$$

де f_K – перемикаюча функція контура, яка приймає значення 1, якщо контур замкнений та 0, якщо розімкнений.

У формулах «повної ймовірності», «повної групи ймовірностей», у «формулі Байєса» частка гіпотез може визначатись детермінованими потоками. Тому потоки одного вузла можна розглядати сумісно, без розділу їх на стохастичну й детерміновану складові.

Визначення параметрів схеми та її аналіз може відбуватись у статиці та динаміці на основі методів курсу «Теоретичних основ електротехніки» [4] та методів [6–9]. Під час аналізу динаміки можна використати рівняння <u>*розривних контурів*</u> півпровідникових ключових приладів із введенням у схему електричних опорів [6].

Висновки

1. У статистиці в деяких випадках доцільно ураховувати сумісно стохастичні та детерміновані джерела відносних потоків інформації.

2. За аналогією з «Теоретичними основами електротехніки» фізичні закони Кірхгофа та еквівалентні схеми зі змінною структурою є основою для аналізу статичних, динамічних, детермінованих і стохастичних відносних потоків з урахуванням дій системи керування. Потік гілки мережі може мати стохастичну й детерміновану складові.

3. Розглянутий <u>*об'єднаний аналіз стохастичних і детермінованих процесів*</u> може бути використано в будь-якій сфері, включно з економічною.

4. Мережу з відносними потоками може бути представлено у вигляді еквівалентної електричної схеми заміщення зі змінною структурою та з джерелами потоків. Апостеріорне спостереження випадкових потоків у вузлі перетворює їх на детерміновані потоки.

5. Формула Байєса в мережі замінюється на відношення між потоками. Локальні відносні потоки одного вузла за «формулою Байєса», стохастичні формули «повної ймовірності» та «повної групи ймовірностей» (взяті в лапки назви означають їхню відмінність від оригіналів) у принципі можуть ураховувати поряд зі стохастичними потоками також й детерміновані потоки, що спрощує деякі висновки. Але при цьому поняття «ймовірності» замінюється поняттям «відносного потоку». Саме Байєс зв'язав єдиним аналізом стохастичні й апостеріорно детерміновані процеси. Загальний підсумок відносних потоків імовірностей може бути меншим за 1.

6. Формули Байєса дають значення батьківських чи нащадкових *локальних потоків будь-якого* ***одного вузла,*** включно зі *складним вузлом*, створеним січенням, що охоплює кілька вузлів. Ці локальні потоки дорівнюють імовірності стосовно вибірки всієї системи, лише якщо по всіх гілках протікають потоки всієї вибірки стохастичних подій.

ЛІТЕРАТУРА

1. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : https: uk.wikipedia.org/wiki/Байєсова_мережа (14.03.2016).
2. Бідюк П. І., Коршевнюк Л. О. Методика побудови ймовірнісних мережних моделей / П. І. Бідюк, Л. О. Коршевнюк // Наукові праці. Серія «Комп'ютерні технології». – Вип. 148. Том 160. – 2011. – С. 6–14.
3. Кутковецький В. Я. Метод ієрархічних потоків / В. Я. Кутковецький // Наукові праці : Науково-методичний журнал. – Миколаїв: Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2014. – Вип. 225. Т. 237. Комп'ютерні технології. – С. 49–57.
4. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники : в 3-х томах / Г. И. Атабеков. – Ч. 1. Линейные электрические цепи. – М. : Энергия, 1978. – 592 с.
5. Нейлор К. Как построить свою экспертную систему / К. Нейлор. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 280 с.
6. Кутковецкий В. Я. Обобщенные методы переключающих функций и их применение для расчета электромагнитных процессов в вентильных цепях : автореферат диссертации на соискание ученой степени д-ра техн. наук : спец. 05.09.5 / В. Я. Кутковецкий. – К. : Институт электродинамики АН Украины. 1992. – 30 с.
7. Кутковецкий В. Я. Теоретичні основи мереж потоків / В. Я. Кутковецкий // Наукові праці. Серія «Комп'ютерні технології». – Миколаїв : Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили. – Вип. 148. Том 160. – 2011. – С. 173–183.
8. ElectricalFlows, LaplacianSystems, an Faste rApproximation of Maximum Flowin Unidirected Graph / P. Christiano, J. A. Kelner, A. Madry, Shang-HuaTeng, D. Spealman.
9. Кутковецкий В. Я. Закони потоків мереж при максимальному збагаченні у часі / В. Я. Кутковецкий // Наукові праці. Серія «Комп'ютерні технології». – Миколаїв : Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили. – Вип. 201. Том 213. – 2013. – С. 73–77.

Кутковецкий В. Я., *Черноморский государственный университет им. Петра Могили, г. Николаев, Украина*

СТАТИКА И ДИНАМИКА СЕТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПОТОКОВ

Ациклическая сеть с вероятностными и детерминированными потоками предназначена для получения Байесовых выводов. Формула Байеса при этом заменяется на отношение между потоками сети. Универсум (в виде стохастической выборки и множества детерминированных событий) рассматривается как одиночный поток, который входит в сеть (включая экономическую) и, не изменяя своего общего единичного числового значения, по методу иерархичных потоков разветвляется в виде локальных потоков, которые входят в другие иерархически низшие вершины. Сумма локальных выходных потоков узла равняется 1. Сеть можно заменить на эквивалентную электрическую схему с переменной структурой с использованием переключающих функций, которая позволяет моделировать по законам Кирхгофа детерминированные, статистические, статические и динамические процессы при изменении во времени параметров, потоков сети и воздействий управления.

Ключевые слова: *Байес; сеть вероятностных и детерминированных потоков; статика и динамика; законы Кирхгофа*; *электрическая схема замещения*.

Kutkovetskyi V. Y., *Petro Mohyla Black Sea State University, Mykolaiv, Ukraine*

STATICS AND DYNAMICS OF NETWORK WITH RELATIVE PROBABILISTICAND DETERMINISTIC FLOWS

Noncyclical network with probabilistic and deterministic flows is designed to obtain Bayes' conclusions. Bayes' formulae in the analysis are replaced by the mathematical ratios of flows. Universum (in the form of probability sample and multitude of deterministic events) is considered as flow equal to 1, which enter in vertex of network (including economical network) and, without changing common quantity to 1, by the method of hierarchy flows, is divided in the number of local flows, which enter in others hierarchically lower vertexes. The sum of local running out flows of vertex is equal 1. The network can be performed to electrical equivalent circuit with variable structure, *in which there are used the switching functions, which allow to model by the Kirchhoff's laws the deterministic, stochastic, static and dynamic processes by changing in time the parameters, flows of network and events of control.*

Keywords: *Bayes; network with relative probabilistic and deterministic flows; static and dynamic; laws of Kirchhoff; electrical equivalent circuit.*

Рецензенти: д-р пед. наук, професор О. П. Мещанінов;
д-р техн. наук, професор М. П. Мусієнко

 Дата надходження статті до редколегії 28.03.16